NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXV.

CUM TABULIS III.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

75. Band.

Mit 3 Tafeln.

Halle, 1899.

Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei W. Engelmann in Leipzig.

4° Acad.
5/B75

Bayerische Staatsbibliothek
<36664571780010

NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXV.

CUM TABULIS III.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

75. Band.

Mit 3 Tafeln.

Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen HAARLEM

Halle, 1899.
Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei W. Engelmann in Leipzig.

Wb/49/838

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Seiner Majestät

Wilhelm II.

Deutschem Kaiser und Könige von Preussen

ihrem hohen Schirmherrn

dem erhabenen Gönner und Beförderer aller wissenschaftlichen Arbeit
des deutschen Volkes

widmet die

Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie
der Naturforscher

diesen fünfundsiebenzigsten Band ihrer Abhandlungen

durch den Vorsitzenden

Dr. **Karl von Fritsch.**

Inhalt des LXXV. Bandes.

Edmund Hess:

Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen . S. 1—482. Taf. I—III.

Vorstand der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

Gegründet am 1. Januar 1652. Deutsche Reichsakademie seit dem 7. August 1687.

Präsidium.

K. Freiherr von Fritsch in Halle a. S., Präsident. | **A. Wangerin** in Halle, Stellvertreter.

Adjuncten.

I. Kreis: **J. Hann** in Graz;
E. Mach in Wien;
G. Stache in Wien.
II. Kreis: **E. Wiedemann** in Erlangen;
R. Hertwig in München.
III. Kreis: **C. v. Liebermeister** in Tübingen.
IV. Kreis: **A. Weismann** in Freiburg.
V. Kreis: **G. A. Schwalbe** in Strassburg.
VI. Kreis: **R. Lepsius** in Darmstadt.
VII. Kreis: **E. Strasburger** in Bonn.
VIII. Kreis: **M. H. Bauer** in Marburg.
IX. Kreis: **E. H. Ehlers** in Göttingen.
X. Kreis: **G. Karsten** in Kiel.
XI. Kreis: **A. Wangerin** in Halle.
XII. Kreis: **H. Schaeffer** in Jena.
XIII. Kreis: **V. Carus** in Leipzig;
H. B. Geinitz in Dresden.
XIV. Kreis: **A. Ladenburg** in Breslau.
XV. Kreis: **R. Virchow** in Berlin;
C. A. Jentzsch in Berlin.

Sectionsvorstände und deren Obmänner.

I. Mathematik und Astronomie:
J. Lüroth in Freiburg, Obmann;
R. Helmert in Potsdam;
G. Cantor in Halle.

II. Physik und Meteorologie:
G. B. Neumayer in Hamburg, Obmann;
A. Oberbeck in Tübingen;
E. Mach in Wien.

III. Chemie:
J. Wislicenus in Leipzig, Obmann;
H. Landoldt in Berlin;
J. Volhard in Halle.

IV. Mineralogie und Geologie:
H. B. Geinitz in Dresden, Obmann;
K. Freiherr von Fritsch in Halle;
F. Zirkel in Leipzig.

V. Botanik:
H. G. A. Engler in Berlin, Obmann;
S. Schwendener in Berlin;
F. Buchenau in Bremen.

VI. Zoologie und Anatomie:
A. von Kölliker in Würzburg, Obmann;
C. Gegenbaur in Heidelberg;
F. E. Schulze in Berlin.

VII. Physiologie:
C. von Voit in München, Obmann;
F. L. Goltz in Strassburg;
W. Engelmann in Berlin.

VIII. Anthropologie, Ethnologie und Geographie:
R. Virchow in Berlin;
F. Freiherr von Richthofen in Berlin;
F. Ratzel in Leipzig.

IX. Wissenschaftliche Medicin:
E. Leyden in Berlin, Obmann;
R. Virchow in Berlin;
M. von Pettenkofer in München.

NOVA ACTA.

Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher

Band LXXV. Nr. 1.

Weitere Beiträge

zur

Theorie der räumlichen Configurationen.

I. Die linearen Transformationen der Klein'schen Cf. $(60_{15}, 30_6)$ nach ihrer geometrischen Bedeutung nebst Anwendung auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

II. Die Cf. $(60_{15}, 72_5)$ und die ihr zugehörige Gruppe von linearen Transformationen nebst Uebertragung auf die Hypersphäre und Anwendung auf die hierdurch bestimmten regelmässigen Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

Von

Dr. Edmund Hess, M. A. N.,

o. ö. Professor an der Universität Marburg.

Mit 3 Tafeln. Nr. I—III.

Eingegangen bei der Akademie am 3. August 1899.

HALLE.

1899.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Einleitung.

Die beiden vorliegenden Abhandlungen schliessen sich an eine 1890 erschienene Abhandlung des Verfassers[1]) an, mit welcher sie unter dem gemeinsamen Titel: „Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen" vereinigt sind.

Die erste dieser beiden Abhandlungen enthält hauptsächlich die Ableitung, Darstellung und Bedeutung der linearen Transformationen der sg. Klein'schen Configuration Cf. (60_{15}, 30_6), welche in der früheren Abhandlung genauer untersucht worden ist. Diese Transformationen sind gruppentheoretisch unter Anwendung der Klein'schen Liniencoordinaten von W. Reichardt[2]) und H. Maschke[3]) behandelt, insbesondere sind auch von Beiden die erzeugenden Substitutionen aufgestellt worden. Bei den nach folgenden Entwicklungen ist vorzugsweise auf die geometrische Deutung und Unterscheidung dieser vollständig aufgestellten Transformationen, nämlich der Collineationen und Correlationen Rücksicht genommen und die Angabe der für diese Transformationen charakteristischen Büschel und Netze von Flächen zweiten Grades, der Schaaren von linearen Complexen, der Complexe zweiten Grades, der Eckpunkte, Kanten und Flächen der Haupttetraeder,

[1]) E. Hess: „Ueber die Klein'sche Configuration Cf. (60_{15}, 30_6) und einige bemerkenswerthe aus dieser ableitbare räumliche Configurationen." Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. LV Nr. 2. Halle 1890. Diese Abhandlung soll im Folgenden immer durch A_1 citirt werden.

[2]) Math. Anm. Bd. 28 S. 84—98.

[3]) Math. Anm. Bd. 30 S. 496 ff.

sowie auch die durch die auftretenden Geraden bedingten Eintheilungen der Fundamentalflächen ins Auge gefasst worden. Es erfahren so die in der früheren Abhandlung bereits theilweise abgeleiteten Eigenschaften der Cf. $(60_{15}, 30_6)$ vielfache Erweiterungen und Ergänzungen und ergeben eine Reihe weiterer wichtiger Configurationen.

Eine besondere Anwendung dieser allgemein durchgeführten Betrachtungen bildet sodann die Aufstellung der bereits von Vietor und Reye auf synthetischem Wege ermittelten Collineationen und dualistischen Umformungen der harmonischen Cf. $(24_9, 18_4)$ und der Hexaeder-Oktaeder-Cf. $(12_6, 16_3)$. Durch ein bereits in einer früheren Abhandlung[1]) von mir angegebenes und hier ausführlich entwickeltes Verfahren gelingt es nunmehr leicht, diejenigen Transformationen zu erhalten, welchen einerseits die einfachen und doppelten Drehungen, andererseits die einfachen und dreifachen Spiegelungen entsprechen, durch welche die drei als Sechzehnzell, Achtzell und Vierundzwanzigzell bezeichneten regulären, linear begrenzten Gebilde des vierdimensionalen Raumes mit sich selbst zur Deckung gelangen. Analoges gilt für die hierhergehörigen eigentlichen und uneigentlichen Correlationen. Die bei diesen Entwicklungen benutzte Methode der Uebertragung einer Figur des dreidimensionalen ebenen Raumes auf den dreidimensionalen sphärischen Raum (die Hypersphäre) dürfte vielleicht einiges Interesse beanspruchen. Die einschlägige Literatur, insbesondere die Arbeiten von F. Klein, K. Rohn, R. Sturm, Th. Reye, A. Weiler, Clebsch-Lindemann, W. Reichardt, H. Maschke, van Oss, J. Feder, A. Schönflies, A. Cayley, E. Study, Cole, Heath, Goursat u. A. sind an den verschiedenen bezüglichen Stellen der Abhandlung berücksichtigt und genauer angegeben.

Die zweite Abhandlung enthält die genauere Untersuchung der zuerst von mir[1]) abgeleiteten Cf. $(60_{15}, 72_5)$ und der speciellen in ihr enthaltenen Cf. $(5_6, 10_3)$ mit durchweg reellen Elementen. Die linearen Transformationen derselben werden unter den oben bezeichneten Gesichtspunkten mit vorzugsweiser Benutzung tetraedrischer Coordinaten aufgestellt und aus diesen sodann die entsprechenden Transformationen erhalten, durch welche

[1]) Math. Anm. Bd. 28.

die drei übrigen regulären, linear begrenzten Gebilde des vierdimensionalen Raumes, nämlich das 600-Zell, das 120-Zell und das 5-Zell in sich übergeführt werden.

Während hiernach die beiden vorliegenden Abhandlungen als Hauptresultat die Aufstellung und Deutung sämmtlicher linearen Transformationen ergeben, durch welche die (ganz oder theilweise) regulären Gebilde des vierdimensionalen Raumes in sich übergeführt werden, war es bei dem Umfang, welchen die Entwicklungen erforderten, nicht mehr möglich — wie in der Vorrede zu der früher erschienenen Abhandlung in Aussicht gestellt wurde — auch diejenigen Configurationen eingehender zu berücksichtigen, deren Repräsentanten die durch die ganz oder theilweise regelmässigen Gebilde des dreidimensionalen ebenen Raumes bestimmten Raumfiguren sind. Ich behalte mir vor, bei einer anderen Gelegenheit auf diese Gebilde näher einzugehen.[1])

[1]) Vgl. E. Hess: „Ueber gewisse räumliche Configurationen". Marburger Berichte 1892. Mai S. 86—98, sowie J. de Vries: „Ueber räumliche Configurationen welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen". Sitzungsber. der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Bd. C Abth. II. Juli 1891.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Erster Haupttheil.

Die linearen Transformationen der Klein'schen Cf. $(60_{15}, 30_6)$ nach ihrer geometrischen Bedeutung nebst Anwendung auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

§ 1.

Recapitulation einiger Haupteigenschaften der Klein'schen Cf. $(60_{15}, 30_6)$.

Die sechs linearen s. g. Fundamentalcomplexe:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots\ldots\ x_6 = 0, \ldots\ldots \quad (1)$$

welche, wenn p_{ik} Plücker'sche Liniencoordinaten bedeuten, durch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(p_{12}+p_{34}),\ x_3 = \frac{1}{2}(p_{13}+p_{42}),\ x_5 = \frac{1}{2}(p_{14}+p_{23}), \\ x_2 &= \frac{1}{2i}(p_{12}-p_{34}),\ x_4 = \frac{1}{2i}(p_{13}-p_{42}),\ x_6 = \frac{1}{2i}(p_{14}-p_{23}), \end{aligned}\right\} \ldots (2\alpha)$$

und

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= x_1 + i\,x_2,\ p_{13} = x_3 + i\,x_4,\ p_{14} = x_5 + i\,x_6, \\ p_{34} &= x_1 - i\,x_2,\ p_{42} = x_3 - i\,x_4,\ p_{23} = x_5 - i\,x_6, \end{aligned}\right\} \ldots (2\beta)$$

definirt sind, liegen bekanntlich zu je zweien in Involution (die sechs Gewinde stützen sich nach R. Sturm's Ausdrucksweise), d. h. sie bestimmen 15 involutorische Congruenzen (windschiefe Involutionen), deren 15 Directricenpaare $e = (i, k)$ die Cf. $(60_{15}, 30_6)$ constituiren.[1])

[1]) Vgl. A_1 § 1—4, die Abhandlungen von F. Klein: Math. Ann. II p. 198—226, K. Rohn: Math. Ann. VII p. 145—207, die oben citirten Abhandlungen von W. Reichardt und H. Maschke, sowie R. Sturm: Liniengeometrie p. 234—251. — Die Angabe in A_1 S. 111 und 112, nach welcher in jedem der Fundamentalcomplexe fünf Linienpaare e enthalten seien, ist dahin zu berichtigen, dass jeder F.-Complex zehn dieser Geradenpaare als Complexstrahlen enthält, während jedes der fünf übrigen Paare zwei in Beziehung auf den Complex conjugirte Strahlen darstellt.

Jedes der 15 Linienpaare e wird von sechs der übrigen geschnitten, so dass jeder der 60 Schnittpunkte $\mathfrak{e}$ (jede der 60 Verbindungsebenen ε) mit 15 Verbindungsebenen (Schnittpunkten) und mit drei Geraden e incident ist.

Die 15 s. g. Fundamentaltetraeder T_i, deren Eckpunkte, Kanten, Seitenflächen bez. die Punkte $\mathfrak{e}$, Geraden e, Ebenen ε sind, bilden zehnmal zu je sechs ein desmisches und das diesem conjugirte desmische System. Je sechs zusammengehörige derartige Tetraeder sind in Bezug auf eine der zehn Fundamentalflächen $F_i^{(1)}$, welche durch je drei der Fundamentalcomplexe (jede auf zwei Arten) bestimmt werden, sich selbst conjugirt, während die übrigen neun Tetraeder einer solchen Fläche zugleich ein- und umgeschrieben sind.[1])

Die 60 Fundamental-Ebenen ε (-Punkte $\mathfrak{e}$) bestimmen ausserdem zu je dreien 320 Gerade k und zu je zweien 360 Gerade d, deren Klein'sche Coordinaten x_i sich in sehr einfacher Weise erhalten lassen.[2])

Die Klein'sche Cf. $(60_{15}, 30_6)$ lässt sich daher nach den von mir[3]) aufgestellten Definitionen als eine vollständige, regelmässige, sich selbst reciproke Configuration bezeichnen und durch das Symbol:

$$\left(\overset{15}{\underset{3+16+12}{60}},\ \overset{6}{\underset{6}{30}}+\overset{3}{\underset{3}{320}}+\overset{2}{\underset{2}{360}},\ \overset{3+16+12}{\underset{15}{60}}\right)\ldots(3)$$

genauer charakterisiren.

Ferner schneiden sich je sechs der 60 Ebenen ε in 480 Punkten $\mathfrak{k}$ (liegen je sechs der 60 Punkte $\mathfrak{e}$ in 480 Verbindungsebenen $\varkappa$) und je vier Ebenen ε in 960 Punkten $\mathfrak{d}$ (liegen je vier Punkte $\mathfrak{e}$ in 960 Verbindungsebenen δ).[4])

Für die folgenden Betrachtungen wird durchweg der durch die Gleichungen (1) definirte s. g. Typus I[5]) der Cf. zu Grunde gelegt, für

1) Vgl. A_1 § 2 und 5.

2) Vgl. A_1 § 6 I und II. Die Geraden k und d sind dort bez. durch f und g bezeichnet.

3) Vgl. E. Hess: Ueber gewisse räumliche Configurationen. Sitzungsber. d. Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg. Mai 1892. § 3.

4) Vgl. A_1 § 9 und 10. Die Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) und $\mathfrak{d}$ (Ebenen δ) sind dort bez. durch $\mathfrak{f}$ (φ) und $\mathfrak{g}$ (χ) bezeichnet.

5) Vgl. F. Klein: Math. Anm. II S. 205 Anm. K. Rohn: Math. Anm. XVIII S. 147 ff. R. Sturm: Liniengeometrie I S. 249—251.

welchen die sechs Fundamentalcomplexe sämmtlich reell sind; mittelst der von K. Rohn[1]) angegebenen Transformationsformeln lässt sich leicht von dem Typus I zu den drei anderen Typen II, III, IV übergehen.

Es sind für diesen Typus I:

die sechs Fundamentalcomplexe sämmtlich reell,

von den 60	F-Punkten (Ebenen)	24 reell	und 36	imaginär,
„ „ 15	F-Tetraedern	: 6 „	„ 9	„
„ „ 10	F-Flächen	: 9 „	„ 1	„
„ „ 30	Geraden e	: 18 „	„ 12	„
„ „ 320	„ k	: 32 „	„ 288	„
„ „ 360	„ d	: 72 „	„ 288	„ ,

die 480 Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) sämmtlich imaginär,

von den 960 Punkten $\mathfrak{d}$ (Ebenen δ) 96 reell und 864 imaginär.

Die 288 imaginären Geraden k sind sämmtlich imaginäre Gerade erster Art (nach v. Staudt's Bezeichnung), von den 288 imaginären Geraden d sind 144 erster, 144 zweiter Art.

Von den 480 imaginären Punkten $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) sind 192 Schnittpunkte (Verbindungsebenen) von je drei reellen und drei imaginären Ebenen ε (Punkten $\mathfrak{e}$), dagegen 288 von je zwei reellen und vier imaginären Ebenen ε (Punkten $\mathfrak{e}$). Auf jeder Geraden k liegen sechs Punkte $\mathfrak{k}$, auf jeder Geraden d liegen vier Punkte k, so dass durch jeden Punkt $\mathfrak{k}$ vier Gerade k und drei Gerade d hindurchgehen. Analoges gilt für die durch die Geraden k und d hindurchgehenden Ebenen $\varkappa$.

Von den 864 imaginären Punkten $\mathfrak{d}$ (Ebenen δ) sind 288 bez. 576 Schnittpunkte (Verbindungsebenen) je zweier reellen und zweier imaginären Ebenen ε (Punkte $\mathfrak{e}$), bez. je einer reellen und dreier imaginären Ebenen ε (Punkte $\mathfrak{e}$). Auf jeder Geraden k liegen drei, auf jeder Geraden d acht Punkte $\mathfrak{d}$, so dass durch jeden Punkt $\mathfrak{d}$ eine Gerade k und drei Geraden d hindurchgehen. Analoges gilt für die durch die Geraden k und d hindurchgehenden Ebenen δ.

Jede der 320 Geraden k schneidet eine der zehn Fundamentalflächen in zwei Punkten $\mathfrak{k}_0$ (enthält zwei Berührungsebenen $\varkappa_0$ an dieselbe); die 640

[1]) L. c.

Punkte $\mathfrak{k}_o$ (Ebenen $\varkappa_o$) sind durchweg imaginär.[1]) Dagegen schneidet jede der 360 Geraden d je zwei Fundamentalflächen $F_i^{(1)}$, $F_k^{(1)}$ in zwei Punktpaaren $\mathfrak{d}_o$ (enthält zwei Paare von Berührungsebenen δ_o); von den 1440 Punkten $\mathfrak{d}_o$ (Ebenen δ_o) sind 144, von welchen je 16 einer der neun reellen Fundamentalflächen angehören, reell, die übrigen 1296 sind imaginär.[1])

Es gehören also jeder der zehn Fundamentalflächen 36 Punkte $\mathfrak{e}$ (Berührungsebenen ε), 64 Punkte $\mathfrak{k}_o$ (Berührungsebenen $\varkappa_o$) und 144 Punkte $\mathfrak{d}_o$ (Berührungsebenen δ_o) an.

Für die im Folgenden zu betrachtenden Collineationen und Correlationen sind die durch die angegebenen Punkte und Ebenen, welche als Eckpunkte und Seitenflächen von Haupttetraedern auftreten, bestimmten Erzeugungslinien der Fundamentalflächen und deren weitere Schnittpunkte und Verbindungsebenen von grosser Wichtigkeit; weshalb dieselben zunächst genauer untersucht werden sollen.

§ 2.
Erzeugende der Fundamentalflächen und Schnittpunkte (Verbindungsebenen) dieser Erzeugenden.

Die 36 einer der zehn Fundamentalflächen angehörigen Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε) sind zu je sechs mit zwölf Geraden e incident, welche der Fläche als Erzeugende angehören, so dass auf der Fläche in jedem Punkte $\mathfrak{e}$ zwei Erzeugende, welche je einem der beiden Systeme angehören, sich schneiden (in jeder Ebene ε zwei solcher Geraden liegen). Durch jeden Punkt $\mathfrak{e}$ gehen (in jeder Ebene ε liegen) drei Gerade e, von denen je zwei vier Fundamentalflächen als Erzeugende angehören, so dass ein Punkt $\mathfrak{e}$ zugleich auf sechs F-Flächen liegt (eine Ebene ε zugleich sechs F-Flächen berührt). Jede Gerade e liegt also auf vier Fundamentalflächen und schneidet dreimal je zwei der übrigen F-Flächen in je einem Punktpaar $\mathfrak{e}$ (hat dreimal mit je zwei der übrigen F-Flächen ein Ebenenpaar ε gemein).

Die sechs mit einer der 2. 6 Erzeugenden e incidenten Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε) sind Oktaederpunkte (Hexaederebenen) derselben,

[1]) Vgl. A_1 § 11, wo auch die Coordinatenwerthe für die Punkte $\mathfrak{k}_o$, $\mathfrak{d}_o$ (die Ebenen $\varkappa_o$, δ_o), welche dort durch $\mathfrak{f}_o$, $\mathfrak{g}_o$ (φ_o, χ_o) bezeichnet wurden, angegeben sind.

da sie drei Paare darstellen, von welchen jedes zu den beiden anderen harmonisch ist. Auf je einer Geraden e der beiden Systeme kann das Fundamentalpaar (welches bei der Darstellung durch binäre Formen den Werthen $\lambda = o$, ∞ des Parameters entspricht) beliebig gewählt werden; damit ist dasselbe für die übrigen Geraden desselben Systems bestimmt und ebenso sind die Elemente der beiden anderen Paare (welche den Werthen 1, -1, i, $-i$ des Parameters entsprechen) auf allen Geraden desselben Systems entsprechend einander zugeordnet. Diese Oktaederpunkte $\mathfrak{e}$ (Hexaeder-Ebenen ε) sollen auch durch $\mathfrak{f}_o^{(e)}$ $\left(\varphi_o^{(e)}\right)$ bezeichnet werden.[1])

Es sollen nun auch für jede Erzeugungslinie e_o die zu den sechs Oktaederpunkten $\mathfrak{e}_o$ (Hexaederebenen ε_o) zugehörigen Hexaederpunkte (Oktaederebenen) und Kubooktaederpunkte (Rhombendodekaeder-ebenen) in Betracht gezogen werden.

1) Die acht Hexaederpunkte (Oktaederebenen) jeder Geraden e_o sind bekanntlich die vier Punkt-(Ebenen-)Paare, von denen jedes zu drei, verschiedenen Paaren angehörigen Punkten $\mathfrak{e}_o$ (Ebenen ε_o) (und ebenso zu den drei anderen Punkten $\mathfrak{e}_o$ [Ebenen ε_0]) äquianharmonisch liegt; diese Punkte (Ebenen), deren es für jede F.-Fläche 8. 12=96 giebt, sollen durch $\mathfrak{h}_o^{(e)}$ $\left((_o^{(e)}\right)$ bezeichnet werden. Je sechs entsprechende (d. h. durch denselben Werth des Parameters bestimmte) Hexaederpunkte (Oktaederebenen) der sechs Geraden e_0 des ersten, wie des zweiten Systems liegen auf (schneiden sich in) einer Geraden k_o, so dass acht Erzeugungslinien k_o des zweiten und acht des ersten Systems entstehen. Auf jeder der 2. 8 Geraden k_0 liegen (durch jede gehen hindurch) sechs Punkte $\mathfrak{h}_o^{(e)}$ $\left(\text{Ebenen } (_o^{(e)}\right)$, welche für diese Gerade Oktaederpunkte (Hexaederebenen) sind. Dieselben können daher auch durch $\mathfrak{f}_o^{(k)}$ $\left(\varphi_o^{(k)}\right)$ bezeichnet werden. Jeder Punkt $\mathfrak{h}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(k)}$ $\left(\text{jede Ebene } (_o^{(e)} = \varphi_o^{(k)}\right)$ gehört zugleich den vier Fundamentalflächen an, welche durch die zugehörige Grade e_0 hindurchgehen: es gehen also durch

[1]) Der untere Index o bezeichne durchgehends, dass die Punkte, Gerade, Ebenen einer Fundamentalfläche angehören. Die Punkte $\mathfrak{e}$, Geraden e und Ebenen ε können sämmtlich den Index o erhalten.

jeden Punkt $\mathfrak{h}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(k)}$ (liegen in jeder Ebene $\eta_o^{(e)} = \varphi_o^{(k)}$) vier Gerade k_o. Die Gesammtzahl der (durchweg imaginären) Punkte $\mathfrak{h}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(k)}$ (Ebenen $\eta_o^{(e)} = \varphi_o^{(k)}$) beträgt hiernach $\frac{10.\,96}{4} = 240$, während es $10.\,16 = 160$ ebenfalls durchweg imaginäre Geraden k_o (zweiter Art) giebt.

Auf jeder Fundamentalfläche schneiden die acht Geraden k_o des einen diejenigen des anderen Systems in $8^2 = 64$ Punkten (liegen in 64 Ebenen), welche für je eine Gerade k_o Hexaederpunkte $\mathfrak{h}_o^{(k)}$ (Oktaederebenen $\eta_o^{(k)}$) sind. Diese 64 Punkte $\mathfrak{h}_o^{(k)}$ (Ebenen $\eta_o^{(k)}$) sind aber nichts anderes, als die 64 Punkte $\mathfrak{k}_o$ (Berührungsebenen $\varkappa_o$), in welchen (vgl. § 1) die betrachtete Fundamentalfläche von 32 Geraden k geschnitten wird (durch 32 Gerade k gehende Berührungsebenen hat). Die Gesammtzahl dieser Punkte $\mathfrak{k}_o = \mathfrak{h}_o^{(k)}$ (Ebenen $\varkappa_o = \eta_o^{(k)}$) beträgt $10.\,64 = 640$.

2) Die 12 Kubooktaederpunkte (Rhombendodekaederebenen) jeder Geraden e_o sind die sechs Punkt-(Ebenen-)Paare, deren jedes zu drei solchen Paaren $\mathfrak{e}_o$ (ε_o) zugleich harmonisch ist, von welchen das eine eins der drei Oktaederpunkt-(Hexaederebenen-)Paare ist, während je ein Element des zweiten Paares mit einem des dritten Paares vertauscht ist. Die Zahl dieser Punkte (Ebenen), welche durch $\mathfrak{i}_o^{(e)}$ ($\iota_o^{(e)}$) bezeichnet werden sollen, beträgt $12.\,12 = 144$ für jede Fundamentalfläche. Je sechs entsprechende (durch denselben Werth des Parameters bestimmte) derartige Punkte (Ebenen) der sechs Geraden e_o des ersten und ebenso des zweiten Systems liegen auf (schneiden sich in) einer Geraden d_o, so dass zwölf weitere Erzeugungslinien des ersten und zwölf des zweiten Systems entstehen. Eine jede dieser $2.\,12$ Geraden d_o enthält sechs Punkte $\mathfrak{i}_o^{(e)}$ (Ebenen $\iota_o^{(e)}$), welche wiederum für diese Gerade Oktaederpunkte (Hexaederebenen) sind und daher auch durch $\mathfrak{f}_o^{(d)}$ ($\varphi_o^{(d)}$) bezeichnet werden können. Jeder dieser Punkte $\mathfrak{i}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(d)}$ (jede der Ebenen $\iota_o^{(e)} = \varphi_o^{(d)}$) gehört wiederum zugleich den vier Fundamentalflächen an, welche durch die zugehörige Gerade e_o hindurchgehen;

es gehen also durch jeden Punkt $\mathfrak{i}^{(e)}_{o} = \mathfrak{f}^{(d)}_{o}$ $\left(\text{liegen in jeder Ebene } \iota^{(e)}_{o} = \varphi^{(d)}_{o}\right)$ vier Gerade d_o. Der imaginären Fläche $F^{(1)}_{1}$ gehören 144 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } \iota^{(e)}_{o}\right)$ und 24 imaginäre Gerade d_o an, jeder der neun reellen Flächen $F^{(1)}_{2} - F^{(1)}_{10}$ je 32 reelle und 112 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } \iota^{(e)}_{o}\right)$ und je acht reelle und 16 imaginäre Gerade d_o an. Die Gesammtzahl dieser Punkte (Ebenen) beträgt also $\frac{1.\,144 + 9\,(32 + 112)}{4} = 360$, von denen 72 reell, 288 imaginär sind, diejenige der Geraden d_o beträgt 1. 24+9. (16+8) = 240, von welchen 72 reell, 168 imaginär sind.

Die zwölf Geraden d_o des einen Systems schneiden auf jeder Fundamentalfläche die zwölf Geraden des anderen Systems in $12^2 = 144$ Punkten (liegen in 144 Ebenen), welche für je eine Gerade d_o Kubooktaederpunkte $\mathfrak{i}^{(d)}_{o}$ $\left(\text{Rhombendodekaederebenen } \iota^{(d)}_{o}\right)$ darstellen. Diese 144 Punkte $\mathfrak{i}^{(d)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } \iota^{(d)}_{o}\right)$ sind identisch mit den 144 Punkten $\mathfrak{d}_o$ (Berührungsebenen δ_o), welche die Schnittpunkte der (die Berührungsebenen durch die) 2. 36 Geraden d mit der betrachteten (an die) Fundamentalfläche (vgl. § 1) sind.

Endlich schneiden sich (bestimmen) auf jeder Fundamentalfläche je eine der acht Geraden k_o des ersten bez. zweiten Systems und je eine der zwölf Geraden d_o des zweiten bez. ersten Systems in je einem Punkte (je eine Verbindungsebene), so dass für jede Gerade k_o zwölf Punkte $\mathfrak{i}^{(k)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } \iota^{(k)}_{o}\right)$, welche Kubooktaederpunkte (Rhombendodekaederebenen) derselben sind, auf jeder Geraden d_o acht Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } (^{(d)}_{o}\right)$, welche Hexaederpunkte (Oktaederebenen) derselben sind, auftreten. Auf jeder Fundamentalfläche sind 12. 16 = 8. 24 = 192 solcher Punkte $\mathfrak{i}^{(k)}_{o} = \mathfrak{h}^{(d)}_{o}$ $\left(\text{Ebenen } \iota^{(k)}_{o} = (^{(d)}_{o}\right)$ vorhanden; die Gesammtzahl derselben, welche durchweg imaginär sind, beträgt 10. 192 = 1920, da jeder Punkt (jede Ebene) nur einer F.-Fläche angehört.

Es sind also auf jeder Fundamentalfläche sechs Gerade e_o, acht Gerade k_o, zwölf Gerade d_o als Erzeugende des einen Systems vorhanden,

welche von den sechs Geraden e_o, acht Geraden k_o, zwölf Geraden d_o des anderen Systems bezw. in sechs Oktaederpunkten, acht Hexaederpunkten, zwölf Kubooktaederpunkten geschnitten werden (sechs Hexaederebenen, acht Oktaederebenen, zwölf Rhombendodekaederebenen bestimmen). Die 2. 6 Geraden e_o, 2. 8 Geraden k_o, 2. 12 Geraden d_o sollen bez. als Oktaeder-, Hexaeder-, Kubooktaeder-Gerade der Fundamentalfläche und die durch sie bestimmte Eintheilung der Fläche als regelmässige kubo-oktaedrische Eintheilung bezeichnet werden.

Auf jeder (durch jede) der Geraden e_o, k_o, d_o giebt es sechs Oktaeder-, acht Hexaeder-, zwölf Kubooktaeder-Punkte (gehen sechs Hexaeder-, acht Oktaeder-, zwölf Rhombendodekaeder-Ebenen), so dass auf jeder Fundamentalfläche vorhanden sind:

$$\left.\begin{array}{lll}
6^2 = 36 & \text{Punkte } \mathfrak{e}_o = \mathfrak{f}_o^{(e)} & \left(\text{Ebenen } \varepsilon_o = \varphi_o^{(e)}\right) \\
8^2 = 64 & \text{,,} \quad \mathfrak{k}_o = \mathfrak{h}_o^{(k)} & \left(\text{,,} \quad \varkappa_o = (_o^{(k)}\right) \\
12^2 = 144 & \text{,,} \quad \mathfrak{d}_o = \mathfrak{i}_o^{(d)} & \left(\text{,,} \quad \delta_o = \iota_o^{(d)}\right) \\
8.\ 12 = 6.\ 16 = 96 & \text{,,} \quad \mathfrak{h}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(k)} & \left(\text{,,} \quad (_o^{(e)} = \varphi_o^{(k)}\right) \\
12.\ 12 = 6.\ 24 = 144 & \text{,,} \quad \mathfrak{i}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(d)} & \left(\text{,,} \quad \iota_o^{(e)} = \varphi_o^{(d)}\right) \\
12.\ 16 = 8.\ 24 = 192 & \text{,,} \quad \mathfrak{i}_o^{(k)} = \mathfrak{h}_o^{(d)} & \left(\text{,,} \quad \iota_o^{(k)} = (_o^{(d)}\right).
\end{array}\right\} \ldots (4)$$

Durch die jeder F-Fläche angehörigen Punkte, Gerade und Ebenen sind folgende Configurationen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{llll}
\left(36_2^{11},\ 12_6^{6},\ 36_{11}^{2}\right), & \text{Cf.-Punkte } \mathfrak{e}_o = \mathfrak{f}_o^{(e)} & \text{Cf.-Ebenen } \varepsilon_o = \varphi_o^{(e)}, & \text{Cf.-Gerade } e_o{}^{1)} \ldots (5\alpha) \\
\left(64_2^{15},\ 16_8^{8},\ 64_{15}^{2}\right), & \text{,,} \quad \mathfrak{k}_o = \mathfrak{h}_o^{(k)}, & \text{,,} \quad \varkappa_o = (_o^{(k)}, & \text{,,} \quad k_o{}^{2)} \ldots (5\beta) \\
\left(144_2^{23},\ 24_{12}^{12},\ 144_{23}^{2}\right), & \text{,,} \quad \mathfrak{d}_o = \mathfrak{i}_o^{(d)}, & \text{,,} \quad \delta_o = \iota_o^{(d)}, & \text{,,} \quad d_o{}^{3)} \ldots (5\gamma) \\
\left(96_{1+1}^{13},\ 12_8^{8} + 16_6^{6},\ 96_{13}^{1+1}\right), & \text{,,} \quad \mathfrak{h}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(k)}, & \text{,,} \quad (_o^{(e)} = \varphi_o^{(k)}, & \text{,,} \quad e_o \text{ u. } k_o \ldots (5\delta) \\
\left(144_{1+1}^{17},\ 12_{12}^{12} + 24_6^{6},\ 144_{17}^{1+1}\right), & \text{,,} \quad \mathfrak{i}_o^{(e)} = \mathfrak{f}_o^{(d)}, & \text{,,} \quad \iota_o^{(e)} = \varphi_o^{(d)}, & \text{,,} \quad d_o \text{ ,, } e_o \ldots (5\varepsilon) \\
\left(192_{1+1}^{19},\ 16_{12}^{12} + 24_8^{8},\ 192_{19}^{1+1}\right), & \text{,,} \quad \mathfrak{i}_o^{(k)} = \mathfrak{h}_o^{(d)}, & \text{,,} \quad \iota_o^{(k)} = (_o^{(d)}, & \text{,,} \quad k_o \text{ ,, } d_o \ldots (5\zeta).
\end{array}\right\} \ldots (5)$$

1) Vgl. A_1 S. 158 unter (44). 2) Vgl. A_1 S. 159 unter (48). 3) Vgl. A_1 S. 162 unter (54).

Der analytische Nachweis der im Obigen erörterten Lagenbeziehungen kann leicht in folgender Weise geführt werden, wobei wir uns auf die Bestimmung der Punkte auf den Graden beschränken können.

Aus den Werthen für die tetraedrischen Coordinaten der einer Fundamentalfläche $F_i^{(1)}$ angehörigen 36 Punkte $\mathfrak{e}_o$, 64 Punkte $\mathfrak{k}_o$, 144 Punkte $\mathfrak{d}_o$ (den bez. Schnittpunkten von 18 Geraden e, 32 Geraden k und 72 Geraden d mit dieser F.-Fläche) ergiebt sich, dass je 6 Punkte $\mathfrak{e}_o$ auf einer Erzeugungslinie e_o, je 8 Punkte $\mathfrak{k}_o$ auf einer Erzeugungslinie k_o und je 12 Punkte $\mathfrak{d}_o$ auf einer Erzeugungslinie d_o je eines der beiden Systeme liegen. Die Werthe für die Klein'schen Coordinaten x_i dieser Erzeugungslinien stellen sich äusserst einfach und übersichtlich dar; die Coordinaten $x_1, x_2 \dots x_6$ irgend einer Geraden:

$$\left.\begin{array}{llllllll} e_0 & \text{sind durch} & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 & \quad " \quad " & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ d_0 & \quad " \quad " & 1 & 1 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dots\dots\dots (6_e) \\ \dots\dots\dots (6_k) \\ \dots\dots\dots (6_l) \end{array}$$

bestimmt, wobei α eine imaginäre Kubikwurzel der Einheit bedeutet, und alle Geraden derselben Gruppe durch Permutation dieser 6 Werthe, versehen mit den möglichen Vorzeichencombinationen resultiren. Es giebt hiernach $\frac{1}{2} \cdot \frac{6!}{4!} 2^1 = 30$ Gerade e_0, $\frac{1}{3} \cdot \frac{6!}{3!} 2^2 = 160$ Gerade k_0 und $\frac{6!}{3!\,2!} 2^2 = 240$ Gerade d_0, da für die Geraden e_0 eine Multiplication der Coordinatenwerthe mit i, für die Geraden k_0 eine solche mit α und α^2 wiederum je eine Permutation derselben Elemente liefert. Für die einer Fundamentalfläche als Erzeugende angehörenden Graden sind, wenn die Gleichung der F.-Fläche in Klein'schen Liniencoordinaten[1]):

$$x^2_{i1} + x^2_{i2} + x^2_{i3} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2_{i4} + x^2_{i5} + x^2_{i6} = 0 \text{ ist,}$$

die Coordinaten x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} (x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}) der Geraden des ersten (zweiten) Systems sämmtlich Null, dagegen die Coordinaten x_{i4}, x_{i5}, x_{i6} (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) der ersten (zweiten) Gruppe für die Geraden e_0, k_0, d_0 bez. durch die mit den Vorzeichencombinationen versehenen Permutationen der drei Werthe

$$1,\ i,\ 0;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2;\ 1,\ 1,\ i\sqrt{2} \text{ gegeben.}$$

1) Vgl. A_I. § 5.

Wenn man nun aus den Klein'schen Coordinaten x_i (vergl. Formel (2 β) in § 1) die Plücker'schen Coordinaten p_{ik} der Erzeugungslinien e_0, k_0, d_0 einer Fundamentalfläche herleitet, so lassen sich die tetraedrischen Coordinaten

der $12.8 = 16.6 = 96$ Schnittpunkte von je 6 Geraden e_0 des einen mit je 8 Geraden k_0 des anderen Systems,

der $12.12 = 24.6 = 144$ Schnittpunkte von je 12 Geraden d_0 des einen mit je 6 Geraden e_0 des anderen Systems,

der $16.12 = 24.8 = 192$ Schnittpunkte von je 8 Geraden k_0 des einen mit je 12 Geraden d_0 des anderen Systems

leicht bestimmen. Aus den Plücker'schen Coordinaten p_{ik} ist auch sofort zu erkennen, dass

von den 30 Geraden e_0 18 reell, 12 imaginär (der 2^{ten} Art),
„ „ 240 „ d_0 72 „ 168 „ „ „ ,
die 160 „ k_0 sämmtlich imaginär (der 2^{ten} Art) sind.

Es ist dann andererseits zu zeigen, dass die auf jeder Erzeugungslinie e_0, k_0, d_0 auftretenden 6, 8, 12 Schnittpunkte bez. Oktaeder-, Hexaeder-, Kubooktaeder-Punkte derselben sind. Dies geschieht in bekannter Weise[1]) dadurch, dass man zunächst die 3 Punktpaare jeder Geraden den Wurzeln einer Oktaedergleichung:

$$F \equiv \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1^4 - \zeta_4^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

entsprechend nachweist: hierbei sind die Coordinaten $z_k = \zeta_1 z'_k + \zeta_2 z''_k$ der 6 Punkte durch die Werthe

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = o, \infty; 1, -1; i, -i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

des Parameters bestimmt.

Die Wurzeln der zugehörigen Hexaedergleichung:

$$H \equiv \zeta_1^8 + 14 \zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_2^8 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

welche durch Nullsetzen der Hesse'schen Determinante von F resultirt, nämlich

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \pm j c_1, \pm \frac{1}{j} c_1, \pm j c_2, \pm \frac{1}{j} c_2, \quad \ldots\ldots \quad (8a)$$

[1]) Vgl. F. Klein, Math. Ann. IX S. 196 flg. — Puchta, Das Oktaeder etc. Denkschriften der Wiener Akademie 1879, S. 58 flg. — Gordan, Math. Ann. XII. S. 41, 42. — E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung S. 393 flg.

$$\text{wobei } j = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{j} = \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (8\beta)$$

$$c_1 = \operatorname{cotg}\frac{\eta}{2} = 2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ c_2 = \operatorname{tg}\frac{\eta}{2} = 2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}\eta = \sqrt{2},\ c_1^2 = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12},\ c_2^2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \ \dots \ (8\gamma)$$

ist, bestimmen die 8 zugehörigen Hexaederpunkte; und endlich die Wurzeln der Kubooktaedergleichung, welche durch Nullsetzen der Jacobischen Determinante von F und H resultirt:

$$J \equiv \zeta_1^{12} - 33\,\zeta_1^8\,\zeta_2^4 - 33\,\zeta_1^4\,\zeta_2^8 + \zeta_2^{12} = 0, \quad \dots\dots \quad (9)$$

$$\text{nämlich: } \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \pm j,\ \pm\frac{1}{j},\ \pm\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8},\ \pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{8},\ \pm i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8},\ \pm i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \quad \dots\dots \quad (9\alpha)$$

$$\text{wo } \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9\beta)$$

ist, bestimmen die 12 zugehörigen Kubooktaederpunkte.

Die so erhaltenen Werthe für die Coordinaten dieser 8 und 12 Punkte erweisen sich dann in der That mit den oben bestimmten Coordinaten der bezüglichen Schnittpunkte identisch.

Als Beispiel sind in nachfolgender Zusammenstellung (10α) — (10γ) für die drei der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ als Erzeugende des einen Systems angehörigen Geraden, nämlich:

für die Geraden e_0 mit den x_i-Coordinaten	0	0	1	0	i	0	
„ „ „ k_0 „ „ „ „	1	0	α	0	α^2	0	
„ „ „ d_0 „ „ „ „	$i\sqrt{2}$	0	1	0	-1	0	

die tetraedrischen Coordinaten für die 6 Oktaeder-, die 8 Hexaeder- und die 12 Kubooktaeder-Punkte nebst den zugehörigen Werthen des Parameters $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ angegeben.

Parameterwerthe für $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$	Coordinaten der Octaeder-Punkte der Geraden e_0; Punkte $\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{f}^{(e)}_0$ [1]				der Geraden k_0; Punkte $\mathfrak{f}^{(k)}_0 = \mathfrak{h}^{(e)}_0$				der Geraden d_0; Punkte $\mathfrak{f}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(e)}_0$			
0	1	i	0	0	1	i	$-\frac{1}{j}c_2$	jc_2	1	i	$\frac{1}{j}$	$-j$
∞	0	0	1	i	jc_2	$\frac{1}{j}c_2$	i	-1	j	$\frac{1}{j}$	$-i$	1
1	1	i	1	i	1	jc_2	i	$-\frac{1}{j}c_2$	1	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-i$	$-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$
-1	1	i	-1	$-i$	1	$-\frac{1}{j}c_1$	$-i$	jc_1	1	$-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	i	$-i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$
i	1	i	i	-1	1	jc_1	$-\frac{1}{j}c_1$	$-i$	1	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$-i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	i
$-i$	1	i	$-i$	1	1	$-\frac{1}{j}c_2$	jc_2	i	1	$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-i$

(10α)

Parameterwerthe für $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ [2]	Coordinaten der Hexaeder-Punkte der Geraden e_0; Punkte $\mathfrak{h}^{(e)}_0 = \mathfrak{f}^{(k)}_0$				der Geraden k_0; Punkte $\mathfrak{h}^{(k)}_0 = \mathfrak{k}_0$ [3]				der Geraden d_0; Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(k)}_0$			
jc_1	1	i	jc_1	$-\frac{1}{j}c_1$	1	1	$i\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-i$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$\alpha\sqrt{2}-i$
$-jc_1$	1	i	$-jc_1$	$\frac{1}{j}c_1$	1	-1	1	$i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-i$	$-\sqrt{3}$	$\alpha\sqrt{2}-i$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$
$\frac{1}{j}c_2$	1	i	$\frac{1}{j}c_2$	jc_2	$-i\sqrt{3}$	1	1	1	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$	$\alpha\sqrt{2}-i$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-i$
$-\frac{1}{j}c_2$	1	i	$-\frac{1}{j}c_2$	$-jc_2$	1	$i\sqrt{3}$	-1	1	$\alpha\sqrt{2}-i$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$-(\sqrt{2}-i)$	$-\sqrt{3}$
jc_2	1	i	jc_2	$-\frac{1}{j}c_2$	1	$-\alpha^2$	α	0	$\sqrt{2}-i$	$\sqrt{3}$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$\alpha\sqrt{2}-i$
$-jc_2$	1	i	$-jc_2$	$\frac{1}{j}c_2$	1	α	0	$-\alpha^2$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-i$	$\alpha\sqrt{2}-i$	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$
$\frac{1}{j}c_1$	1	i	$\frac{1}{j}c_1$	jc_1	1	0	$-\alpha^2$	α	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$\alpha\sqrt{2}-i$	$-(\sqrt{2}-i)$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{1}{j}c_1$	1	i	$-\frac{1}{j}c_1$	$-jc_1$	0	1	α	α^2	$\alpha\sqrt{2}-i$	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$	$\sqrt{3}$	$-(\sqrt{2}-i)$

(10β)

[1]) Diese 6 Punkte sind die in A_1 § 2 unter (2β) mit bez. $\mathfrak{e}_{27}$, $\mathfrak{e}_{26}$, $\mathfrak{e}_{53}$, $\mathfrak{e}_{54}$, $\mathfrak{e}_{48}$, $\mathfrak{e}_{47}$ bezeichneten Punkte.

[2]) Den vier ersten Werthen des Parameters entsprechen die Punkte des einen, den vier anderen die Punkte des zweiten Tetraeders, in welche das Hexaeder zerlegt werden kann.

[3]) Vgl. A_1 § 11 unter (46).

Parameterwerthe für $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$	Coordinaten der Kubooktaeder-Punkte der Geraden e_0; Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$				der Geraden k_0; Punkte $\mathfrak{i}_0^{(k)} = \mathfrak{h}_0^{(d)}$				der Geraden d_0; Punkte $\mathfrak{i}_0^{(d)} = \mathfrak{d}_0$ [1]			
j	1	i	j	$-\frac{1}{j}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+i$	$\alpha\sqrt{2}+i$	$\alpha^2\sqrt{2}+i$	1	$1-i\sqrt{2}$	0	
$-j$	1	i	$-j$	$\frac{1}{j}$	$\sqrt{3}$	$-(\sqrt{2}-i)$	$-(\alpha\sqrt{2}-i)$	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$	-1	1	0	$i\sqrt{2}$
$\frac{1}{j}$	1	i	$\frac{1}{j}$	j	$-(\alpha\sqrt{2}+i)$	$-\alpha^2\sqrt{2}+i)$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+i$	$i\sqrt{2}$	0	1	1
$-\frac{1}{j}$	1	i	$-\frac{1}{j}$	$-j$	$\alpha\sqrt{2}-i$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$\sqrt{3}$	$-(\sqrt{2}-i)$	0	$i\sqrt{2}$	1	-1
$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$\sqrt{3}$	$-(\alpha\sqrt{2}-i)$	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$	$-(\sqrt{2}-i)$	$1+i\sqrt{2}$	1	$1-i\sqrt{2}$	1
$-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$-i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$-(\alpha^2\sqrt{2}+i)$	$-(\sqrt{2}+i)$	$\sqrt{3}$	$\alpha\sqrt{2}+i$	-1	$1+i\sqrt{2}$	1	$1-i\sqrt{2}$
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$\sqrt{2}-i$	$\sqrt{3}$	$-(\alpha\sqrt{2}-i)$	$1-i\sqrt{2}$	1	$-(1+i\sqrt{2})$	-1
$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$\sqrt{3}$	$\alpha\sqrt{2}+i$	$\alpha^2\sqrt{2}+i$	$\sqrt{2}+i$	1	$-(1-i\sqrt{2}$	1	$-(1+i\sqrt{2})$
$i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$\alpha^2\sqrt{2}+i$	$-\sqrt{3}$	$\alpha\sqrt{2}+i$	$\sqrt{2}+i$	1	$1-i\sqrt{2}$	$-(1+i\sqrt{2})$	1
$-i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$-i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$	$-(\sqrt{2}-i)$	$-(\alpha\sqrt{2}-i)$	$-\sqrt{3}$	$\alpha^2\sqrt{2}-i$	$-(1-i\sqrt{2})$	1	1	$1+i\sqrt{2}$
$i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$\sqrt{2}+i$	$\alpha\sqrt{2}+i$	$-\sqrt{3}$	$-(\alpha^2\sqrt{2}+i)$	1	$1+i\sqrt{2}$	$1-i\sqrt{2}$	-1
$-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	1	i	$-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$	$-(\alpha^2\sqrt{2}-i)$	$-\sqrt{3}$	$-(\alpha\sqrt{2}-i)$	$-(\sqrt{2}-i)$	$1+i\sqrt{2}$	-1	1	$1-i\sqrt{2}$

(10γ)

§ 3.

Zusammenstellung der Coordinatenwerthe für die bisher erhaltenen Geraden, Punkte und Ebenen.

Mit Rücksicht auf die nachher folgenden Anwendungen sind in den Zusammenstellungen (11) und (12) die analytischen Ausdrücke für die bisher betrachteten Geraden, Punkte und Ebenen angegeben.

Die Tabelle (11) enthält die Klein'schen x_i-Coordinaten für je eine der Geraden e_0, k_0, d_0, k, d nebst der Gesammtzahl derselben, welche durch Permutation dieser Werthe und Hinzufügung der Vorzeichen-Combinationen hervorgehen.

[1]) Vgl. A_1 § 11 unter (51).

Gerade	x_i-Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär	
e_0 oder e	$1\ i\ 0\ 0\ 0\ 0$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{6!}{4!}\,2^1 = 30$	18	12 . . . (11α)	(11)
k_0	$1\ \alpha\ \alpha^2\ 0\ 0\ 0$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{6!}{3!}\,2^2 = 160$	—	160 . . . (11β)	
d_0	$i\sqrt{2}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$	$\frac{6!}{3!\ 2!}\,2^2 = 240$	72	168 . . . (11γ)	
k	$1\ 1\ 1\ i\ i\ i$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{6!}{3!\ 3!}\,2^5 = 320$	32	288 . . . (11δ)	
d	$1\ 1\ i\ i\ 0\ 0$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{6!}{2!\ 2!\ 2!}\,2^3 = 360$	72	288 . . . (11ε)	

In den Tabellen (12) sind die tetraedrischen Coordinaten der Punkte (Ebenen) $\mathfrak{e}$ oder $\mathfrak{e}_0$ (ε oder ε_0), $\mathfrak{k}_0$ ($\varkappa_0$), $\mathfrak{d}_0$ (δ_0), $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(k)}$ ($(_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$), $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ ($\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$), $\mathfrak{h}_0^{(d)} = \mathfrak{i}_0^{(k)}$ ($(_0^{(d)} = \iota_0^{(\varkappa)}$), sowie auch der Punkte (Ebenen) $\mathfrak{k}$ ($\varkappa$) und $\mathfrak{d}$ (δ) nebst der Gesammtzahl der durch Permutation der Coordinatenwerthe und Hinzufügung der Vorzeichencombinationen hervorgehenden aufgeführt. Die Coordinaten der reellen Punkte (Ebenen) sind mit Rücksicht auf spätere Anwendungen mit einem solchen Factor multiplicirt, dass ihre Quadratsumme = 1 wird.

60 Punkte $\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_0^{(e)}$ (Ebenen $\varepsilon = \varphi_0^{(e)}$) (24 reell, 36 imaginär). [1]				
Punkt-(Ebenen-)Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär	
$1\ 0\ 0\ 0$	$\frac{4!}{3!}\,2^1$	4	—	(12α)
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{4!}{4!}\,2^3$	8	—	
$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0$	$\frac{4!}{2!\ 2!}\,2^1$	12	—	
$1\ i\ 0\ 0$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4!}{2!}\,2^1$	—	12	
$1\ 1\ i\ i$	$\frac{1}{2}\,\frac{4!}{2!\ 2!}\,2^3$	—	24	

[1]) Vgl. A_1 § 2. Formeln (2α) und (2β).

640 Punkte $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{h}_0^{(k)}$ (Ebenen $\varkappa_0 = \zeta_0^{(k)}$ (sämmtlich imaginär).[1]

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär	
$i\sqrt{3}$ 1 1 1	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^3$	—	32	(12β)
0 1 α α^2	$\frac{1}{3} \cdot 4!\ 2^2$	—	32	
i $\sqrt{3}$ 1 1	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96	
0 i α α^2	$4!\ 2^2$	—	96	
1 1 $\frac{1}{j}c_1$ jc_2	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96	
1 1 jc_1 jc_2	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96	
1 i jc_1 jc_2	$4!\ 2^3$	—	192	

1440 Punkte $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{i}_0^{(d)}$ (Ebenen $\delta_0 = \iota_0^{(d)}$) (144 reell, 1296 imaginär).[2]

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär	
0 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4!}{2!} 2^2$	48	—	(12γ)
$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	96	—	
0 $i\sqrt{2}$ 1 1	$\frac{4!}{2!} 2^2$	—	48	
1 1 $1+i\sqrt{2}$ $1-i\sqrt{2}$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96	
0 $\sqrt{2}$ 1 i	$4!\ 2^2$	—	96	
1 j $i(\sqrt{2}+1)$ $\frac{1}{j}(\sqrt{2}+1)$	$4!\ 2^3$	—	192	
1 $\frac{1}{j}$ $i(\sqrt{2}-1)$ $j(\sqrt{2}-1)$	$4!\ 2^3$	—	192	
1 1 j $\frac{1}{j}$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96	
1 i $\sqrt{2}-i$ $1-i\sqrt{2}$	$4!\ 2^3$	—	192	
1 i $\sqrt{2}+1$ $i(\sqrt{2}+1)$	$4!\ 2^3$	—	192	
1 j $\sqrt{2}+1$ $j(\sqrt{2}+1)$	$4!\ 2^3$	—	192	

[1] Vgl. A_1 § 11. I. Formeln (46). [2] Vgl. A_1 § 11. II. Formeln (51α)—(51δ).

240 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(k)}$ (Ebenen $\eta_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$) (sämmtlich imaginär).

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten				Gesammtzahl	Reell	Imaginär
1	jc_1	0	0	$\frac{4!}{2!}\, 2^1$	—	24
1	jc_2	0	0	$\frac{4!}{2!}\, 2^1$	—	24
1	1	jc_2	jc_2	$\frac{4!}{2!\,2!}\, 2^3$	—	48
1	1	jc_1	jc_1	$\frac{4!}{2!\,2!}\, 2^3$	—	48
1	i	jc_2	$\frac{1}{j} c_2$	$\frac{1}{2} \cdot 4!\; 2^3$	—	96

(12δ)

360 Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(d)}$ (Ebenen $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$) (72 reell, 288 imaginär).

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten				Gesammtzahl	Reell	Imaginär
$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{3/4}}$	0	0	$\frac{4!}{2!} \cdot 2^1$	24	—
$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{5/4}}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{5/4}}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{5/4}}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{5/4}}$	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^3$	48	—
1	$i(\sqrt{2}+1)$	0	0	$\frac{4!}{2!}\, 2^1$	—	24
1	j	0	0	$\frac{4!}{2!} \cdot 2^1$	—	24
1	i	j	$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{4} \cdot 4!\; 2^3$	—	48
1	1	$i(\sqrt{2}+1)$	$i(\sqrt{2}+1)$	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^3$	—	48
1	1	$i(\sqrt{2}-1)$	$i(\sqrt{2}-1)$	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^3$	—	48
1	i	$\sqrt{2}+1$	$i(\sqrt{2}+1)$	$\frac{1}{2} \cdot 4!\; 2^3$	—	96

(12ε)

1920 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(d)} = \mathfrak{i}_0^{(k)}$ (Ebenen $(_0^{(d)} = \iota_0^{(k)})$ (sämmtlich imaginär).

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär
$\sqrt{3}\quad \sqrt{2}+i\quad \alpha\sqrt{2}+i\quad \alpha^2\sqrt{2}+i$ [1]	$4!\ 2^3$	—	192
$\sqrt{3}\quad \sqrt{2}+i\quad i(\alpha\sqrt{2}+i)\quad i(\alpha^2\sqrt{2}+i)$	$4!\ 2^3$	—	192
$\sqrt{3}\quad i(\sqrt{2}+i)\quad \alpha\sqrt{2}+i\quad i(\alpha^2\sqrt{2}+i)$	$4!\ 2^3$	—	192
$\sqrt{3}\quad i(\sqrt{2}+i)\quad i(\alpha\sqrt{2}+i)\quad \alpha^2\sqrt{2}+i$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad c_2\quad \frac{1}{j}\quad jc_2$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad c_1\quad \frac{1}{j}\quad jc_1$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad \sqrt{2}+1\quad jc_2\quad j(\sqrt{2}+1)c_2$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad \sqrt{2}+1\quad jc_1\quad j(\sqrt{2}+1)c_1$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad i(\sqrt{2}+1)\quad jc_2\quad \frac{1}{j}(\sqrt{2}+1)c_2$	$4!\ 2^3$	—	192
$1\quad i(\sqrt{2}+1)\quad jc_1\quad \frac{1}{j}(\sqrt{2}+1)c_1$	$4!\ 2^3$	—	192

(12ζ)

480 Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) (sämmtlich imaginär). [2]

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten	Gesammtzahl	Reell	Imaginär
$i\quad 1\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{3!}\ 2^3$	—	32
$1+2i\quad 1\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{3!}\cdot 2^3$	—	32
$1-2i\quad 1\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{3!}\cdot 2^3$	—	32
$0\quad 1+i\quad i\quad 1$	$4!\ 2^2$	—	96
$0\quad 1+i\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{2!}\cdot 2^2$	—	48
$0\quad 1-i\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{2!}\cdot 2^2$	—	48
$2+i\quad i\quad 1\quad 1$	$\frac{4!}{2!}\cdot 2^3$	—	96
$2-i\quad i\quad 1\quad 1$	$\frac{2!}{4!}\ 2^3$	—	96

(12η)

[1]) Diese Coordinatenwerthe können durch Multiplication mit demselben Factor noch auf verschiedene, für gewisse Anwendungen geeignete Formen gebracht werden; z. B. diejenigen der ersten Gruppe $\sqrt{3}\quad \sqrt{2}+i\quad \alpha\sqrt{2}+i\quad \alpha^2\sqrt{2}+i$ auf die Formen

$$\sqrt{2}-i\quad \sqrt{3}\quad -(\alpha^2\sqrt{2}-i)\quad \alpha\sqrt{2}-i$$

oder $\alpha\sqrt{2}-i\quad \alpha^2\sqrt{2}+i\quad -i\quad \sqrt{3}-\sqrt{2}$

oder $\alpha^2\sqrt{2}-i\quad -(\alpha\sqrt{2}+i)\quad \sqrt{3}+\sqrt{2}\quad i$ u. s. w.

[2]) Vgl. A_1 § 9 unter (34α) und (34β).

960 Punkte $\mathfrak{d}$ (Ebenen δ) (96 reell, 864 imaginär). [1]

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten				Gesammtzahl	Reell	Imaginär
0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^2$	16	—
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{4!}{3!} 2^3$	32	—
0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{4!}{2!} 2^2$	48	—
0	i	1	1	$\frac{4!}{2!} 2^2$	—	48
0	$2i$	1	1	$\frac{4!}{2!} 2^2$	—	48
0	1	2	i	$4!\, 2^2$	—	96
1	1	i	$3i$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96
1	1	$1+2i$	$1-2i$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96
2	2	$1+i$	$1-i$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96
1	1	$1+i$	$1-i$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96
1	1	$2+i$	$2-i$	$\frac{4!}{2!} 2^3$	—	96
1	i	$1+2i$	$2+i$	$4!\, 2^3$	—	192

(12ϑ)

§ 4.
Ferner in Betracht kommende Verbindungsgerade (Schnittlinien), Schnittpunkte und Verbindungsebenen.

Von Verbindungsgeraden (Schnittlinien) der unter (12) aufgeführten Punkte (Ebenen) sind für die folgenden Untersuchungen zu berücksichtigen:

1) 480 Gerade h, welche je zwei der 240 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(k)}$ (vgl. (12δ)) verbinden (Schnittlinien je zweier Ebenen $\epsilon_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$ sind) und daher auch durch $e^{(k)} = k^{(e)}$ bezeichnet werden sollen. Die x_i-Coordinaten derselben sind durch

$$i\sqrt{3} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad (13a)$$

bestimmt, sodass die Gesammtzahl $\frac{6!}{2!\,3!} \cdot 2^3 = 480$ beträgt.

[1]) Vgl. A_1 § 10 unter (38) und (42α) und (42β).

Unter diesen 480 Graden $e^{(k)} = k^{(e)}$ sind 48 reelle mit den Coordinaten

$$1 \pm i\sqrt{3} \pm 1 \quad 0 \pm 1 \quad 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{3} \pm i \quad 0 \pm i \quad 0 \pm i, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13\alpha_1)$$

welche je zwei conjugirt imaginäre Punkte $\mathfrak{h}^{(e)}_0 = \mathfrak{k}^{(k)}_0$ der Fläche $F^{(1)}_1$ verbinden (Schnittlinien je zweier conjugirt imaginären Berührungsebenen $({}^{(e)}_0 = \varphi^{(k)}_0$ der Fläche $F^{(1)}_1$ sind); die übrigen 432 Geraden h sind imaginär der zweiten Art. Durch jeden Punkt $\mathfrak{h}^{(e)}_0 = \mathfrak{k}^{(k)}_0$ gehen (in jeder Ebene $({}^{(e)}_0 = \varphi^{(k)}_0$ liegen) 4 Gerade h (ausserdem 4 Gerade k_0 und eine Gerade e); jede Gerade h schneidet die übrigen 6 Fundamentalflächen in je einem Punktpaare, welches den erzeugenden Geraden d_0 dieser Fläche angehört. Ferner schneidet jede Gerade h noch 12 Gerade h in je einem Punkte, welcher zugleich einer Geraden d angehört (solcher Punkte (h, h, d) (resp. Ebenen $[h, h, d]$ giebt es $8 \,.\, 360 = 12 \,.\, \frac{480}{2} = 2880$) und endlich ausserdem noch 24 Gerade h in je einem Punkte (h, h) (bestimmt mit 24 Geraden h je eine Ebene $[h, h]$).

Die Geraden h werden im Folgenden als Erzeugende (Hexaedergerade) der 90 Flächen $F^{(3)}$ (vgl. § 7 unter 3) und als Oktaedergerade der Flächen $F^{(6)}$ und $F^{(7)}$ (vgl. § 7 unter 6) und 7) auftreten.

1a) Die Verbindungslinie je zweier der 360 Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_0 = \mathfrak{k}^{(d)}_0$ (vergl. (12ε)) (z. B. zweier conjugirt imaginären, der Fläche $F_1^{(1)}$ angehörigen Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_0$) ist je eine der 240 Geraden d_0 (vgl. § 2 unter 2) und 6ι)), welche noch weitere 4 Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_0 = \mathfrak{k}^{(d)}_0$ enthält und einer der 10 Fundamentalflächen angehört. Die Geraden d_0 können hiernach auch durch $e^{(d)} = d^{(e)}$ bezeichnet werden.

2) 960 Gerade l, welche je zwei der 1920 Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(k)}_0$ (vgl. (12ζ)) verbinden (Schnittlinien je zweier Ebenen $({}^{(d)}_0 = \iota^{(k)}_0$ sind) und daher auch durch $k^{(d)} = d^{(k)}$ bezeichnet werden sollen. Die x_i-Coordinaten derselben sind durch

$$i\sqrt{3} \quad i\sqrt{3} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13\beta)$$

bestimmt, sodass die Gesammtzahl $\frac{6!}{3!\,2!} \,.\, 2^4 = 960$ beträgt.

Von diesen 960 Geraden $k^{(d)} = d^{(k)}$ sind 96 reell mit den Coordinaten:

$$\sqrt{3} \pm i\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm i\sqrt{2}\ 0\ \pm i\sqrt{2} \text{ und } \sqrt{2} \pm i\sqrt{3} \pm \sqrt{2} \pm i\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\ \ 0, \quad . \quad . \quad . \quad (13\beta')$$

sie sind Verbindungslinien je zweier conjugirt imaginären Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(k)}_0$ (Schnittlinien je zweier conjugirt imaginären Berührungsebenen $(^{(d)}_0 = \iota^{(k)}_0)$ der Fläche $F^{(1)}_1$; die übrigen 864 Geraden l sind imaginär der zweiten Art. Durch jeden Punkt $\mathfrak{h}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(k)}_0$ geht (in jeder Ebene $(^{(d)}_0 = \iota^{(k)}_0$ liegt) je eine Gerade l (ausserdem eine Gerade k_0 und eine Gerade d_0). Jede Gerade l schneidet ausserdem noch 6 Gerade d_0, ferner 6 andere Gerade l in je einem Punkte, welcher zugleich einer Geraden d angehört: solcher Punkte (l, l, d) resp. Ebenen $[l, l, d]$ giebt es $8 \cdot 360 = 6 \cdot \frac{960}{2} = 2880$, und endlich ausserdem noch 24 Gerade l in je einem Punkte (l, l) (bestimmt mit 24 Geraden l je eine Ebene $[l, l]$.

Die Geraden l treten (vgl. § 7 unter 4), 6), 7)) als Erzeugende der Flächen $F^{(4)}$, $F^{(6)}$, $F^{(7)}$ auf.

3) 480 Gerade r, welche je 6 der 1440 Punkte $\mathfrak{d}_0$ (vgl. (12γ)) verbinden (Schnittlinien von je 6 Ebenen δ_0 sind) und deren x_i-Coordinaten durch

$$i\sqrt{2}\ \ i\sqrt{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\gamma)$$

(Gesammtzahl $\frac{6!}{4!\ 2!}\ 2^5 = 480$) bestimmt sind.

Die 480 Geraden r sind sämmtlich imaginär, und zwar giebt es 288 der ersten Art (mit je einem reellen Punkte $\mathfrak{d}_0$) und 192 der zweiten Art. Jede Gerade r berührt 6 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ in je einem Punkte $\mathfrak{d}_0$, durch deren jeden 2 Gerade d_0, 1 Gerade d und 2 Gerade r hindurchgehen, und schneidet die übrigen 4 Fundamentalflächen in $2 \cdot 4 = 8$ Punkten, durch deren jeden drei Gerade t (vgl. unter 7) (13ϑ) dieses §) hindurchgehen.

Ferner schneidet jede Gerade r noch 12 andere Gerade r in je einem Punkte, welcher zugleich einer Geraden d angehört: solcher Punkte (r, r, d) (resp. Ebenen $[r, r, d]$) giebt es $8 \cdot 360 = 12 \cdot \frac{480}{2} = 2880$.

Die Geraden r treten als Erzeugende (Kubooktaedergerade) der 60 Flächen $F^{(2)}$ (vgl. § 7 unter 2)), der 120 Flächen $F^{(5)}$ (§ 7, 5)) und der 480 Flächen $F^{(7)}$ (§ 7, 7)) auf.

4) 3840 Gerade p und zwar

1920 Gerade $p' = | \mathfrak{k}_0 \mathfrak{e} | = | \varkappa_0 \delta |$

und 1920 „ $p'' = | \mathfrak{k}_0 \mathfrak{d} | = | \varkappa_0 \varepsilon |$,

so dass durch jeden Punkt $\mathfrak{k}_0$ (in jeder Ebene $\varkappa_0$) 3 Gerade p' und 3 Gerade p'' als Tangenten an eine Fundamentalfläche $F^{(1)}$, durch jeden Punkt $\mathfrak{e}$ 32 Gerade p' gehen (in jeder Ebene ε 32 Gerade p'' liegen) und durch jeden Punkt $\mathfrak{d}$ 2 Grade p'' hindurchgehen (in jeder Ebene δ 2 Gerade p' liegen). Die x_i-Coordinaten sind durch

$$p' \;\ldots\; 1 \quad -i \quad \alpha \quad -\alpha i \quad \alpha^2 \quad -\alpha^2 i \;\ldots\ldots\ldots\; (13\delta')$$

$$p'' \;\ldots\; 1 \quad i \quad \alpha \quad \alpha i \quad \alpha^2 \quad \alpha^2 i \;\ldots\ldots\ldots\; (13\delta'')$$

bestimmt, woraus sich die Gesammtzahl $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6!\, 2^5 = 3840$ ergiebt.

Von den Geraden p' sind $24 \,.\, 32 = 768$ imaginär der ersten und $36 \,.\, 32 = 1152$ imaginär der zweiten Art, von den Geraden p'' sind $2 \,.\, 96 = 192$ imaginär der ersten und $2 \,.\, 864 = 1728$ imaginär der zweiten Art.

Die weiteren Schnittpunkte einer Geraden p' mit den 9 übrigen Fundamentalflächen, mit anderen Geraden p, sowie die Schnittpunkte einer Geraden p'' mit je 3 Geraden e, 9 Graden d und 15 Geraden k kommen für die folgenden Untersuchungen nicht in Betracht.

5) 720 Gerade q, welche je einen Punkt $\mathfrak{e}$ einer Geraden e mit je einem von vier Punkten $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ der conjugirten Geraden e verbinden (Schnittlinien je einer Ebene ε und einer Ebene $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$ sind). Die x_i-Coordinaten sind durch

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad i \quad j \quad \frac{1}{j} \;\ldots\ldots\ldots\; (13\varepsilon)$$

(Gesammtzahl $\frac{1}{4} \,.\, \frac{6!}{2} \,.\, 2^3 = 720$) bestimmt. Es giebt 432 imaginäre Gerade q erster Art und zwar 144, welche je einen imaginären Punkt $\mathfrak{e}$ und einen reellen Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$, 288, welche je einen reellen Punkt $\mathfrak{e}$ und einen imaginären Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ verbinden, und 288 imaginäre Gerade zweiter Art, welche Verbindungslinien (bez. Schnittlinien) je eines imaginären Punktes $\mathfrak{e}$ (einer imaginären Ebene ε) und eines imaginären Punktes $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ (einer imaginären Ebene $\iota_0^{(e)}$) sind.

Jede Gerade q berührt zwei der sechs Fundamentalflächen $F^{(1)}$ in dem diesen gemeinsamen Punkte $\mathfrak{e}$, während sie die vier übrigen in diesem

Punkte $\mathfrak{e}$ und dem ihr angehörigen Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ schneidet. Durch jeden Punkt $\mathfrak{e}$ gehen 12, durch jeden Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ 2 Gerade q; ferner schneidet jede Gerade q sich noch achtmal mit je einer Geraden q in einem Punkte, durch welchen auch eine Gerade d hindurchgeht (solcher Punkte (q, q, d) bez. Ebenen $[q, q, d]$ giebt es $8 \,.\, 360 = 8 \,.\, \frac{720}{2} = 2880$), und ebenso schneidet jede Gerade q sich noch 16mal mit je 2 Geraden q in einem Punkte, durch welchen auch eine Gerade k hindurchgeht (solcher Punkte (q, q, q, k) bez. Ebenen $[q, q, q, k]$ giebt es $12 \,.\, 320 = 16 \,.\, \frac{720}{3} = 3840$.

Die durch Verbindung eines Punktes $\mathfrak{e}$ einer Geraden e mit den 8 übrigen Punkten $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ der conjugirten Geraden bestimmten Geraden q', deren x_i-Coordinaten sich aus

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad i \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \quad i\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\varepsilon')$$

(Gesammtzahl 1440) ergeben, bieten ähnliche Lagenbeziehungen dar; doch kommen diese Geraden q' für die folgenden Untersuchungen nicht in Betracht.

5a) Auch die Verbindungslinien je eines Punktes $\mathfrak{e}$ mit je einem Punkte $\mathfrak{i}_0^{(d)} = \mathfrak{d}_0$, deren x_i-Coordinaten sich aus

$$1 \quad i \quad 1 \quad i \quad \sqrt{2} \quad i\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\zeta)$$

(Gesammtzahl 2880) ergeben, und welche in den Punkten $\mathfrak{d}_0$ die Fundamentalflächen $F^{(1)}$ berühren, werden bei den nachfolgenden Untersuchungen nicht auftreten.

6) 480 Gerade s, welche je 6 Punkte $\mathfrak{k}$ verbinden (Schnittlinien von je 6 Ebenen $\varkappa$ sind), sodass durch jeden Punkt $\mathfrak{k}$ 6 Gerade s hindurchgehen (in jeder Ebene $\varkappa$ 6 Gerade s liegen). Die x_i-Coordinaten dieser Geraden s, welche durchweg imaginäre Gerade zweiter Art sind, werden durch

$$0 \quad 2i \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\eta)$$

(Gesammtzahl $\frac{6!}{4!} 2^4 = 480$) bestimmt. Die Geraden s gehören zu je $2 \,.\, 4$ als Erzeugende den in § 7 4) zu betrachtenden 180 Flächen $F^{(4)}$ und zu je 4 als Erzeugende des einen Systems den 120 Flächen $F^{(5)}$ (§ 7 5)) an.

7) 960 Gerade t, welche je 4 Punkte $\mathfrak{k}_0$ verbinden und in denselben vier Fundamentalflächen $F^{(1)}$ berühren (die Schnittlinien von je 4 Berührungsebenen $\varkappa_0$ sind), sodass durch jeden Punkt $\mathfrak{k}_0$ sechs Gerade t hindurchgehen (in jeder Ebene $\mathfrak{k}_0$ sechs Gerade t liegen). Die x_i-Coordinaten dieser Geraden t sind durch

$$1 \quad 1 \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\vartheta)$$

(Gesammtzahl $\frac{1}{3} \cdot \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\, 2^5 = 960$) bestimmt; 384 Gerade t sind imaginär der ersten, 576 imaginär der zweiten Art.

Jede Gerade t schneidet 6 Gerade d; durch jeden dieser Schnittpunkte gehen noch eine Gerade t und 2 Gerade h (vgl. unter 1) dieses §) hindurch. Ferner schneidet jede Gerade t 12 Gerade r (vgl. unter 3)), während jede Gerade r von 8 Geraden t geschnitten wird; von diesen $8 \,.\, 480 = 12 \,.\, \frac{960}{3} = 3840$ Schnittpunkten $(t\ t,\ t,\ r)$ (und analog Ebenen $[t,\ t,\ t, r]$) gehören je 384 einer Fundamentalfläche $F^{(1)}$ an. Die Geraden t treten als Erzeugende (Hexaedergerade) der 60 Flächen $F^{(2)}$ (§ 7 2)) und der 960 Flächen $F^{(9)}$ (§ 7 9)) auf.

Endlich schneiden je 2 Gerade t eine Gerade k, sodass auf jeder Geraden k sechs, auf jeder Geraden t vier dieser Schnittpunkte auftreten. Da je zwei dieser $6 \,.\, 320 = 4 \,.\, \frac{960}{2} = 1920$ Schnittpunkte $(t,\ t,\ k)$, welche durch $\mathfrak{p}$ (analog der 1920 Ebenen $[t, t, k]$, welche durch π) bezeichnet werden sollen, als Eckpunkte (Seitenflächen) von Haupttetraedern bei bestimmten, später zu betrachtenden sechszähligen Correlationen sich darbieten, so sollen deren Coordinaten in nachstehender Tabelle (13ι) aufgeführt werden, in welcher zur Abkürzung, wie früher (vgl. (8γ) in § 2)

$$c_1 = 2\cos\frac{\pi}{12} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\eta\ ,\ c_2 = 2\sin\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta;\ c_1{}^2 = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12},\ c_2{}^2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \quad \ldots . \ (8\gamma)$$

gesetzt ist.

1920 Punkte $\mathfrak{p}$ (Ebenen π) (192 reell, 1728 imaginär)

Punkt-(Ebenen-)Coordinaten				Gesammtzahl	Reell	Imaginär
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{4!}{3!}\,2^3$	32	—
$\frac{c_1}{2}$	$\frac{c_2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c_2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c_2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{4!}{3!}\,2^3$	32	—
$\frac{c_2}{2}$	$\frac{c_1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c_1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c_1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{4!}{3!}\,2^3$	32	—
0	$\frac{c_1}{\sqrt{6}}$	$\frac{c_2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$4!\,2^2$	96	—
0	c_1	c_2	$i\sqrt{2}$	$4!\,2^2$	—	96
0	c_1	ic_2	$\sqrt{2}$	$4!\,2^2$	—	96
0	ic_1	c_2	$\sqrt{2}$	$4!\,2^2$	—	96
1	1	$i\sqrt{3}$	i	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	$\sqrt{3}\,c_1^2$	i	i	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	$\sqrt{3}\,c_2^2$	i	i	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	c_1+ic_2	c_1-ic_2	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	c_2+ic_1	c_2-ic_1	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	1	$c_1(c_1+i\sqrt{2})$	$c_1(c_1-i\sqrt{2})$	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	1	$c_2(c_2+i\sqrt{2})$	$c_2(c_2-i\sqrt{2})$	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	1	$ic_1(c_1+i\sqrt{2})$	$ic_1(c_1-i\sqrt{2})$	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
1	1	$ic_2(c_2+i\sqrt{2})$	$ic_2(c_2-i\sqrt{2})$	$\frac{4!}{2!}\,2^3$	—	96
$\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	$c_1+i\sqrt{2}$	$i(c_2-i\sqrt{2})$	$4!\,2^3$	—	192
1	i	$c_1(c_1+i\sqrt{2})$	$ic_1(c_1-i\sqrt{2})$	$4!\,2^3$	—	192
1	i	$c_2(c_2+i\sqrt{2})$	$ic_2(c_2-i\sqrt{2})$	$4!\,2^3$	—	192

(13ι)

8) Die Gruppirung der Schnittpunkte auf den (der Ebenen durch die) im vorigen bestimmten Geraden, sowie weitere Verbindungslinien und Schnittpunkte (Verbindungsebenen) werden sich bei den folgenden Betrachtungen (s. § 5) darbieten. Hier soll nur noch die Gruppirung der auf den Geraden k und d auftretenden Schnittpunkte (und analog der hindurchgehenden Ebenen) bestimmt werden, da sich zumal für die Geraden d auch die im folgenden bei den fünfzähligen Collineationen und Correlationen als Kanten, Eckpunkte und Seitenflächen der Haupttetraeder zu berücksichtigenden Geraden, Punkte und Ebenen in einfacher Weise ergeben.

Wenn man die Gesammtheit der reellen und imaginären Punkte der Geraden k und d in bekannter Weise als Punkte der Einheitskugel darstellt, so lassen sich die auftretenden Punktgruppen, welche sich analytisch bei passender Wahl der Grundpunkte durch bestimmte Werthe des Parameters ergeben, geometrisch als Eckpunkte von regulären oder halbregulären Polyedern in einfacher und anschaulicher Weise deuten.

8a) Wählt man für die Geraden k, für welche sich die Punkte nach der Periode 3 gruppiren, die beiden Punkte $\mathfrak{f}_0'$, $\mathfrak{f}_0''$ (vgl. (12β)) als Grundpunkte, so stellen die beiden gleich Null gesetzten binären Formen:

$$\zeta_1^6 - \zeta_2^6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (13\varkappa)$$ [1]

und $$\zeta_1^6 + \zeta_2^6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (13\lambda)$$

einerseits die drei Punkte $\mathfrak{d}$ und die drei Punkte $\mathfrak{e}$, andererseits die 6 einer solchen Geraden angehörigen Punkte $\mathfrak{p}$ (vgl. (13ι) unter 7) dieses §) und die gleich Null gesetzte binäre Form:

$$\zeta_1^6 - 52\,\zeta_1^3\,\zeta_2^3 + \zeta_2^6 \equiv \left(\zeta_1^3 - \zeta_2^3 \operatorname{cotg}^3 \frac{\pi}{12}\right)\left(\zeta_1^3 - \zeta_2^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (13\mu)$$

die 6 dieser Geraden angehörigen Punkte $\mathfrak{f}$ (vgl. (12η)) dar.

Die folgende Zusammenstellung (13ν) enthält für die Gerade k mit den x_i-Coordinaten: $1\ -i\ \ 1\ -i\ \ 1\ -i$, den p_{ik} Coordinaten: $1\ 1\ 1;\ 0\ 0\ 0$ die tetraedrischen Coordinaten der angegebenen Punktgruppen neben den zugehörigen Werthen des Parameters $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$.

[1]) Die Hesse'sche Determinante jeder der beiden binären Formen ist $(\zeta_1\,\zeta_2)^4$, sodass die Gleichung $(\zeta_1\,\zeta_2)^4 = 0$ die vierfach zählenden beiden Grundpunkte darstellt. Jede der beiden binären Formen ist die Jacobi'sche Determinante der anderen und der Hesse'schen. Vgl. Hess: Kugeltheilung S. 385.

Parameterwerthe für $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$	Punktcoordinaten.	$\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$	Punktcoordinaten.	$\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$	Punktcoordinaten.
$0 \ldots$	$i\sqrt{3}\quad 1\quad 1\quad 1 \ldots \mathfrak{k}_0'$				
$\infty \ldots$	$-i\sqrt{3}\quad 1\quad 1\quad 1 \ldots \mathfrak{k}_0''$				
$1 \ldots$	$0\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{d}$	$i \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ldots \mathfrak{p}$	$c_1^2 \ldots$	$-\ i\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$
$\alpha \ldots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{d}$	$\alpha\ i \ldots$	$-\frac{c_1}{2}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{p}$	$\alpha\ c_1^2 \ldots$	$1-2i\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$
$\alpha^2 \ldots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{d}$	$\alpha^2\ i \ldots$	$-\frac{c_2}{2}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{p}$	$\alpha^2 c_1^2 \ldots$	$-(1+2i)\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$
$-1 \ldots$	$1\quad 0\quad 0\quad 0 \ldots \mathfrak{e}$	$-\ i \ldots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ldots \mathfrak{p}$	$c_2^2 \ldots$	$i\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$
$-\alpha \ldots$	$-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{2} \ldots \mathfrak{e}$	$-\alpha\ i \ldots$	$\frac{c_2}{2}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_1}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{p}$	$\alpha\ c_2^2 \ldots$	$1+2i\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$
$-\alpha^2 \ldots$	$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{2} \ldots \mathfrak{e}$	$-\alpha^2 i \ldots$	$\frac{c_1}{2}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}}\quad \frac{c_2}{2\sqrt{3}} \ldots \mathfrak{p}$	$\alpha^2 c_2^2 \ldots$	$-(1-2i)\quad 1\,1\,1 \ldots \mathfrak{k}$

(13ν)

Bei der Darstellung auf der Einheitskugel bilden die 3 Punkte $\mathfrak{d}$ und die 3 Punkte $\mathfrak{e}$ auf dem Aequator der beiden Grundpunkte (im Beispiel auf dem Hauptkreise der reellen Zahlen) die 6 Eckpunkte eines regulären Sechsecks, mit den Grundpunkten zusammen die Eckpunkte einer regulären sechsseitigen Doppelpyramide; die 6 Punkte $\mathfrak{p}$ bilden die Eckpunkte eines zweiten regulären Sechsecks (bezw. diejenigen einer regulären sechsseitigen Doppelpyramide), welches aus dem ersteren durch eine Drehung von $\frac{\pi}{6}$ um die Axe resultirt. Die 6 Punkte $\mathfrak{k}$ liegen zu je dreien auf einem kleinen Kugelkreis und dessen Gegenkreis, deren Mittelpunkte die Grundpunkte sind, deren sphärischer Radius $\frac{\pi}{6}$ beträgt und deren Peripherie durch die 3 Punkte in 3 gleiche Theile getheilt wird. Diese 6 Punkte bilden die Eckpunkte eines s. g. kronrandigen (2+6)-flächigen 2 . 3-Ecks. Die 12 einer Geraden k angehörigen Punkte (q, q, q, k) (vgl. unter 5) dieses §) gruppiren sich zu je sechs auf einem kleinen Kugelkreis und dessen Gegenkreis, deren sphärischer Radius sich aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\eta\right)$ bestimmt u. s. f.

Würde man dagegen einen der 3 Punkte $\mathfrak{e}$ und den durch den entgegengesetzten Werth des eben benutzten Parameters bestimmten Punkt $\mathfrak{d}$ einer Geraden k als Grundpunkte gewählt haben, so würden die beiden anderen Punkte $\mathfrak{e}$ und 2 Punkte $\mathfrak{f}$ mit diesen beiden Punkten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{d}$ den Eckpunkten eines regulären Oktaeders und vier Punkte (q, q, q, k) vier auf einem Hauptkreise liegenden Punkten des zugehörigen Kubooktaeders entsprechen u. s. w.

8b) Wenn man für die Geraden d die beiden einer solchen Geraden angehörigen Punkte $\mathfrak{e}$ als Grundpunkte wählt, so stellt die Gleichung

$$\zeta_1^4 - \zeta_2^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13\xi)$$

die 4 Punkte $\mathfrak{d}_0$ derselben dar, welche mit den beiden Punkten $\mathfrak{e}$ die Eckpunkte eines regulären Oktaeders auf der Einheitskugel bilden. Die zugehörigen Hexaeder- und Kubooktaeder-Punkte sind durch die Wurzeln der resp. Gleichungen $H = 0$ und $J = 0$ (vgl. (8) und (9) in § 2) bestimmt; insbesondere entsprechen den 4 Wurzeln der Gleichung

$$\zeta_1^4 + \zeta_2^4 + 0 \quad \ldots \ldots \quad (13\xi')$$

die 4 Punkte $\mathfrak{f}$ der Geraden d. Wenn man andererseits zu der durch diese 4 Punkte $\mathfrak{f}$ und die beiden Punkte $\mathfrak{e}$ bestimmten Oktaederform die zugehörigen Gleichungen $H = 0$ und $J = 0$ bildet, so sind nun die 8 Hexaederpunkte die unter 7) betrachteten Punkte (h, h, t, t, d), vier der Kubooktaederpunkte die Punkte $\mathfrak{d}_0$, die 8 übrigen die unter 3) betrachteten Punkte (r, r, d).

Die beiden Gleichungen

$$\zeta_1^4 - \frac{1}{4}\zeta_2^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13o)$$

und $$\zeta_1^4 - 4\,\zeta_2^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13o')$$

stellen die 8 Punkte $\mathfrak{d}$ dar, welche zu je vier, den Eckpunkten eines Quadrates entsprechend auf einem kleinen Kugelkreis und dessen Gegenkreis liegen, deren sphärischer Radius $\pi - 2\eta \left(\cos 2\eta = -\frac{1}{3}\right)$ ist; die Gleichungen

$$\zeta_1^4 + \frac{1}{4}\zeta_2^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13\pi)$$

$$\zeta_1^4 + 4\,\zeta_2^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13\pi')$$

stellen die 8 Punkte (q, q, d) (vgl. unter 5)) dar, welche die Halbirungspunkte der Quadranten auf diesen beiden Kugelkreisen sind; die 8 Punkte (l, l, d)

(vgl. unter 2) liegen ebenfalls als Eckpunkte zweier Quadrate auf einem Kugelkreis und dessen Gegenkreis, deren sphärischer Radius $\frac{\pi}{4}-\frac{\eta}{2}$ ist u. s. f.

Die beiden Gleichungen endlich:

$$\zeta_1{}^4 + \operatorname{cotg}{}^4\varphi \, . \, \zeta_2{}^4 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\varrho)$$

$$\text{und } \zeta_1{}^4 + \operatorname{tg}{}^4\varphi \, . \, \zeta_2{}^4 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\varrho')$$

$$\text{wo } \operatorname{tg}\varphi = 2 \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \ \operatorname{tg} 2\varphi = 2 \quad \ldots \ldots \quad (\odot)$$

ist, stellen 8 zu je vier als Eckpunkte eines Quadrates auf einem kleinen Kugelkreise und dessen Gegenkreise vom sphärischen Radius 2φ liegende Punkte t dar, deren Gesammtzahl $8 \, . \, 360 = 2880$ beträgt und deren Lage für die folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit ist.

Diese 2880 Punkte t liegen nämlich zu je 30 auf einer Geraden m, deren Klein'sche Coordinaten sich aus

$$i\sqrt{5} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\sigma)$$

bestimmen, deren Gesammtzahl $\frac{6!}{5!}\, 2^5 = 192$ beträgt und von denen sich je zwei mit einer Geraden d in einem Punkte t schneiden. Dieselben sind durchweg imaginär der 2ten Art. Werden die 30 einer solchen Geraden m angehörigen Punkte t als Punkte der Einheitskugel dargestellt, so erweisen sich dieselben als den Eckpunkten eines gleicheckigen (12 + 20)-flächigen 30-Ecks entsprechend. Die 12 Ikosaederpunkte m dieses sphärischen Netzes entsprechen der gleich Null gesetzten Grundform $f_i = 0$, die 20 Pentagondodekaederpunkte n der gleich Null gesetzten Hesse'schen Determinante $H_i = 0$, während die gleich Null gesetzte Jacobi'sche Determinante $J_i = 0$ die 30 Punkte t bestimmt.[1])

Es giebt $12 \, . \, 192 = 2304$ Ikosaederpunkte m, welche als Eckpunkte von Haupttetraedern bei den fünfzähligen Collineationen und Correlationen auftreten; durch jeden Punkt m gehen ausserdem noch zwei Gerade n, welche je zwei solcher Punkte verbinden und deren Klein'sche Coordinaten sich aus:

$$0 \quad 1 \quad e^{\frac{2\pi i}{5}} \quad e^{\frac{4\pi i}{5}} \quad e^{\frac{6\pi i}{5}} \quad e^{\frac{8\pi i}{5}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\tau)$$

1) Vgl. Hess: Kugeltheilung § 85.

(Gesammtzahl $\frac{1}{5} \cdot 6!\, 2^4 = 2304$) bestimmen. Dieselben bilden die beiden anderen Kantenpaare der Haupttetraeder und sind ebenfalls sämmtlich imaginär der 2ten Art.

Die $20 \,.\, 192 = 3840$ Pentagondodekaederpunkte $\mathfrak{n}$ sind zugleich Schnittpunkte einer Geraden $\mathfrak{m}$ mit einer Geraden k_0, und zwar schneidet jede der 192 Geraden $\mathfrak{m}$ 20 Gerade k_0, und jede Gerade k_0 wird von 24 Geraden m geschnitten, sodass die 3840 Pentagondodekaederpunkte $\mathfrak{n}$ zu je 384 einer der 10 Fundamentalflächen $F_i^{(1)}$ angehören.

Der analytische Nachweis für die soeben erörterten Lagenbeziehungen lässt sich analog, wie oben erbringen, wenn auch die Rechnungen etwas complicirter ausfallen. Beispiele für die Coordinaten der Ikosaederpunkte $\mathfrak{m}$ werden sich bei Untersuchung der Collineationen und Correlationen ergeben. Die Uebertragung der Lagenbeziehungen für Punkte in solche für Ebenen bietet ebenfalls keine Schwierigkeit.

Auf die zahlreichen Configurationen, welche durch die in diesem § betrachteten Gruppen von Geraden, Schnittpunkten und Verbindungsebenen bestimmt sind, soll hier nicht näher eingegangen werden.

§ 5.

Lineare Complexe, Flächen zweiten Grades und Complexe zweiten Grades, welche bei den Transformationen auftreten.

Ausser den 6 Fundamentalcomplexen und denjenigen speciellen linearen Complexen (Strahlengebüschen nach Sturm), deren Axe je eine der im vorigen Paragraphen betrachteten Geraden darstellt, ist zunächst noch eine Reihe von allgemeinen linearen Complexen (Strahlengewinden) für die folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit. Diese Gewinde gehören einmal zu bestimmten Nullcorrelationen; sodann bleiben dieselben und gewisse durch sie bestimmte Strahlennetze, Gebüsche bei den Transformationen fest, endlich erzeugen dieselben mehrere Gruppen von Flächen zweiten Grades, welche entweder als Kernflächen von bestimmten Polarcorrelationen oder als festbleibende, bez. in sich transformirte Flächen von Flächenbüscheln oder von Flächennetzen bei den Collineationen und Correlationen in Betracht kommen. Ebenso bietet sich auch eine Reihe von Complexen

zweiten Grades, nämlich einmal von tetraedralen (Reye'schen) Complexen, welche bei den Collineationen festbleiben und ferner von anderen solchen Complexen zweiten Grades, deren Singularitätenfläche zwei Flächen zweiten Grades oder eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades ist, bei den Correlationen dar.

Es sollen im Folgenden die hauptsächlichsten derartigen Complexe ersten und zweiten Grades und die Hauptgruppen der Flächen zweiten Grades aufgestellt und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften angegeben werden. Die analytische Darstellung gestaltet sich auch hier meistens am einfachsten bei Anwendung der Klein'schen Liniencoordinaten.

§ 6.

A) Lineare Complexe.

Die Gleichungen der hier in Betracht kommenden linearen Complexe ergeben sich einfach durch Addition und Subtraction der linken Theile der Gleichungen der 6 Fundamentalcomplexe: $x_{i_1} = 0$ $(i_1 = 1, 2, \ldots 6)$. Es entstehen so folgende Complexe:

1) Die 6 Fundamentalcomplexe:

$C_{(1)} \ldots\ldots x_{i_1} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (14\alpha)$

2) Die $\binom{6}{2} \cdot 2 = 30$ Complexe:

$C_{(2)} \ldots\ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (18\beta)$

3) Die $\binom{6}{3} \cdot 2^2 = 80$ Complexe:

$C_{(3)} \ldots\ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} = 0, \ldots\ldots\ldots (14\gamma)$

4) Die $\binom{6}{4} \cdot 2^3 = 120$ Complexe:

$C_{(4)} \ldots\ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} \pm x_{i_4} = 0, \ldots\ldots (14\delta)$

5) Die $\binom{6}{5} \cdot 2^4 = 96$ Complexe:

$C_{(5)} \ldots\ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} \pm x_{i_4} \pm x_{i_5} = 0, \ldots\ldots (14\varepsilon)$

6) Die $\binom{6}{6} \cdot 2^5 = 32$ Complexe:

$C_{(6)} \ldots\ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} \pm x_{i_4} \pm x_{i_5} \pm x_{i_6} = 0. \ldots (14\zeta)$

In der folgenden Tabelle (15) ist übersichtlich die Anzahl der Geraden-Paare $e = e_0, k, d, k_0, d_0$ (vergl. § 2 und § 3) und $h, l, p, q, r, s, t, m, n$ (vgl. § 4) angegeben, welche den Complexen $C_{(i)}$ als Complexstrahlen an-

gehören. Der an die Zahl angehängte und eingeklammerte Index giebt an, wie vielen solcher Complexen eine der Geraden zugleich angehört.

Geraden-Paare	$C_{(1)}$	$C_{(2)}$	$C_{(3)}$	$C_{(4)}$	$C_{(5)}$	$C_{(6)}$
$e = e_0$	$10_{(4)}$	$6_{(12)}$	$3_{(6)}$	$1_{(8)}$	—	—
k	—	$32_{(6)}$	—	$12_{(18)}$	—	—
d	$60_{(2)}$	$24_{(4)}$	$18_{(8)}$	$3_{(2)}$	$15_{(8)}$	$45_{(8)}$
k_0	$40_{(3)}$	$16_{(6)}$	$5_{(10)}$	$4_{(6)}$	$10_{(12)}$	$20_{(8)}$
d_0	$60_{(2)}$	$28_{(7)}$	$9_{(6)}$	$12_{(12)}$	$10_{(8)}$	—
h	$80_{(2)}$	$40_{(5)}$	$9_{(3)}$	$24_{(12)}$	—	—
l	$80_{(1)}$	$64_{(4)}$	$48_{(8)}$	$24_{(6)}$	$60_{(12)}$	—
p	—	—	$48_{(2)}$	—	—	$120_{(2)}$
q	$120_{(2)}$	$24_{(2)}$	—	—	—	—
r	—	$56_{(7)}$	—	$30_{(15)}$	—	$45_{(6)}$
s	$40_{(1)}$	$48_{(6)}$	$36_{(6)}$	$6_{(3)}$	$15_{(6)}$	—
t	—	$48_{(3)}$	$48_{(8)}$	—	—	$30_{(2)}$
m	—	$32_{(10)}$	—	$12_{(15)}$	—	—
n	$192_{(1)}$	—	—	—	$12_{(1)}$	$72_{(2)}$.

. . . (15)

Jeder Fundamentalcomplex $C_{(1)}$ liegt mit 5 andern in Involution, sodass die bereits erwähnten 15 windschiefen Involutionen mit je einem Axenpaar e entstehen, welche ebenfalls durch je zwei in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$ (z. B. $x_{i_1} + x_{i_2} = 0$ und $x_{i_1} - x_{i_2} = 0$) erzeugt werden. Ferner liegt jeder Complex $C_{(2)}$ noch mit 12 anderen solchen Complexen in Involution, sodass $\frac{12 \cdot 30}{2} = 180$ windschiefe Involutionen mit je einem Axenpaar d entstehen; dieselben werden auch durch je zwei in Involution liegende Complexe $C_{(4)}$ erzeugt, von denen jeder (z. B. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$) mit 3 anderen (z. B. mit $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$) in Involution liegt. Jeder Complex $C_{(3)}$ (z. B. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$) liegt mit 4 anderen (z. B. mit $x_4 \pm x_5 \pm x_6 = 0$) so in Involution, dass $\frac{80 \cdot 4}{2} = 160$ windschiefe Involutionen mit je einem Axenpaar k entstehen; dieselben werden auch durch je zwei Complexe $C_{(6)}$ erzeugt, von denen jeder mit 10 anderen in Involution liegt.

Ausserdem wird noch durch je zwei in Involution liegende Complexe

$C_{(1)} \ldots C_{(6)}$ eine Reihe weiterer windschiefen Involutionen erzeugt, deren Axen zum Theil die bereits in § 2 bis § 4 bestimmten Geraden, zum Theil neue, durch u_{ik} bezeichnete, Geraden sind. Diese Involutionen sind nebst den oben besprochenen in der folgenden Tabelle (16) übersichtlich zusammengestellt.

Je zwei in Involution liegende Complexe:	Zahl d. windschiefen Involutionen	Klein'sche Coordinaten eines Axenpaares:						Zahl und Bezeichnung der Axen:
$C_{(1)}$ mit $C_{(1)}$. . .	15 . .	$\pm i$	1	0	0	0	0	30 Gerade e
$C_{(1)}$ „ $C_{(2)}$. . .	120 . .	$\pm i\sqrt{2}$	1	1	0	0	0	240 „ d_0
$C_{(1)}$ „ $C_{(3)}$. . .	240 . .	$\pm i\sqrt{3}$	1	1	1	0	0	480 „ h
$C_{(1)}$ „ $C_{(4)}$. . .	240 . .	$\pm 2i$	1	1	1	1	0	480 „ s
$C_{(1)}$ „ $C_{(5)}$. . .	96 . .	$\pm i\sqrt{5}$	1	1	1	1	1	192 „ m
$C_{(2)}$ „ $C_{(2)}$. . .	a) 15 . .	$\pm i$	1	0	0	0	0	30 „ e
	b) 180 . .	$\pm i$	$\pm i$	1	1	0	0	360 „ d
$C_{(2)}$ „ $C_{(3)}$. . .	a) 240 . .	$\sqrt{2}\pm i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\mp i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	0	0	0	480 „ $u_{2,3}$
	b) 480 . .	$\pm i\sqrt{3}$	$\pm i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	960 „ l
$C_{(2)}$ „ $C_{(4)}$. . .	a) 720 . .	$1\pm i\sqrt{2}$	$1\mp i\sqrt{2}$	1	1	0	0	1440 „ $u_{2,4}$
	b) 240 . .	$\pm i\sqrt{2}$	$\pm i\sqrt{2}$	1	1	1	1	480 „ r
$C_{(2)}$ „ $C_{(5)}$. . .	960 . .	$\sqrt{2}\pm i\sqrt{5}$	$\sqrt{2}\mp i\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	1920 „ $u_{2,5}$
$C_{(2)}$ „ $C_{(6)}$. . .	480 . .	$1\pm i\sqrt{3}$	$1\mp i\sqrt{3}$	1	1	1	1	960 „ $u_{2,6}$
$C_{(3)}$ „ $C_{(3)}$. . .	a) 160 . .	$\pm i$	$\pm i$	$\pm i$	1	1	1	320 „ k
	b) 720 . .	$1\pm i$	$1\mp i$	$\pm i$	1	0	0	1440 „ $u_{3,3}$
$C_{(3)}$ „ $C_{(4)}$. . .	2880 . .	$\sqrt{3}\pm 2i$	$\sqrt{3}\mp 2i$	$\pm 2i$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	5760 „ $u_{3,4}$
$C_{(3)}$ „ $C_{(5)}$. . .	1920 . .	$\sqrt{3}\pm i\sqrt{5}$	$\sqrt{3}\mp i\sqrt{5}$	$\pm i\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3840 „ $u_{3,5}$
$C_{(4)}$ „ $C_{(4)}$. . .	a) 180 . .	$\pm i$	$\pm i$	1	1	0	0	360 „ d
	b) 1440 . .	$1\pm i$	$1\mp i$	$\pm i$	$\pm i$	1	1	2880 „ $u_{4,4}$
$C_{(4)}$ „ $C_{(5)}$. . .	1440 . .	$2\pm i\sqrt{5}$	$2\pm i\sqrt{5}$	$2\mp i\sqrt{5}$	$2\mp i\sqrt{5}$	2	0	2880 „ $u_{4,5}$
$C_{(4)}$ „ $C_{(6)}$. . .	1440 . .	$\sqrt{2}\pm i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\pm i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\mp i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\mp i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2880 „ $u_{4,6}$
$C_{(5)}$ „ $C_{(5)}$. . .	1440 . .	$1\pm i$	$1\pm i$	$1\mp i$	$1\mp i$	$\pm i$	1	2880 „ $u_{5,5}$
$C_{(6)}$ „ $C_{(6)}$. . .	160 . .	$\pm i$	$\pm i$	$\pm i$	1	1	1	320 „ k.

(16)

Die durch je ein Paar conjugirter Geraden k_0, p, q, t, n als Axen bestimmten windschiefen Involutionen werden dagegen nicht durch zwei in Involution liegende Complexe $C_{(1)} \ldots C_{(6)}$ erzeugt. So gehören z. B. dem Complexbüschel, dessen Axen die beiden Geraden:

$$k_0 \ldots \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \end{array} \right.$$

sind, zwar die 3 Complexe $C_{(2)}$:

$$x_1 - x_3 = 0,$$
$$x_3 - x_5 = 0,$$
$$x_5 - x_1 = 0$$

an, es liegen aber nicht zwei derselben in Involution; solche zwei in Involution liegende Complexe werden vielmehr, wenn λ einen Parameter bedeutet, durch die beiden Gleichungen:

$$x_1 + (\lambda - 1)\, x_3 - \lambda\, x_5 = 0$$
$$(1 - 2\lambda)\, x_1 + (\lambda + 1)\, x_3 - (2 - \lambda)\, x_5 = 0$$

bestimmt, sodass z. B. die beiden Complexe ($\lambda = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

zwei in Involution liegende jenes Büschels darstellen.

§ 7.

B) Flächen zweiten Grades.

Von den Flächen zweiten Grades, welche durch je drei (nicht einem Büschel angehörige) lineare Complexe $C_{(1)} \ldots . C_{(6)}$ erzeugt werden, sollen die wichtigsten, für die Transformationen in Betracht kommenden Gruppen im Folgenden angegeben werden. Zu der Darstellung der Gleichungen in x_i-Coordinaten sind immer je drei lineare Complexe, welche zu je zweien in Involution liegen, verwendet und zwar auf zwei Arten, so dass hieraus die hauptsächlichsten Gruppen der beiden Systeme von Erzeugungslinien mit Leichtigkeit entnommen werden können.

1) Die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ (vgl. § 1 und § 2).

Z. B. $F_1^{(1)} \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 & \ldots\ldots\ldots \quad (17\alpha) \\ \text{oder } x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 & \ldots\ldots\ldots \quad (17\beta) \end{array} \right.$

Erzeugende des einen Systemes:

$1 \quad 0 \quad \delta \quad 0 \quad \pm i\sqrt{1+\delta^2} \quad 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\gamma)$

Erzeugende des anderen Systemes:

$0 \quad 1 \quad 0 \quad \varepsilon \quad 0 \quad \pm i\sqrt{1+\varepsilon^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\delta)$

wo δ und ε je einen Parameter bedeutet.

Die Oktaeder-Geraden e_0 beider Systeme entsprechen bez. den Werthen

$$\delta,\ \varepsilon = 0,\ \infty,\ \pm i,$$

die Hexaeder-Geraden k_0 beider Systeme entsprechen bez. den Werthen

$$\delta,\ \varepsilon = \pm \alpha,\ \pm \alpha^2,$$

die Kubooktaeder-Geraden d_0 beider Systeme entsprechen bez. den Werthen

$$\delta,\ \varepsilon = \pm 1,\ \pm i\sqrt{2},\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\,.$$

Den Werthen für δ (bez. ε): $\pm\delta,\ \pm\frac{1}{\delta},\ \pm i\sqrt{1+\delta^2},\ \pm\frac{i}{\sqrt{1+\delta^2}},\ \pm\frac{i\sqrt{1+\delta^2}}{\delta},\ \pm\frac{i\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}$ entsprechen 24 zusammengehörige Gerade des einen (und bez. des anderen Systemes), deren Coordinaten aus (17γ) oder (17δ) durch die mit den Vorzeichencombinationen versehenen möglichen Permutationen folgen.

Die Oktaeder-Geraden können auch als Axenpaare je zweier windschiefen Involutionen: $\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$ u. s. f. (vgl. (16)), die Hexaeder-Geraden als Axenpaare der Complexbüschel $\left.\begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \end{matrix}\right\}$ u. s. f. (vgl. § 6 am Ende) und die Kubooktaeder-Geraden als Axenpaare je zweier windschiefen Involutionen: $\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{matrix}\right\}$ u. s. f. (vgl. (16) erhalten werden.

Mit Rücksicht auf die häufig vorkommenden Anwendungen sind in der folgenden Tabelle (17ε) die Gleichungen der 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ in x_i– und z_l– Coordinaten nochmals zusammengestellt.[1]) (Die Gleichungen in den Ebenencoordinaten ζ_l sind von derselben Form, wie in den Punktcoordinaten z_l.)

$$\left.\begin{array}{llll}
F_1^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0; & x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0; & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \\
F_2^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0; & x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0; & z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = 0, \\
F_3^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0; & x_2^2 + x_3^2 + x_6^2 = 0; & z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\
F_4^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_3^2 + x_6^2 = 0; & x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0; & z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 0, \\
F_5^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0; & x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0; & 2\,(z_1 z_2 - z_3 z_4) = 0, \\
F_6^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; & x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0; & 2\,(z_1 z_3 - z_4 z_2) = 0, \\
F_7^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_2^2 + x_6^2 = 0; & x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0; & 2\,(z_1 z_4 - z_2 z_3) = 0, \\
F_8^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0; & x_2^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0; & 2\,(z_1 z_2 + z_3 z_4) = 0, \\
F_9^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0; & x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0; & 2\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) = 0, \\
F_{10}^{(1)} \ldots & x_1^2 + x_2^2 + x_5^2 = 0; & x_3^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0; & 2\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.
\end{array}\right\} \quad (17\varepsilon)$$

[1]) Vgl. A_1 § 5 Formel (15).

Die Erzeugenden e_0, k_0, d_0 dieser Fundamentalflächen sind in § 2, die Tangenten r, p' und p'', q und t derselben in § 4 unter 3), 4), 5), 7) betrachtet worden.

2) 60 Flächen $F^{(2)}$.

Dieselben werden durch je drei zu zweien in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$ erzeugt; solcher Flächen giebt es, da die Zahl der windschiefen Involutionen (vgl. (16): $C_{(2)}$ mit $C_{(2)}$ unter 6)) 180 beträgt, 60, von denen 24 reell[1]) und 36 imaginär sind. Diese 60 Flächen $F^{(2)}$ ordnen sich in 15 Quadrupel; je vier Flächen eines Quadrupels haben ein Polartetraeder, nämlich eins der 15 Fundamentaltetraeder T_i gemein; jede Fläche eines Quadrupels berührt die 3 anderen in 12 Punkten c. Die Gleichungen der 4 Flächen eines Quadrupels in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten setzen sich linear (die auftretenden Factoren sind entweder 4 mal ± 1, oder je 2 mal ± 1 und $\pm i$) aus den Gleichungen von vier solchen Fundamentalflächen zusammen, zu welchen je eins der 15 Fundamentaltetraeder als gemeinsames Polartetraeder gehört.

Man erhält z. B.

$$F_1^{(1)} \ldots \begin{cases} \quad\;\; -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots & (18\alpha) \\ \text{oder } -\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots & (18\beta) \\ -F_1^{(1)} + F_2^{(1)} + F_3^{(1)} + F_4^{(1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots & (18\gamma) \\ \quad\;\; (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0 \quad \ldots & (18\delta) \\ \text{oder } (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_5 + x_6)^2 = 0 \quad \ldots & (18\varepsilon) \end{cases}$$

Erzeugende des einen Systems: $1 \quad -1 \quad \delta \quad -\delta \pm i\sqrt{1+\delta^2} \mp i\sqrt{1+\delta^2}$, . . (18$\zeta$)

" " zweiten " $1 \quad 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon \pm i\sqrt{1+\varepsilon^2} \pm i\sqrt{1+\varepsilon^2}$. . (18η)

Die den Werthen $\delta, \varepsilon = 0, \infty, \pm i$ entsprechenden Oktaeder-Geraden beider Systeme sind je 6 imaginäre Gerade d (vgl. § 4 unter 8b)).

Die den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm \alpha, \pm \alpha^2$ entsprechenden Hexaeder-Geraden beider Systeme sind je 8 imaginäre Gerade t (vgl. § 4 unter 7)).

Die den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm 1, \pm i\sqrt{2}, \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ entsprechenden Kubo-

[1]) Die Gleichungen der 24 reellen Flächen in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten habe ich Math. Ann. Bd. 28, S. 247—249 gegeben. Vgl. auch Th. Reye: Acta Mathem. I S. 97—108 unter 17, wo diese 24 reellen (nicht geradlinigen) Flächen als Ordnungsflächen von Polarsystemen erhalten werden. Vgl. § 18 B. 1).

oktaeder-Geraden beider Systeme sind je 12 imaginäre Gerade r (vgl. § 4 unter 3)).

Die 36 Oktaeder-Punkte, von denen je 6 einer Geraden d angehören, sind durch 12 Punkte $\mathfrak{e}$ und 24 Punkte $\mathfrak{k}$, die 64 Hexaeder-Punkte, deren je 8 einer Geraden t angehören, durch 32 Punkte $\mathfrak{k}_0$ und 32 Punkte $\mathfrak{p}$ (vgl. § 4, (12ι)) und die 144 Kubooktaeder-Punkte, von denen je 12 auf einer Geraden r liegen, durch 48 Punkte $\mathfrak{d}_0$ und 96 Punkte (r, r, d) (vgl. § 4 unter 3)) dargestellt. Analoges gilt für die Berührungsebenen der Fläche.

Die Oktaeder-, Hexaeder- und Kubooktaeder-Geraden können auch als Axenpaare je zweier windschiefen Involutionen analog wie unter 1) erhalten werden (vgl. die Zusammenstellung in (16)).

3) 90 Flächen $F^{(3)}$.

Jede dieser Flächen wird durch drei zu je zweien in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$, z. B. durch $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_4 + x_6 = 0$ oder durch $x_3 - x_5 = 0$, $x_3 + x_5 = 0$, $x_4 - x_6 = 0$ oder auch durch zwei Complexe $C_{(1)}$ und einen Complex $C_{(2)}$ z. B. durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 + x_6 = 0$ oder durch $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_4 - x_6 = 0$ erzeugt. Die Gesammtzahl dieser Flächen beträgt 90, da durch jedes Geradenpaar e 12 solcher Flächen hindurchgehen und jede Fläche 2 Geradenpaare e als Erzeugende enthält. Von den 90 Flächen sind 36 reell,[1]) welche je ein reelles und ein imaginäres Geradenpaar e enthalten; von den 54 imaginären enthalten 36 je zwei reelle, 18 dagegen je zwei imaginäre Geradenpaare e. Die Gleichungen der Flächen in tetraedrischen Punkt- oder Ebenen-Coordinaten setzen sich linear aus den Gleichungen zweier Fundamentalflächen $F^{(1)}$ zusammen, und zwar die reellen in der Form $F^{(1)}_{i_1} \pm F^{(1)}_{i_2} = 0$, die imaginären in der Form $F^{(1)}_{i_1} \pm i\, F^{(1)}_{i_2} = 0$. Für das oben gewählte Beispiel erhalten wir folgende Formen der Gleichungen:

$$z_1\,(z_3 + z_4) - z_2\,(z_3 - z_4) = 0 \ldots (19\alpha) \quad \text{oder} \quad \zeta_1\,(\zeta_3 + \zeta_4) - \zeta_2\,(\zeta_3 - \zeta_4) = 0 \ldots (19\beta)$$

$$F_9 + F_7 = 0 \ldots\ldots (19\gamma)$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \ldots\ldots (19\delta)$$

$$\text{oder} \quad (x_3 - x_5)^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \ldots\ldots (19\varepsilon)$$

1) Die 36 reellen Flächen hat auch Reye: Acta Mathem. I S. 97—108 als Ordnungsflächen von Polarsystemen (unter 11) betrachtet. Vgl. § 18. B.

$2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \ldots (19\zeta)$ oder $2x_3^2 + 2x_5^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \ldots (19\eta)$

Erzeugende des einen Systems: $\delta \quad \pm i\sqrt{2+\delta^2} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \ldots\ldots \quad (19\upsilon)$

" " zweiten " : $0 \quad 0 \quad \varepsilon \quad 1 \quad \pm i\sqrt{2+\varepsilon^2} \quad -1 \quad \ldots\ldots \quad (19\iota)$

Bei Zugrundelegung der Formen (19δ) und (19ε) entsprechen als Oktaeder-Gerade beider Systeme den Werthen $\delta, \varepsilon = \infty$ je zwei Gerade e, den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm i$ je 4 Gerade d, als Hexaeder-Gerade beider Systeme den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm 1, \pm i\sqrt{3}$ je 8 Gerade h (vgl. § 4 unter 1), als Kubooktaeder-Gerade beider Systeme den Werthen $\delta, \varepsilon = 0, \pm i\sqrt{2}$ je vier Gerade d_0, den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm(1 \pm i\sqrt{2})$ je 8 Gerade $u_{2,4}$ (vgl. unter (16)).

Legt man dagegen die Formen (19ζ) und (19η) der Gleichung zu Grunde, so erhält man eine zweite kubooktaedrische Eintheilung der Fläche, in dem alsdann als Oktaeder-Gerade beider Systeme den Werthen $\delta, \varepsilon = \infty$ je zwei Gerade e und den Werthen $\delta, \varepsilon = 0, \pm i\sqrt{2}$ je vier Gerade d_0 entsprechen; als Hexaeder-Gerade treten alsdann je 8 Gerade auf, den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm \alpha\sqrt{2}, \pm \alpha^2\sqrt{2}$ entsprechend und als Kubooktaeder-Gerade die vier den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm i$ entsprechenden Geradenpaare d, ausserdem noch 8 Geradenpaare, welche den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm\sqrt{2}, \pm 2i$ entsprechen.

4) 180 Flächen $F^{(4)}$.

Dieselben werden durch je einen Complex $C_{(1)}$ und zwei Complexe $C_{(2)}$ erzeugt; ihre Gesammtzahl beträgt 180, von welchen 36 reell und 144 imaginär sind. Die Gleichungen in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten setzen sich linear aus den Gleichungen von vier Fundamentalflächen zusammen und zwar treten dieselben 15 Verbindungen von je vier Flächen $F^{(1)}$ auf, zu denen je eins der 15 Fundamentaltetraeder als gemeinsames Polartetraeder gehört, wie bei den Flächen $F^{(2)}$; bei jeder der 15 Verbindungen sind hier die übrigen 12 Combinationen der Factoren $1, \pm 1, \pm 1, \pm 1$ oder $1, \pm 1, \pm i, \pm i$ zu bilden.

Z. B. $F_1^{(4)} \ldots z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 z_4 = 0 \ldots (20\alpha)$ oder $\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - 2\zeta_3\zeta_4 = 0 \ldots (20\beta)$

$F_3 + F_4 + F_5 - F_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20\gamma)$

$2x_1^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20\delta)$

oder $2x_2^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20\varepsilon)$

Erzeugende des einen Systems: $\pm i\sqrt{2(1+\delta^2)} \quad 0 \quad \delta \quad 1 \quad \delta - 1 \quad \ldots\ldots \quad (20\zeta)$

" " zweiten " : $0 \quad \pm i\sqrt{2(1+\varepsilon^2)} \quad \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \quad 1 \quad \ldots\ldots \quad (20\eta)$.

Als Oktaeder-Gerade entsprechen den Werthen $\delta, \varepsilon = 0, \infty$ je 4 Gerade d_0 und den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm i$ je 2 Gerade d; als Hexaeder-Gerade treten je 8 den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm \alpha, \pm \alpha^2$ entsprechende Gerade und als Kubooktaeder-Gerade je vier den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm 1$ entsprechende Gerade s und ausserdem noch 8 Geradenpaare auf, den Werthen $\delta, \varepsilon = \pm i\sqrt{2}$, $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ entsprechend.

Für die Werthe $\delta, \varepsilon = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ergeben sich je 8 Gerade l (vgl. § 4 unter 2) u. s. f.

5) 120 Flächen $F^{(5)}$.

Diese Flächen werden entweder durch je zwei Complexe $C_{(1)}$ und einen Complex $C_{(4)}$ oder auf drei verschiedene Arten durch je zwei Complexe $C_{(2)}$ und einen Complex $C_{(4)}$ erzeugt. Die Gesammtzahl dieser durchweg imaginären Flächen, von denen je 8 durch eins der 15 Geradenpaare e hindurchgehen, beträgt 120. Die Gleichungen in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-)Coordinaten setzen sich linear aus den Gleichungen der vier Fundamentalflächen, welche durch ein Geradenpaar e hindurchgehen, oder auch aus den Gleichungen je zweier der 90 Flächen $F^{(3)}$, von denen je 12 ein Geradenpaar e gemein haben, zusammen. So gehen z. B. durch das Geradenpaar (56)...0 0 0 0 $1 \pm i$ die vier Fundamentalflächen F_5, F_8, F_6, F_9, die 12 Flächen $F^{(3)}$: $F_8 \pm F_6 = 0$, $F_9 \pm F_5 = 0$, $F_5 \pm i\,F_8 = 0$, $F_6 \pm i\,F_9 = 0$, $F_9 \pm i\,F_8 = 0$, $F_5 \pm i\,F_6 = 0$ und die 8 Flächen $F^{(5)}$. . . $(F_9 \pm F_5) \pm i\,(F_8 \pm F_6) = 0$, deren Gleichungen in x_i-Coordinaten durch $\pm x_1 = \pm x_2 = \pm x_3 = \pm x_4$ dargestellt werden, hindurch. Für eine dieser 8 Flächen z. B. $-x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ erhält man:

$$z_2\,(z_1 - z_4) + i\,z_3\,(z_1 + z_4) = 0 \ldots (21\alpha) \quad \text{oder} \quad \zeta_2\,(\zeta_1 - \zeta_4) - i\,\zeta_3\,(\zeta_1 + \zeta_4) = 0 \ldots (21\beta)$$

$$(F_5 + F_9) + i\,(F_6 + F_8) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21\gamma)$$

$$(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + 4\,x_5{}^2 + 4\,x_6{}^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21\delta)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{oder} & (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^2 + 2\,(x_1 + x_2)^2 + 2\,(x_3 - x_4)^2 = 0 \\ \text{oder} & (x_1 + x_3 - x_3 + x_4)^2 + 2\,(x_1 + x_3)^2 + 2\,(x_4 - x_2)^2 = 0 \\ \text{oder} & (x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + 2\,(x_1 + x_4)^2 + 2\,(x_2 - x_3)^2 = 0 \end{array}\right\} \; . \quad (21\varepsilon)$$

Erzeugende des einen Systems: $-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad \pm i\sqrt{4+\delta^2}$. . . (21ζ)

" " zweiten " $1+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \quad 1 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad 0 \quad 0$, ... (21η)

wobei $\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1 = 0$ ist.

Als Oktaeder-Gerade des einen Systems erhält man dem Werthe $\delta = \infty$ entsprechend 2 Gerade e (5, 6) und den Werthen $\delta = 0, 2i$ entsprechend 4 Gerade s, als Hexaeder-Gerade desselben Systems 8 den Werthen $\delta = \pm 2\alpha, \pm 2\alpha^2$ entsprechende Gerade und als Kubooktaeder-Gerade einmal 4 Gerade r für die Werthe $\delta = \pm i\sqrt{2}$, sodann 8 Gerade für die Werthe $\delta = \pm 2, \pm 2i\sqrt{2}$. Den Werthen $\delta = \pm 1, \pm i\sqrt{5}$ entsprechen 8 Gerade m (vgl. § 4 (11v)).

Für das zweite System ergeben sich als Oktaeder-Gerade für die Werthenpaare

$$\begin{array}{l|l|l|} \varepsilon_1 = \pm i & \varepsilon_2 = -1 & \varepsilon_1 = \pm i \\ \varepsilon_2 = -1 & \varepsilon_2 = \pm i & \varepsilon_2 = \mp i \end{array}$$

6 Gerade d, als Hexaeder-Gerade für die Werthenpaare

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|} \varepsilon_1 = 0 & \varepsilon_1 = \alpha, \alpha^2 & \varepsilon_1 = \alpha & \varepsilon_1 = \alpha^2 & \varepsilon_1 = \infty \\ \varepsilon_1 = \alpha, \alpha^2 & \varepsilon_2 = 0 & \varepsilon_2 = \alpha^2 & \varepsilon_2 = \alpha & \varepsilon_2 = \infty \end{array}, \ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \alpha, \alpha^2 \Big|$$

entsprechend 8 Gerade k_0, als Kubooktaeder-Gerade endlich 12 Gerade $u_{2,4}$ (vgl. unter (16) und unter 3) dieses §), welche für die Werthenpaare:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|} \varepsilon_1 = 1 & \varepsilon_1 = -1 \pm i\sqrt{2} & \varepsilon_1 = -1 \pm i\sqrt{2} & \varepsilon_1 = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3} & \varepsilon_1 = \frac{-1 \mp i\sqrt{2}}{3} \\ \varepsilon_2 = -1 \pm i\sqrt{2} & \varepsilon_2 = 1 & \varepsilon_2 = -1 \mp i\sqrt{2} & \varepsilon_2 = \frac{-1 \mp i\sqrt{2}}{3} & \varepsilon_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3} \end{array} \ \text{und } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

resultiren.

Diese Erzeugenden des zweiten Systems ergeben sich auch sehr einfach als Axenpaare je zweier Involutionen aus den Gleichungen (21 ε).

6) 240 Flächen $F^{(6)}$.

Jede dieser Flächen wird entweder durch zwei Complexe $C_{(1)}$ und einen Complex $C_{(3)}$ oder durch einen Complex $C_{(1)}$ und zwei, aber nicht in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$ erzeugt; statt des einen dieser beiden letzteren Complexe lässt sich (auf 3 Arten) ein Complex $2x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} = 0$ einführen, welcher mit dem anderen Complexe $C_{(2)}$ in Involution liegt. Durch jedes Geradenpaar e gehen 16 dieser Flächen $F^{(6)}$ hindurch, sodass die Gesammtzahl 240 beträgt und zwar giebt es 24 reelle Flächen, von denen je vier durch eins der imaginären Geradenpaare e hindurchgehen und 216 imaginäre Flächen. Die Gleichungen dieser Flächen $F^{(6)}$ in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten setzen sich linear (die auftretenden Factoren sind $\pm 1, \pm 1, \pm 1$ und $\pm 1, \pm 1, \pm i$) aus den Gleichungen je dreier

der vier Fundamentalflächen $F^{(1)}$ zusammen, welche ein Geradenpaar e gemein haben.

Z. B.: $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2 z_1 z_3 + 2 z_4 z_2 + 2 z_1 z_4 + 2 z_2 z_3 = 0$. . (22α)

oder $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - \zeta_4^2 - 2 \zeta_1 \zeta_3 + 2 \zeta_4 \zeta_2 + 2 \zeta_1 \zeta_4 + 2 \zeta_2 \zeta_3 = 0$. . (22β)

$F_2 - F_6 + F_{10} = 0$ (22γ)

$(x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 x_4^2 + 3 x_6^2 = 0$ (22δ)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{oder} & 3 x_2^2 + 2(x_1 - x_3)^2 + 2(x_3 - x_5)^2 + 2(x_1 - x_3)(x_3 - x_5) = 0 \\ \text{oder} & (-2 x_1 + x_3 + x_5)^2 + 6 x_2^2 + 3(x_3 - x_5)^2 = 0 \\ \text{oder} & (x_1 - 2 x_3 + x_5)^2 + 6 x_2^2 + 3(x_5 - x_1)^2 = 0 \\ \text{oder} & (x_1 + x_3 - 2 x_5)^2 + 6 x_2^2 + 3(x_1 - x_3)^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (22\varepsilon)$$

Erzeugende des einen Systems: $1 \quad 0 \quad 1 \quad \delta \quad 1 \quad \pm i\sqrt{3+\delta^2}$. . . (22ζ)

" " zweiten " $1 \quad \pm i\sqrt{2(\varepsilon^2+\varepsilon+1)} \quad \varepsilon \quad 0 \quad -(1+\varepsilon) \quad 0$. . . (22η)

Als Oktaeder-Gerade des einen Systems ergeben sich für $\delta = \infty$ 1 Geradenpaar e (4, 6), für $\delta = 0, \pm i\sqrt{3}$ 2 Geradenpaare h; als Hexaeder-Gerade 8 den Werthen $\delta = \pm \alpha\sqrt{3}, \pm \alpha^2\sqrt{3}$ entsprechende Gerade; als Kubooktaeder-Gerade für $\delta = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$ 4 Grade l und für $\delta = \pm i\sqrt{6}, +\sqrt{3}$ 8 andere Gerade $\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & \pm i\sqrt{6} & 1 & \pm\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 1 & \pm\sqrt{3} & 1 & \pm i\sqrt{6} \end{Bmatrix}$; für $\delta = \pm i, \pm i\sqrt{2}$ resultiren 8 Gerade $\{1 \quad 0 \quad 1 \quad \pm i \quad 1 \quad \pm i\sqrt{2}\}$ u. s. f.

Die Oktaeder-Geraden des zweiten Systems erhält man für $\varepsilon = 0, \infty, -1$ als 6 Gerade d_0; als Hexaeder-Gerade ergeben sich für $\varepsilon = \alpha, \alpha^2$ 2 Gerade k_0 und ferner 6 Gerade für $\varepsilon = 1, -2, -\frac{1}{2}$; die 12 Kubooktaeder-Geraden sind 12 Gerade $u_{3,3}$ (vgl. (16)), welche für

$$\varepsilon = \pm i, \; -(1 \pm i), \; \frac{-1 \pm i}{2} \text{ resultiren.}$$

7) 480 Flächen $F^{(7)}$.

Diese Flächen werden durch je einen Complex $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ und $C_{(3)}$, welche zu je zweien in Involution liegen, oder durch 3 Complexe $C_{(2)}$ erzeugt, von welchen aber zwei nicht in Involution liegen; für den einen dieser beiden letzteren kann wiederum (auf drei Arten) ein Complex $2x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} = 0$, welcher mit dem anderen in Involution liegt, eingeführt werden. Durch jedes Geradenpaar d_0 gehen vier dieser Flächen hindurch, sodass ihre Gesammtzahl 480 beträgt; 48 dieser Flächen sind reell, die anderen 432 sind imaginär. Die Gleichungen dieser Flächen in tetraedrischen Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten setzen sich linear aus den Gleichungen

von je 6 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ oder aus den Gleichungen von je 3 Flächen $F^{(3)}$ zusammen, von denen je drei durch ein Geradenpaar d_0 hindurchgehen.

Z. B.: $-z_2^2+z_3^2+z_1z_2+z_3z_4-z_1z_3+z_4z_2+2z_1z_4=0$ (23α)

oder $-\zeta_2^2+\zeta_3^2+\zeta_1\zeta_2+\zeta_3\zeta_4-\zeta_1\zeta_3+\zeta_4\zeta_2+2\zeta_1\zeta_4=0$ (23β)

$(F_3-F_2)+(F_8-F_6)+(F_7+F_{10})=0$ (23γ)

$2(x_1-x_3-x_5)^2+3(x_2-x_4)^2+6x_6^2=0$ (23δ)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oder} & 3(x_2+x_4)^2+4(x_1+x_3)^2+4(x_1+x_5)^2-4(x_1+x_3)(x_1+x_5)=0 \\ \text{oder} & 3(x_2+x_4)^2+3(x_3-x_5)^2+(2x_1+x_3+x_5)^2=0 \\ \text{oder} & 3(x_2+x_4)^2+3(x_1+x_5)^2+(x_1+2x_3-x_5)^2=0 \\ \text{oder} & 3(x_2+x_4)^2+3(x_1+x_3)^2+(x_1-x_3+2x_5)^2=0\end{array}\right\}\quad(23\varepsilon)$$

Erzeugende des einen Systems: $-1 \quad \delta \quad 1 \quad -\delta \quad 1 \quad \pm i\sqrt{3+2\delta^2}$. . . (23ζ)

$$\left.\begin{array}{l}\text{„ „ zweiten „} \quad \varepsilon_1+\varepsilon_2 \quad 1 \quad \varepsilon_1 \quad 1 \quad \varepsilon_2 \quad 0, \\ \text{wobei } \varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2+1=0 \text{ ist.}\end{array}\right\}\quad(23\eta)$$

Als Oktaeder-Gerade des einen Systems ergeben sich für $\delta=0$ zwei Gerade h, für $\delta=\infty$ zwei Gerade d_0 und für $\delta=\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$ zwei Gerade l; als Hexaeder-Gerade 8 den Werthen $\delta=\pm\alpha\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\pm\alpha^2\sqrt{\frac{3}{2}}$ entsprechende Gerade und als Kubooktaeder-Gerade 3 . 4 Gerade für die Werthe $\delta=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\pm i\sqrt{3}$ und $\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Den Werthen $\delta=\pm 1$ entsprechen vier Gerade m, den Werthen $\delta=\pm i$ vier Gerade k, den Werthen $\delta=\pm i\sqrt{2}$ vier Gerade r u. s. f.

Die Oktaeder-Geraden des zweiten Systems sind 6 Gerade d, welche für die Werthenpaare $\begin{array}{l}\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=\pm i\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=\pm i\\ \varepsilon_2=0\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=\pm i\\ \varepsilon_2=\pm i\end{array}\Bigg|$ resultiren; als Hexaeder-Gerade ergeben sich für $\begin{array}{l}\varepsilon_1=\infty\\ \varepsilon_2=\infty\end{array}$, $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)=\alpha, \alpha^2$ zwei Gerade k_0 und 6 Gerade für $\begin{array}{l}\varepsilon_1=\pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\\ \varepsilon_2=\mp\frac{i}{\sqrt{3}}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}\\ \varepsilon_2=\pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=\varepsilon_2=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}\\ \end{array}\Bigg|$;

endlich die 12 Kubooktaeder-Geraden entsprechen den Werthenpaaren:

$$\begin{array}{l}\varepsilon_1=\frac{1}{j},\,-j\\ \varepsilon_2=i\sqrt{2}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=j,\,-\frac{1}{j}\\ \varepsilon_2=-i\sqrt{2}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=i\sqrt{2}\\ \varepsilon_2=\frac{1}{j},\,-j\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=-i\sqrt{2}\\ \varepsilon_2=j,\,-\frac{1}{j}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=j\\ \varepsilon_2=-\frac{1}{j}\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=\frac{1}{j}\\ \varepsilon_2=-j\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=-\frac{1}{j}\\ \varepsilon_2=j\end{array}\Bigg|\begin{array}{l}\varepsilon_1=-j\\ \varepsilon_2=\frac{1}{j}\end{array}\Bigg|,$$

aus welchen die Coordinaten: $j \quad 1 \quad \frac{1}{j} \quad 1 \quad i\sqrt{2} \quad 0$ u. s. f. folgen.

8) 320 Flächen $F^{(8)}$.

Die erzeugenden Complexe dieser Flächen sind je ein Complex $C_{(3)}$, und zwei nicht in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$; der eine dieser beiden letzteren kann wiederum (auf 3 Arten) durch einen Complex $2x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} = 0$ ersetzt werden. Es giebt 32 reelle und 288 imaginäre solcher Flächen.

Z. B. $3z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 4(z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) = 0$ (24α)

oder $3\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - \zeta_4^2 + 4(\zeta_3\zeta_4 + \zeta_4\zeta_2 + \zeta_2\zeta_3) = 0$. . . (24β)

$(F_2 + F_3 + F_4) + (F_8 - F_5) + (F_9 - F_6) + (F_{10} - F_7) = 0$. (24γ)

$$\left.\begin{array}{ll} & 2(x_2 + x_4 + x_6)^2 + 3(x_3 - x_5)^2 + (-2x_1 + x_3 + x_5)^2 = 0 \\ \text{oder} & 2(x_2 + x_4 + x_6)^2 + 3(x_5 - x_1)^2 + (x_1 - 2x_3 + x_5)^2 = 0 \\ \text{oder} & 2(x_2 + x_4 + x_6)^2 + 3(x_1 - x_3)^2 + (x_1 + x_3 - 2x_5)^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (24\delta)$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 2(x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3(x_4 - x_6)^2 + (-2x_2 + x_4 + x_6)^2 = 0 \\ \text{oder} & 2(x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3(x_6 - x_2)^2 + (x_2 - 2x_4 + x_6)^2 = 0 \\ \text{oder} & 2(x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3(x_2 - x_4)^2 + (x_2 + x_4 - 2x_6)^2 = 0. \end{array}\right\} \quad (24\varepsilon)$$

Erzeugende des einen Systems: $-(\delta_1 + \delta_2) \;\; 1 \quad \delta_1 \;\; 1 \;\; \delta_2 \;\; 1$. . (24ζ)

„ „ zweiten „ $1 \;\; -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \;\; 1 \;\; \varepsilon_1 \;\; 1 \;\; \varepsilon_2$, . . (24η)

wobei $2(\delta_1^2 + \delta_1\delta_2 + \delta_2^2) + 3 = 0$. . (24ϑ) und $2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) + 3 = 0$. . . (24ι)

Die Oktaeder-Geraden beider Systeme sind je 6 Gerade l, welche den Werthenpaaren für

δ_1 oder $\varepsilon_1 =$	$\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$
δ_2 oder $\varepsilon_2 =$	0	$\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$

entsprechen; die Hexaeder-Geraden je ein Geradenpaar k_0, den Werthen $\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right), \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \alpha, \alpha^2$ entsprechend und je drei Geradenpaare, welche für die Werthe $\begin{array}{l}\delta_1 = \delta_2 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2\end{array} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$

δ_1 oder $\varepsilon_1 = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\pm i\sqrt{2}$	
δ_2 oder $\varepsilon_2 = \pm i\sqrt{2}$	$\pm i\sqrt{2}$	

resultiren; die 12 Kubooktaeder-Geraden entsprechen den Werthcombinationen für

δ_1 oder ε_1	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	$\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}, -j\sqrt{\frac{3}{2}}$	$j\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$j\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-j\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$
δ_2 oder ε_2	$\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}, -j\sqrt{\frac{3}{2}}$	$j\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-j\sqrt{\frac{3}{2}}$	$j\sqrt{\frac{3}{2}}$

Für das Folgende kommt insbesondere der Flächenbüschel in Betracht, dessen Basis das durch die beiden Geradenpaare k_0 bestimmte Vier-

seit ist; diesem Büschel gehört ausser einer Fläche $F^{(8)}$ noch eine Fundamentalfläche $F^{(1)}$ an. Diese beiden Flächen sind sich selbst entsprechende Flächen für die Correlationen, welche in § 14 unter B) untersucht werden.

9) 960 Flächen $F^{(9)}$.

Dieselben werden durch je einen Complex $C_{(6)}$ und zwei nicht in Involution liegende Complexe $C_{(4)}$ erzeugt; der eine dieser beiden letzteren kann (auf 3 Arten) durch einen Complex

$$-2(x_{i_1} \pm x_{i_2}) + (x_{i_3} \pm x_{i_4}) + (x_{i_5} \pm x_{i_6}) = 0$$

ersetzt werden. Solcher Flächen giebt es 96 reelle und 864 imaginäre.

Z. B. $$3z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 4(z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) = 0 \quad . \; . \; . \quad (25\alpha)$$
$$3\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 - 4(\zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3) = 0 \quad . \; . \quad (25\beta)$$
$$3F_1 + (F_2 + F_3 + F_4) + 2(F_5 - F_8) + 2(F_6 - F_9) + 2(F_7 - F_{10}) = 0 \quad . \quad (25\gamma)$$

Erzeugende Complexe:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = x_5 - x_6 \end{matrix}\right\} (25\delta) \text{ oder } \left.\begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 \,. \end{matrix}\right\} (25\varepsilon)$$

Gleichungen in x_i-Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} 2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2 + [-2(x_1-x_2)+(x_3-x_4)+(x_5-x_6)]^2 + 3[(x_3-x_4)-(x_5-x_6)]^2 = 0 \\ \text{oder } 2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2 + [(x_1-x_2)-2(x_3-x_4)+(x_5-x_6)]^2 + 3[(x_5-x_6)-(x_1-x_2)]^2 = 0 \\ \text{oder } 2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2 + [(x_1-x_2)+(x_3-x_4)-2(x_5-x_6)]^2 + 3[(x_1-x_2)-(x_3-x_4)]^2 = 0 \end{array}\right\} (25\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{oder } 2(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6)^2 + [-2(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+(x_5+x_6)]^2 + 3[(x_3+x_4)-(x_5+x_6)]^2 = 0 \\ \text{oder } 2(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6)^2 + [(x_1+x_2)-2(x_3+x_4)+(x_5+x_6)]^2 + 3[(x_5+x_6)-(x_1+x_2)]^2 = 0 \\ \text{oder } 2(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_5)^2 + [(x_1+x_2)+(x_3+x_4)-2(x_5+x_6)]^2 + 3[(x_1+x_2)-(x_3+x_4)]^2 = 0. \end{array}\right\} (25\eta)$$

Von den Erzeugenden beider Systeme genüge es die beiden Geradenpaare t (vgl. § 4 7)) (13ϑ))

$$\left.\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 1 & -1 & \alpha^2 & -\alpha^2 & \alpha & -\alpha \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & \alpha \end{matrix}\right\} \text{ zu erwähnen.}$$

Diese beiden Geradenpaare bestimmen ein Vierseit, welches als Basis eines Flächenbüschels bei den in § 21 B) zu untersuchenden Correlationen in Betracht kommt. Je eine Fläche $F^{(9)}$ und eine Fläche $F^{(2)}$ sind für diese Correlationen sich selbst entsprechende Flächen.

10) 360 Flächen $F^{(10)'}$ und 360 Flächen $F^{(10)''}$.

Diese beiden Gruppen von Flächen werden bez. durch einen Complex $C_{(1)}$ oder einen Complex $C_{(2)}$ und je zwei Complexe erzeugt, deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{matrix} \pm\sqrt{2}\; x_{i_1} & \pm x_{i_3} & \pm x_{i_4} = 0 \\ \pm\sqrt{2}\; x_{i_2} & \pm x_{i_3} & \mp x_{i_4} = 0 \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26\alpha)$$

Je zwei Flächen der ersten und der zweiten Gruppe gehören demselben Büschel an, dessen Basis ein windschiefes Vierseit mit zwei Kantenpaaren q ist, dessen Eckpunkte (Seitenflächen) je 2 Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (je 2 Ebenen ε und $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$) sind. (Vgl. § 4 5) und § 2 2) und (10γ)). Die 360 Flächen $F^{(10)'}$ sind durchweg imaginär, von den 360 Flächen $F^{(10)''}$ sind 72 reell und 288 imaginär. Im folgenden Beispiel sind durch ihre Gleichungen die beiden Flächenpaare $F^{(10)'}$ und $F^{(10)''}$ dargestellt, welche durch das Kantenvierseit der beiden Geradenpaare q:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{j} & -i & j & 0 & 0 \\ 1 & j & i & \frac{1}{j} & 0 & 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & -\frac{1}{j} & -i & -j & 0 & 0 \\ 1 & -j & i & -\frac{1}{j} & 0 & 0 \end{array}\right. \end{array}\right\} (26\beta)$$

mit den Eckpunkten (Flächen):

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{e} \ldots 1 & 0 & 0 & i & \ldots\ldots & \varepsilon \\ \mathfrak{e} \ldots 1 & 0 & 0 & -i & \ldots\ldots & \varepsilon \\ \mathfrak{i}_0^{(e)} \ldots 0 & 1 & \sqrt{2}+1 & 0 & \ldots & \iota_0^{(e)} \\ \mathfrak{i}_0^{(e)} \ldots 0 & 1 & -(\sqrt{2}-1) & 0 & \ldots & \iota_0^{(e)} \end{array}\right\} (26\gamma)$$

hindurchgehen. Die Gleichungen der beiden Flächen $F^{(10)'}$ werden:

$$\sqrt{2}\,(z_1^2 + z_4^2) - i\,(z_2^2 + 2\,z_2 z_3 - z_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\delta'_1)$$

$$\sqrt{2}\,(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) + i\,(\zeta_2^2 + 2\,\zeta_2 \zeta_3 - \zeta_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\varepsilon'_1)$$

$$\sqrt{2}\,(F_1 + F_4) - i\,(F_2 - F_3 + F_{10} - F_7) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\zeta'_1)$$

$$4\,x_5^2 + (x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 + x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad \ldots \quad (26\eta'_1)$$

oder $$4\,x_6^2 + (-x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 - x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad \ldots \quad (26\vartheta'_1);$$

und $$\sqrt{2}\,(z_1^2 + z_4^2) + i\,(z_2^2 + 2\,z_2 z_3 - z_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\delta'_2)$$

$$\sqrt{2}\,(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) - i\,(\zeta_2^2 + 2\,\zeta_2 \zeta_3 - \zeta_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\varepsilon'_2)$$

$$\sqrt{2}\,(F_1 + F_4) + i\,(F_2 - F_3 + F_{10} - F_7) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\zeta'_2)$$

$$4\,x_5^2 + (-x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 - x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad \ldots \quad (26\eta'_2)$$

oder $$4\,x_6^2 + (x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 + x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad \ldots \quad (26\vartheta'_2).$$

Die entsprechenden Gleichungen der beiden Flächen $F^{(10)''}$ werden:

$$\sqrt{2}\,(z_1^2 + z_4^2) - (z_2^2 + 2\,z_2 z_3 - z_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\delta''_1)$$

$$\sqrt{2}\,(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) - (\zeta_2^2 + 2\,\zeta_2 \zeta_3 - \zeta_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\varepsilon''_1)$$

$$\sqrt{2}\,(F_1 + F_4) - (F_2 - F_3 + F_{10} - F_7) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\zeta''_1)$$

$$2\,(x_5 - x_6)^2 + (x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 + x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad (26\eta''_1)$$

oder $$2\,(x_5 + x_6)^2 + (-x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 - x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad . \quad (26\vartheta''_1);$$

und $$\sqrt{2}\,(z_1^2 + z_4^2) + (z_2^2 + 2\,z_2 z_3 - z_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\,\delta_2'')$$

$$\sqrt{2}\,(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) + (\zeta_2^2 + 2\,\zeta_2 \zeta_3 - \zeta_3^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\,\varepsilon_2'')$$

$$\sqrt{2}\,(F_1 + F_4) + (F_2 - F_3 + F_{10} - F_7) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26\zeta''_2)$$

$$2\,(x_5 - x_6)^2 + (-x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 - x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad . \quad (26\eta''_2)$$

oder $$2\,(x_5 + x_6)^2 + (x_1\sqrt{2} + x_2 + x_4)^2 + (x_2 + x_3\sqrt{2} - x_4)^2 = 0 \quad \ldots \quad (26\vartheta''_2)$$

Von Erzeugenden dieser Flächen kommen nur die oben erwähnten beiden Geradenpaare q für das Folgende in Betracht. Das durch 2 Geradenpaare q bestimmte Vierseit und der Flächenbüschel, dessen Basis dieses Vierseit ist, wird bei den in § 15 A) B) 2) und § 19 A) B) 2) zu untersuchenden Collineationen und Correlationen auftreten.

11) 1152 Flächen $F^{(11)}$.

Je zwei dieser durchweg imaginären Flächen gehören einem Büschel an, dessen Basis ein windschiefes Vierseit mit zwei Kantenpaaren n (vgl. § 4 13τ)) ist, während das dritte Kantenpaar durch 2 Gerade m (vgl. § 4 13σ)) gebildet ist. Die erzeugenden linearen Complexe einer solchen Fläche sind ein Complex $C_{(1)}$ oder ein Complex $C_{(5)}$ (diese beiden Complexe bestimmen ein Strahlensystem mit dem Axenpaare m) und je zwei specielle Complexe, deren Leitgerade je eine Gerade n ist. Statt dieser beiden speciellen können zwei allgemeine lineare Complexe, welche untereinander und mit dem ersteren in Involution liegen, eingeführt werden. So gehen z. B. durch die beiden Geradenpaare n

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right) \qquad \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 \\ 0 & 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon & \varepsilon^3 \\ 0 & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^4 & \varepsilon^2 \end{Bmatrix} \quad \ldots (27\alpha)$$

folgende beide Flächen $F^{(11)}$ hindurch (vgl. § 4 ⊙ unter 8b)):

$$10x_1^2 + \left[2x_2 + (x_3 + x_6)\operatorname{tg}\varphi - (x_4 + x_5)\operatorname{cotg}\varphi\right]^2 + \left[(x_3 - x_6)\frac{1}{\sin\varphi} + (x_4 - x_5)\frac{1}{\cos\varphi}\right]^2 = 0 \quad \ldots\ldots (27\beta_1)$$

oder

$$2\left[x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\right]^2 + \left[2x_2 - (x_3 + x_6)\operatorname{cotg}\varphi + (x_4 + x_5)\operatorname{tg}\varphi\right]^2 + \left[(x_3 - x_6)\frac{1}{\cos\varphi} - (x_4 - x_5)\frac{1}{\sin\varphi}\right]^2 = 0 \ldots (27\gamma_1)$$

und

$$10x_1^2 + \left[2x_2 - (x_3 + x_6)\operatorname{cotg}\varphi + (x_4 + x_5)\operatorname{tg}\varphi\right]^2 + \left[(x_3 - x_6)\frac{1}{\cos\varphi} - (x_4 - x_5)\frac{1}{\sin\varphi}\right]^2 = 0 \quad \ldots\ldots (27\beta_2)$$

oder

$$2\left[x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\right]^2 + \left[2x_2 + (x_3 + x_6)\operatorname{tg}\varphi - (x_4 + x_5)\operatorname{cotg}\varphi\right]^2 + \left[(x_3 - x_6)\frac{1}{\sin\varphi} + (x_4 - x_5)\frac{1}{\cos\varphi}\right]^2 = 0 \ldots (27\gamma_2)$$

Die Gesammtzahl dieser Flächen beträgt 1152, da die Zahl der Geraden n, von denen je zwei Paare Erzeugende sind, 2304 ist. Der Flächenbüschel, dessen Basis das durch zwei Geradenpaare n bestimmte Vierseit ist, wird sich bei den in § 16 A) B) zu betrachtenden 10-zähligen

Correlationen und 5-zähligen Collineationen darbieten; je zwei einem solchen Büschel angehörigen Flächen $F^{(11)}$ sind sich selbst entsprechend.

Die Kernflächen dieser und der unter 8) bis 10) erwähnten Correlationen werden sich einfach bei den bezügl. Transformationen ergeben.

§ 8.

C) Complexe zweiten Grades.

I. Tetraedrale (Reye'sche) Complexe.

Die tetraedralen Complexe, welche für die im Folgenden zu untersuchenden allgemeinen Collineationen (die den besonderen Collineationen, z. B. den involutorisch-geschaarten, den geschaarten und den axialen Collineationen entsprechenden Ausartungen sind leicht zu erledigen) in Betracht kommen, ergeben sich bekanntlich[1]) sowohl als der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte und der Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden collinearen Räume, wie auch als Ort der Geraden, welche ihre entsprechenden schneiden. Für eine Collineation, welche der Substitution:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma x_1' = c_1 x_{i_1} \\ \sigma x_2' = c_2 x_{i_2} \\ \vdots \\ \sigma x_6' = c_6 x_{i_6} \end{array}\right\} \quad c_i = \pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28\alpha)$$

entspricht, ist der zugehörige tetraedrale Complex durch die Gleichung:

$$\Omega \equiv c_1 x_1 x_{i_1} + c_2 x_2 x_{i_2} + \ldots\ldots + c_6 x_6 x_{i_6} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (28\beta)$$

dargestellt. Die Wurzeln der Gleichung 6ten Grades, welche durch Nullsetzen der Determinante von $\Omega + \nu P$ entsteht (wo $P = \Sigma x_i^2$ ist) sind in diesem Falle[2]) drei Paare von Doppelwurzeln $\nu_1 = \nu_2$, $\nu_3 = \nu_4$, $\nu_5 = \nu_6$.

Die 6 Kanten des Haupttetraeders entsprechen den Wurzeln der Gleichung 6ten Grades in σ, welche aus dem System:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma x_1 = c_1 x_{i_1} \\ \sigma x_2 = c_2 x_{i_2} \\ \ldots\ldots \\ \sigma x_6 = c_6 x_{i_6} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28\gamma)$$

[1]) Vgl. Th. Reye: Geometrie der Lage. 2 Abt. Vortrag 18 (2. Aufl.) — R. Sturm: Liniengeometrie I S. 342. — Clebsch-Lindemann: Vorlesungen II. 1. S. 393.

[2]) Vgl. A. Weiler: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. Ann. Bd. 7 S. 169 unter 5. (Fall [(11) (11) (11)].

resultirt. Wird das Haupttetraeder als Coordinatentetraeder gewählt, so ist die Collineation durch

$$\tau Z_i' = \alpha_i Z_i \quad . \; . \; . \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\delta)$$

dargestellt. Für

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\varepsilon')$$

d. h. für den Fall einer **eigentlichen** (**Hermite**'schen) Collineation werden alle Complexe des Büschels

$$P_{14} + \varrho' P_{23} = 0 \quad \text{oder} \quad X_5 + \varkappa' X_6 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\zeta')$$

und alle Flächen des Büschels

$$Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\eta')$$

welche durch das entsprechende Kantenvierseit des Haupttetraeders hindurchgehen, in sich transformirt. Die Gleichung des tetraedralen Complexes wird alsdann durch

$$\nu_1 P_{12} P_{34} + \nu_3 P_{13} P_{42} + \nu_5 P_{14} P_{23} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\vartheta_1')$$

oder durch $\nu_1 (X_1^2 + X_2^2) + \nu_3 (X_3^2 + X_4^2) + \nu_5 (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad . \quad (28\vartheta_2')$

dargestellt, wobei die X_i selbstverständlich der Identität $\sum_1^6 X_i^2 = 0$ genügen müssen und

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4 \\ \nu_3 = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_2 \\ \nu_5 = \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\iota)$$

ist. Ist zugleich

$$\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2 \alpha_4, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\varepsilon'')$$

so erhält man einen zweiten Complexbüschel

$$P_{13} + \varrho'' P_{42} = 0 \quad \text{oder} \quad X_3 + \varkappa'' X_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28\zeta'')$$

und einen zweiten Flächenbüschel

$$Z_1 Z_3 + \lambda'' Z_4 Z_2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\eta'')$$

dessen Elemente durch die Substitution (28δ) in sich transformirt werden.

Wenn aber $\alpha_1 \alpha_2 = -\alpha_3 \alpha_4$ und ausserdem $\alpha_1 = -\alpha_2$ (oder $\alpha_3 = -\alpha_4$) (28$\varkappa$)

ist, so liegt eine **uneigentliche** Collineation (zweiter Art[1]) vor; dann existirt ein Netz (Gewebe) sich selbst entsprechender Flächen:

$k Z_1^2 + l Z_2^2 + 2m Z_3 Z_4 = 0$. . . (28λ') (bez. $k' Z_3^2 + l' Z_4^2 + 2m' Z_3 Z_4 = 0$) . . . (28$\lambda''$)

[1]) Vgl. R. **Sturm**: Ueber Collineationen und Correlationen. Math. Ann. Band 26. S. 471 unter III.

und ein Gebüsch sich involutorisch entsprechender Flächen (welches das Netz umfasst):

$$k\,Z_1^2 + l\,Z_2^2 + 2m\,Z_3\,Z_4 + 2\,n\,Z_1\,Z_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (28\mu')$$

$$\text{bez. } k'\,Z_3^2 + l'\,Z_4^2 + 2m'\,Z_1\,Z_2 + 2n'\,Z_3\,Z_4 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (28\mu'')$$

Von Complexen bleiben nur die 6 speciellen fest, deren Leitgerade je eine der 6 Kanten des Haupttetraeders ist.

Alle diese Fälle werden sich im Folgenden darbieten. Hier sollen nur die auftretenden Haupttetraeder nebst den zugehörigen tetraedralen Complexen übersichtlich zusammengestellt werden.

1) 45 tetraedrale Complexe:

$$x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 - x_{i_3}^2 - x_{i_4}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29\alpha)$$

$\nu_1 = 0,\ \nu_3 = 1,\ \nu_5 = -1.$ Das Tetraeder ist eins der 15 Fundamentaltetraeder, zu deren jedem drei solcher Complexe gehören. Z. B. zu dem Fundamentaltetraeder T_{15},[1]) dessen Kantenpaare

$$\left.\begin{array}{llllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} \ldots (23) \ldots & 0 & 1 & \pm i & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} \text{ und } K_{42} \ldots (15) \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \pm i & 0 \\ K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots (46) \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm i, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (29\beta)$$

dessen Ecken und Seitenflächen die Punkte $\mathfrak{e}_{57} - \mathfrak{e}_{60}$ und die Ebenen $\varepsilon_{57} - \varepsilon_{60}$ sind, gehören die 3 tetraedralen Complexe:

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_5^2 = 0 \\ x_1^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0 \\ -x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29\gamma)$$

Wird das zugehörige Tetraeder zum Coordinatentetraeder gewählt, so erhalten die Gleichungen der Complexe die Formen:

$$\left.\begin{array}{ll} \nu_1 = 0,\ \nu_3 = 1,\ \nu_5 = -1 \ldots & (X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \\ \nu_1 = -1,\ \nu_3 = 0,\ \nu_5 = 1 \ \ldots & -(X_1^2 + X_2^2) + (X_5^2 + X_6^2) = 0 \\ \nu_1 = 1,\ \nu_3 = -1,\ \nu_5 = 0 \ldots & (X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (29\delta)$$

2) 180 tetraedrale Complexe:

$$-x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 \pm 2\,x_{i_3}\,x_{i_4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30\alpha)$$

$\nu_1 = 0,\ \nu_3 = 1,\ \nu_5 = -1.$ Das Tetraeder hat zu Kanten ein Geradenpaar e und zwei Geradenpaare d_0, zu Eckpunkten (Seitenflächen) zwei (zugleich reelle oder imaginäre) Punkt-(Ebenen-)Paare $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(d)}$ $(\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)})$ (vgl. (12ε)

[1]) Vgl. A_1 § 2 (2β).

in § 3); zu jedem Tetraeder gehört ein Complex, dessen Gleichung auf das Tetraeder bezogen wird: $(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0$ (30β).

Z. B. Eckpunkte Z_i und Flächen Z_i:

$$\left.\begin{array}{llllllll} Z_1 & \ldots & 1 & -i & j & \frac{1}{j} & \ldots & Z_4 \\ Z_2 & \ldots & 1 & -i & -j & -\frac{1}{j} & \ldots & Z_3 \\ Z_3 & \ldots & 1 & i & -\frac{1}{j} & -j & \ldots & Z_2 \\ Z_4 & \ldots & 1 & i & \frac{1}{j} & j & \ldots & Z_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30\gamma)$$

Kantenpaare K_{ik}:

$$\left.\begin{array}{llllllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm i & 0 & \ldots & e \\ K_{13} \quad „ \quad K_{42} & \ldots & 0 & \pm i\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & d_0 \\ K_{14} \quad „ \quad K_{23} & \ldots & \pm i\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots & d_0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30\delta)$$

Tetraedraler Complex: $-x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_4\,x_6 = 0$ (30ε)

3) 90 tetraedrale Complexe:

$$x_{i_1}\,x_{i_2} - x_{i_3}\,x_{i_4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31\alpha)$$

$\nu_1 = 0$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Kanten des Tetraeders sind je ein Geradenpaar e und zwei Geradenpaare d; die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je zwei Punktpaare $\mathfrak{e}$ (Ebenenpaare ε), welche zwei verschiedenen Fundamentaltetraedern zugehören; zu jedem Tetraeder gehört ein Complex:

$$(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31\beta)$$

$$\text{Z. B.}\ \left.\begin{array}{llllllllllll} Z_1 & \ldots & \mathfrak{e}_{13} & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots & \varepsilon_{13} & \ldots & Z_1 \\ Z_2 & \ldots & \mathfrak{e}_{14} & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots & \varepsilon_{14} & \ldots & Z_2 \\ Z_3 & \ldots & \mathfrak{e}_{27} & \ldots & 1 & i & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{28} & \ldots & Z_4 \\ Z_4 & \ldots & \mathfrak{e}_{28} & \ldots & 1 & -i & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{27} & \ldots & Z_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{llllllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} & \ldots & 1 & \pm i & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & e \\ K_{13} \quad „ \quad K_{42} & \ldots & 0 & 0 & 1 & -1 & \pm i & \pm i & \ldots & d \\ K_{14} \quad „ \quad K_{23} & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \pm i & \mp i & \ldots & d \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31\delta)$$

Tetraedraler Complex: $x_3\,x_4 - x_5\,x_6 = 0$ (31ε)

4) 360 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^4 (+\,x_{i_1}\,x_{i_2}) + x_{i_5}^2 - x_{i_6}^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32\alpha)$$

wobei das Zeichen + (bez. —) unter dem Summenzeichen bedeutet, dass für die vier, cyclischen Vertauschungen entsprechenden Glieder der Summe

die positiven (bez. negativen) Vorzeichencombinationen gelten; $\nu_1 = 0$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Kanten der 360 Tetraeder sind je ein Geradenpaar d, von denen jedes 2mal, und je zwei Geradenpaare s (vgl. § 4 unter 6)), von denen jedes 3mal auftritt; die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je 4 Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$, vgl. § 3 unter (12η)); von diesen durchweg imaginären 480 Punkten $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) tritt jedes Element 3mal auf. Zu jedem Tetraeder gehört ein Complex: $(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0$. . . (32β)

$$\text{Z. B.}\quad \left.\begin{array}{llllllllll} Z_1 \ldots & 1+i & 1 & -1 & 0 & Z_2 \ldots & 1-i & 1 & -1 & 0 \\ Z_2 \ldots & -(1+i) & 1 & -1 & 0 & Z_1 \ldots & -(1-i) & 1 & -1 & 0 \\ Z_3 \ldots & 0 & 1 & 1 & 1-i & Z_4 \ldots & 0 & 1 & 1 & 1+i \\ Z_4 \ldots & 0 & 1 & 1 & -(1-i) & Z_3 \ldots & 0 & 1 & 1 & -(1+i) \end{array}\right\} \ldots (32\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{lllllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} \ldots & 1 & \pm i & -1 & \mp i & 0 & 0 & \ldots d \\ K_{13} \quad " \quad K_{42} \ldots & 1 & -1 & 1 & -1 & \pm 2i & 0 & \ldots s \\ K_{14} \quad " \quad K_{23} \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \pm 2i & \ldots s \end{array}\right\} \ldots (32\delta)$$

Tetraedraler Complex: $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 - x_5^2 + x_6^2 = 0$. . . (32ε)

5) 360 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^4 (+ x_{i_1} x_{i_2}) \pm 2 x_{i_5} x_{i_6} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33\alpha)$$

$\nu_1 = 0$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Kanten der 360 Tetraeder sind je ein Geradenpaar d, von denen jedes 2mal, und je zwei Geradenpaare r (vgl. § 4 unter 3)), von denen jedes 3mal auftritt; die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je 2 Punktpaare $\mathfrak{d}_0$ (Ebenenpaare δ_0, vgl. § 3 unter (12γ)); jeder dieser 1440 Punkte (Ebenen) tritt einmal auf. Zu jedem Tetraeder gehört ein Complex: $(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0$ (33β).

$$\text{Z. B.}\quad \left.\begin{array}{llllll} Z_1 \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots Z_1 \\ Z_2 \ldots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots Z_2 \\ Z_3 \ldots & -1 & 0 & i\sqrt{2} & 1 & \ldots Z_4 \\ Z_4 \ldots & -1 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 & \ldots Z_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (33\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} \ldots & 1 & \mp i & 1 & \pm i & 0 & 0 & \ldots d \\ K_{13} \quad " \quad K_{42} \ldots & 1 & 1 & -1 & 1 & \pm i\sqrt{2} & \mp i\sqrt{2} & \multirow{2}{*}{$\}\, r$} \\ K_{14} \quad " \quad K_{23} \ldots & -1 & 1 & 1 & 1 & \pm i\sqrt{2} & \pm i\sqrt{2} & \end{array}\right\} \ldots (33\delta)$$

Tetraedraler Complex: $-x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 - x_4 x_1 + 2 x_5 x_6 = 0$. . . (33ε)

6) 360 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^4 (-x_{i_1} x_{i_2}) + x_{i_5}^2 + x_{i_6}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34\alpha)$$

$\nu_1 = -1$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = \pm\sqrt{2}$. Die Kanten der 180 Tetraeder sind je ein Geradenpaar e, von denen jedes 12 mal, und je 2 Geradenpaare q (vgl. § 4 unter 5)), von denen jedes einmal auftritt; die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je ein Punktpaar $\mathfrak{e}$ (ein Ebenenpaar ε) und je ein Punktpaar $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (ein Ebenenpaar $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$). Zu jedem Tetraeder gehören zwei Complexe:

$$-(X_1^2 + X_2^2) + (X_3^2 + X_4^2) \pm \sqrt{2}\,(X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad . \; . \; . \; (34\beta)$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} Z_1 \ldots \mathfrak{i}_0^{(e)} \ldots & 0 & 1 & \sqrt{2}-1 & 0 \ldots \iota_0^{(e)} \ldots & Z_1 \\ Z_2 \ldots \mathfrak{e}_{35} \ldots & 1 & 0 & 0 & i \ldots \varepsilon_{36} \ldots & Z_3 \\ Z_3 \ldots \mathfrak{e}_{36} \ldots & 1 & 0 & 0 & -i \ldots \varepsilon_{35} \ldots & Z_2 \\ Z_4 \ldots \mathfrak{i}_0^{(e)} \ldots & 0 & 1 & -(\sqrt{2}+1) & 0 \ldots \iota_0^{(e)} \ldots & Z_4 \end{array}\right\} \; . \; . \; (34\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \pm i \ldots e \\ \left.\begin{array}{lcccccc} \left\{K_{12} \ldots \ldots\right. & 1 & \frac{1}{j} & i & -j & 0 & 0 \\ \left. K_{34} \ldots \ldots\right. & 1 & j & -i & -\frac{1}{j} & 0 & 0 \\ \left\{K_{13} \ldots \ldots\right. & 1 & -j & -i & \frac{1}{j} & 0 & 0 \\ \left. K_{43} \ldots \ldots\right. & 1 & -\frac{1}{j} & i & j & 0 & 0 \end{array}\right\} \ldots q \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34\delta)$$

Tetraedrale Complexe: $-x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 \pm (x_5^2 + x_6^2) = 0$. . (34ε)

7) 180 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^4 (-x_{i_1} x_{i_2}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35\alpha)$$

$\nu_1 = 0$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Tetraeder sind dieselben wie unter 6), wenn man in der Bezeichnung Z_2, Z_3, Z_4 bez. durch Z_3, Z_4, Z_2, also K_{14}, K_{23} durch K_{12}, K_{34} ersetzt. Zu jedem Tetraeder gehört ein Complex:

$$(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35\beta)$$

welcher für das Beispiel die Gleichung:

$$-x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35\varepsilon)$$

hat.

8) 240 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^3 (+x_{i_1} x_{i_2}) + x_{i_4}^2 - x_{i_5}^2 - x_{i_6}^2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36\alpha)$$

wobei wiederum das erste Symbol bedeutet, dass für die drei, cyclischen Vertauschungen entsprechenden Glieder der Summe die positiven Vorzeichencombinationen gelten; $\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Kanten des Tetraeders sind je ein Geradenpaar k_0 (vgl. § 3 unter (11)), je ein Geradenpaar e und h (vgl. § 4 unter 1)); die Eckpunkte (Seitenflächen) sind 4 Punkte (Ebenen)

$\mathfrak{h}^{(e)}_0 = \mathfrak{f}^{(k)}_0$ $(({}^{(e)}_0 = \varphi^{(k)}_0)$ (vgl. § 3 unter (12δ)). Zu jedem der 240 Tetraeder gehört ein tetraedraler Complex:

$$\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) + (X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (36\beta)$$

$$\text{oder} \quad 3(X_1^2 + X_2^2) + 4(X_3^2 + X_4^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36\beta')$$

Z. B. (vgl. (12δ) in § 3 und unter 7) in § 4).

$$\left.\begin{array}{llllll} Z_1 \ldots & 1 & i & \frac{1}{j}c_1 & -jc_1 & \ldots Z_4 \\ Z_2 \ldots & 1 & -i & -jc_2 & \frac{1}{j}c_2 & \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots & 1 & i & -\frac{1}{j}c_2 & jc_2 & \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots & 1 & -i & jc_1 & -\frac{1}{j}c_1 & \ldots Z_1 \end{array}\right\} \ldots (36\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{llllllll} K_{12} & \ldots\ldots\ldots & 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ K_{34} & \ldots\ldots\ldots & 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right\} k_0 \\ K_{13} \text{ und } K_{42} \ldots 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \pm i \ldots e \\ K_{14} \;\; \text{„} \;\; K_{23} \ldots 1 \;\; \pm i\sqrt{3} \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \ldots h \end{array}\right\} (36\delta)$$

Tetraedraler Complex: $x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1 + x_2^2 - x_4^2 - x_6^2 = 0 \; . \; . \; . \; (36\varepsilon)$

9) 240 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^3 (+ x_{i_1} x_{i_2}) + x_{i_4}^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37\alpha)$$

$\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_3 = 0$, $\nu_5 = -1$. Die Tetraeder sind von derselben Beschaffenheit wie unter 8); zu jedem Tetraeder gehört ein Complex:

$$\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37\beta)$$

$$\text{oder} \quad 3(X_1^2 + X_2^2) + 2(X_3^2 + X_4^2) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (37\beta')$$

welcher für das Beispiel die Gleichung:

$$-x_1 x_3 - x_3 x_5 + x_5 x_1 + x_6^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37\gamma)$$

erhält; die Coordinaten der Elemente des Haupttetraeders, welches diesem Beispiele entspricht, sind unter III) 5) dieses § in den Formeln (53ϑ) und (53ι) angegeben.

10) 480 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^3 (- x_{i_1} x_{i_2}) + 2 x_{i_4} x_{i_5} - x_{i_6}^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38\alpha)$$

$\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_3 = 1$, $\nu_5 = -1$. Die Kanten des Tetraeders sind je ein Geradenpaar k_0, je ein Geradenpaar d_0 und je ein Geradenpaar l (vgl. § 4 unter 2)); die Eckpunkte (Seitenflächen) sind 4 Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_0 = \mathfrak{i}^{(k)}_0$ (4 Ebenen $({}^{(d)}_0 = \iota^{(k)}_0$)

(vgl. § 3 unter (12ζ)). Zu jedem der 480 Tetraeder gehört ein tetraedraler Complex:

$$\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)+(X_3^2+X_4^2)-(X_5^2+X_6^2)=0 \text{ oder } 3(X_1^2+X_2^2)+4(X_3^2+X_4^2)=0 \;..\; (38\beta)$$

$$\text{Z. B.}\left.\begin{array}{llllll} Z_1 \;...& -(i+\sqrt{2}) & i+\alpha\sqrt{2} & i+\alpha^2\sqrt{2} & \sqrt{3} & ...\; Z_4 \\ Z_2 \;...& -(i-\sqrt{2}) & i-\alpha\sqrt{2} & i-\alpha^2\sqrt{2} & -\sqrt{3} & ...\; Z_3 \\ Z_3 \;...& -(i+\sqrt{2}) & i+\alpha^2\sqrt{2} & i+\alpha\sqrt{2} & \sqrt{3} & ...\; Z_2 \\ Z_4 \;...& -(i-\sqrt{2}) & i-\alpha^2\sqrt{2} & i-\alpha\sqrt{2} & -\sqrt{3} & ...\; Z_1 \end{array}\right\} (38\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{cases} K_{12} \;...\; -1 \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha^2 \quad 0 \\ K_{34} \;...\; -1 \quad 0 \quad \alpha^2 \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \end{cases}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; k_0 \\ K_{13} \text{ und } K_{42} \;...\; 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad \pm i\sqrt{2} \quad ...\; d_0 \\ K_{14} \;\text{,,}\; K_{23} \;...\; \sqrt{2} \quad \pm i\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad \pm i\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad 0 \;...\; l \end{array}\right\} (38\delta)$$

Tetraedraler Complex: $-x_1x_3+x_3x_5-x_5x_1+2x_2x_4-x_6^2=0$. . . (38ε)

11) 960 tetraedrale Complexe: $\sum_1^6(-x_{i_1}x_{i_2})=0$. (39α)

$\nu_1=0$, $\nu_3=1$, $\nu_5=-1$. Die Kanten des Tetraeders sind je ein Geradenpaar k (vgl. § 3 unter (11)) und je zwei Geradenpaare p', p'' (vgl. § 4 unter 4)); die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je ein Punkt $\mathfrak{e}$ und ein Punkt $\mathfrak{d}$ (je eine Ebene ε und eine Ebene δ) und je ein Punktpaar $\mathfrak{k}_0$ (ein Ebenenpaar $\varkappa_0$) (vgl. § 3 unter (12β)). Zu jedem der 960 Tetraeder gehört ein Complex:

$$(X_3^2+X_4^2)-(X_5^2+X_6^2)=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (39\beta)$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} Z_1 \;...\; \mathfrak{e}_1 \;... & 1 & 0 & 0 & 0 & ...\; \varepsilon_1 & ...\; Z_1 \\ Z_2 \;...\; \mathfrak{d} \;... & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & ...\; \delta & ...\; Z_2 \\ Z_3 \;...\; \mathfrak{k}_0 \;... & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha & ...\; \varkappa_0 & ...\; Z_4 \\ Z_4 \;...\; \mathfrak{k}_0 \;... & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & ...\; \varkappa_0 & ...\; Z_3 \end{array}\right\} \;..\; (39\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} K_{12} \text{ und } K_{34} \;... & 1 & \pm i & 1 & \pm i & 1 & \pm i & ...\; k \\ \{K_{13} \;... & 1 & -i & \alpha^2 & -\alpha^2 i & \alpha & -\alpha i & ...\; p' \\ \{K_{42} \;... & 1 & i & \alpha & \alpha i & \alpha^2 & \alpha^2 i & ...\; p'' \\ \{K_{14} \;... & 1 & -i & \alpha & -\alpha i & \alpha^2 & -\alpha^2 i & ...\; p' \\ \{K_{23} \;... & 1 & i & \alpha^2 & \alpha^2 i & \alpha & \alpha i & ...\; p'' \end{array}\right\} \;..\; (39\delta)$$

Tetraedraler Complex:

$$x_1x_6-x_6x_3+x_3x_2-x_2x_5+x_5x_4-x_4x_1=0 \;.\;.\;.\; (39\varepsilon)$$

12) 1152 tetraedrale Complexe:

$$\sum_1^5(+x_{i_1}x_{i_2})+x_{i_6}^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (40\alpha)$$

$\nu_1^{(1)}=-\cos\frac{\pi}{5}$, $\nu_3^{(1)}=\sin\frac{\pi}{10}$, $\nu_5^{(1)}=1$ und $\nu_1^{(2)}=\sin\frac{\pi}{10}$, $\nu_3^{(2)}=-\cos\frac{\pi}{5}$, $\nu_5^{(2)}=1$, wobei $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$ und $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$ ist (vgl. § 4 8b) unter ⊙).

Die Kanten eines Tetraeders sind je ein Geradenpaar m (vgl. § 4 unter (13σ)) und je zwei Geradenpaare n (vgl. § 4 unter (13τ)); die Eckpunkte (Seitenflächen) sind je 4 der in § 4 unter 8 b) bestimmten 2304 Ikosaederpunkte $\mathfrak{m}$ (-Ebenen μ). Zu jedem der 576 Tetraeder gehören zwei tetraedrale Complexe:

$$-(X_1^2+X_2^2)\cos\frac{\pi}{5}+(X_3^2+X_4^2)\sin\frac{\pi}{10}+(X_5^2+X_6^2)=0\ \ldots\ (40\beta')$$

$$\text{oder } (X_1^2+X_2^2)+(X_3^2+X_4^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi=0$$

$$\text{und}\quad (X_1^2+X_2^2)\sin\frac{\pi}{10}+(X_3^2+X_4^2)\cos\frac{\pi}{5}+(X_5^2+X_6^2)=0\ \ldots\ (40\beta'')$$

$$\text{oder } (X_1^2+X_2^2)+(X_3^2+X_4^2)\,\mathrm{cotg}^2\varphi=0.$$

Z. B.

$$\left.\begin{array}{lllll}
Z_1\ \ldots & 1-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi & \mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi-1 & 1-i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right) & \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right)-i \\
Z_2\ \ldots & \left(1-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)\mathrm{tg}\,\varphi & -\left(1+\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)\mathrm{tg}\,\varphi & \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi-i & 1-i\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi \\
Z_3\ \ldots & \left(1+\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)\mathrm{tg}\,\varphi & \left(1-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)\mathrm{tg}\,\varphi & -\left(1+i\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\right) & \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi+i \\
Z_4\ \ldots & 1-\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi & 1-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi & -\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right)+i\right) & 1+i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right).
\end{array}\right\}\ (40\gamma)$$

Die Coordinaten von z_i gehen aus denen für Z_i durch Umkehrung des Vorzeichens von i hervor.

$$\left.\begin{array}{lcccccccl}
K_{14} \text{ und } K_{23}\ \ldots & \pm i\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots m & \\
K_{12}\ \ldots\ldots & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 & & \\
K_{34}\ \ldots\ldots & 0 & 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \ldots n & \\
K_{13}\ \ldots\ldots & 0 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon & \varepsilon^3 & & \\
K_{42}\ \ldots\ldots & 0 & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^4 & \varepsilon^2, & &
\end{array}\right\}\ \ldots\ (40\delta)$$

wo $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ist.

Tetraedrale Complexe: $x_1^2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_2=0\ \ldots\ldots\ (40\varepsilon')$

und: $x_1^2+x_2x_4+x_4x_6+x_6x_3+x_3x_5+x_5x_2=0\ \ldots\ldots\ (40\varepsilon'')$

II. Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades ist.

Bei den im Folgenden zu untersuchenden Correlationen kommen ausser den ganz speciellen Fällen der Polarcorrelation, der Nullcorrelation und der Correlation mit Axen nur die allgemeine Correlation und derjenige Fall[1]) in Betracht, in welchem die beiden Kernflächen zusammenfallen,

[1]) Vgl. R. Sturm: Ueber Collineationen und Correlationen. Math. Ann. 26. S. 482 unter 24. — Clebsch-Lindemann: Vorlesungen II, 1. S. 408 unter Nr. 5.

ohne dass Polarcorrelation stattfindet. In diesem letzteren Falle einer Correlation gehen durch dieselbe die linearen Complexe eines „Netzes“ in sich über, dessen „Grundregelschaar“ die (zusammenfallende) Kernfläche bildet; andererseits bleiben ein linearer Complex und zwei specielle Complexe fest, welche ebenfalls die Fläche 2ten Grades erzeugen. Die Flächen 2ten Grades aller Büschel, deren Vierseit durch die beiden „Leitgeraden“ der Strahlengebüsche und je zwei Gerade des anderen Systems gebildet wird, sind involutorisch zugeordnet, indem die Kernfläche und je eine bestimmte Fläche sich selbst entsprechen.

Der Complex zweiten Grades Ω', welcher der Ort der Geraden ist, welche von den zufolge der Correlation ihnen entsprechenden geschnitten werden,[1]) hat zur Singularitätenfläche die zusammenfallende Kernfläche.

Die Wurzeln der Gleichung, welche durch Nullsetzen der Determinante von $\Omega' + \nu P$ entsteht, (wo $P = \sum_1^6 x_i^2$ ist), sind in diesem Falle ν_1, $\nu_2 = \nu_3$, $\nu_4 = \nu_5 = \nu_6$; die Gleichung des Complexes zweiten Grades wird, wenn ein Tetraeder, welches durch eins der erwähnten Vierseite bestimmt ist, zum Coordinatentetraeder gewählt wird:

$$\nu_1 X_{i_1}^2 + \nu_2 (X_{i_2}^2 + X_{i_3}^2) + \nu_4 (X_{i_4}^2 + X_{i_5}^2 + X_{i_6}^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (41\alpha)$$

Diese Gleichung kann mit Benutzung von $\sum_1^6 X_i^2 = 0$ auf eine einfachere Form gebracht werden. Für die hier auftretenden Complexe ist $\nu_4 = -\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ oder $\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$, sodass für $i_2 = 1$, $i_3 = 2$, $i_4 = 3$, $i_5 = 4$, $i_6 = 5$, $i_1 = 6$ die Gleichung die einfache Form erhält:

$$X_1^2 + X_2^2 + \frac{2}{1-\nu_2} X_6^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\beta)$$

Die Gleichung der Singularitäten- (der doppelt zählenden Kern-) Fläche wird:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_6^2 = 0 \text{ oder } X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\gamma)$$

$$\text{oder } Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\gamma')$$

Von den Erzeugenden des einen Systems bleiben nur die beiden Leitgeraden der erwähnten speciellen Complexe, dagegen sämmtliche Erzeugende des zweiten Systems fest. Die Correlation ist durch die Gleichungen:

[1]) Vgl. Clebsch-Lindemann: l. c. S. 404. — Weiler: l. c. S. 168 unter 4.

$$\left.\begin{aligned} t\, Z_1' &= \beta_1 Z_4 \\ t\, Z_2' &= -\beta_1 Z_3 \\ t\, Z_3' &= \beta_2 Z_2 \\ t\, Z_4' &= \beta_2 Z_1 \end{aligned}\right\} (41\delta) \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} \sigma X_1' &= (\beta_1^2+\beta_2^2) X_1 - i(\beta_1^2-\beta_2^2) X_2 \\ \sigma X_2' &= i(\beta_1^2-\beta_2^2) X_1 + (\beta_1^2+\beta_2^2) X_2 \\ \sigma X_3' &= 2\beta_1\beta_2 X_3 \\ \sigma X_4' &= 2\beta_1\beta_2 X_4 \\ \sigma X_5' &= 2\beta_1\beta_2 X_5 \\ \sigma X_6' &= -2\beta_1\beta_2 X_6 \end{aligned}\right\} (41\varepsilon) \text{ oder } \left.\begin{aligned} \sigma X_1' &= \nu_2 X_1 + i\nu_2' X_2 \\ \sigma X_2' &= -i\nu_2' X_1 + \nu_2 X_2 \\ \sigma X_3' &= X_3 \\ \sigma X_4' &= X_4 \\ \sigma X_5' &= X_5 \\ \sigma X_6' &= -X_6 \end{aligned}\right\} (41\varepsilon')$$

$$\left.\begin{aligned} t'\, Z_1' &= \frac{1}{\beta_1} Z_4 \\ t'\, Z_2' &= -\frac{1}{\beta_1} Z_3 \\ t'\, Z_3' &= \frac{1}{\beta_2} Z_2 \\ t'\, Z_4' &= \frac{1}{\beta_2} Z_1 \end{aligned}\right\} (41\delta')$$

dargestellt, wobei

$$\nu_2 = \frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2\beta_1\beta_2}, \quad \nu_2' = \frac{\beta_2^2-\beta_1^2}{2\beta_1\beta_2}, \quad \nu_2 - \nu_2' = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad \nu_2 + \nu_2' = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \nu_2^2 - \nu_2'^2 = 1 \quad \ldots \quad (41\zeta)$$

ist. Die Gleichung des Netzes der linearen Complexe ist:

$$a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (41\eta)$$

die Gleichung des in sich übergehenden linearen Complexes:

$$X_6 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (41\vartheta)$$

während die beiden speciellen, festbleibenden Complexe:

$$X_1 + iX_2 = \text{und } X_1 - iX_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (41\iota)$$

die Kanten K_{12} und K_{34} des Tetraeders zu Leitgeraden haben.

Die hier in Betracht kommenden derartigen Complexe 2ten Grades Ω' sind im Folgenden übersichtlich zusammengestellt.

1) 60 Complexe $\Omega' \ldots x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + 2x_{i_3}^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (42\alpha)$

$\nu_2 = 0$; Singularitätenfläche:

$$x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + x_{i_3}^2 = 0 \text{ oder: } x_{i_4}^2 + x_{i_5}^2 + x_{i_6}^2 = 0 \quad \ldots \quad (42\beta)$$

d. h. eine der Fundamentalflächen $F^{(1)}$. Die Leitgeraden der beiden speciellen Complexe sind zwei Gerade e; als Coordinatentetraeder ist ein Fundamentaltetraeder mit diesen beiden Geraden als Gegenkantenpaar zu wählen. Die Gleichungen des Complexes, der Singularitätenfläche, des Netzes u. s. w. nehmen dann die in (41β), (41γ), (41 ε) u.s.w. angegebene Form für $\nu_2 = 0$ an.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Z. B. } \Omega' \ldots 2x_3^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0, \; F^{(1)}_{10} \ldots x_3^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{Netz} \ldots a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_5 x_5 = 0; \text{ Festbleibender Complex} \ldots x_3 = 0 \\ \text{Specielle Complexe: } x_4 \pm i x_6 = 0. \end{array}\right\} (42\gamma)$$

Vgl. auch I 1) dieses § unter (29β).

2) 180 Complexe

$$\Omega' \ldots x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 \pm 2x_{i_3} x_{i_4} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (43\alpha)$$

$\nu_2 = 0$. Singularitätenfläche:

$$2\,x_{i_1}{}^2 + 2\,x_{i_2}{}^2 + (x_{i_3} + x_{i_4})^2 = 0 \text{ oder } 2\,x_{i_5}{}^2 + 2\,x_{i_6}{}^2 + (x_{i_3} - x_{i_4})^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (43\beta)$$

d. h. eine der 90 Flächen $F^{(3)}$ (vgl. § 7 unter 3)). Die Leitgeraden der speciellen Complexe $\ldots\ x_{i_5} \pm i\,x_{i_6} = 0$ sind zwei Gerade e; als Coordinatentetraeder ist z. B. ein Tetraeder mit diesem Geradenpaar e und zwei Geradenpaaren d_0 zu wählen.

Z. B. (vgl. unter I 2) dieses § (30γ) und (30δ))

$$\left.\begin{array}{l} \Omega' \ldots x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2\,x_4\,x_6 = 0;\ F^{(3)} \ldots 2x_1{}^2 + 2\,x_2{}^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \\ \text{Netz:} \ldots a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,(x_4 + x_6) = 0;\ \text{Festbleibender Complex: } x_4 - x_6 = 0 \\ \text{Specielle Complexe: } x_3 \pm i\,x_5 = 0. \end{array}\right\} (43\gamma)$$

3) 360 Complexe: $\Omega' \ldots \sum\limits_1^4 (+\,x_{i_1}\,x_{i_2}) + x_{i_5}{}^2 + x_{i_6}{}^2 = 0 \quad \ldots \quad (44\alpha)$

$\nu_2 = 0$. Singularitätenfläche: $\sum\limits_1^4 (\pm\,x_{i_1}{}^2) + 4\,x_5{}^2 + 4\,x_6{}^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (44\beta)$

d. h. eine der Flächen $F^{(5)}$ (vgl. § 7 unter 5)), deren jede dreimal auftritt Die Leitgeraden der beiden speciellen Complexe sind zwei Gerade d, das Coordinatentetraeder hat z. B. dieses Geradenpaar d und zwei Geradenpaare s zu Gegenkanten.

Z. B. (vgl. unter I 4) dieses § (31γ) und (31δ)):

$$\left.\begin{array}{l} \Omega' \ldots -x_1\,x_2 + x_2\,x_3 - x_3\,x_4 + x_4\,x_1 + x_5{}^2 + x_6{}^2 = 0 \\ F^{(5)} \ldots (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + 4x_5{}^2 + 4x_6{}^2 = 0 \text{ oder} \\ \qquad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + 2(x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + x_4)^2 = 0 \\ \text{Netz: } a_1\,(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) + a_5\,x_5 + a_6\,x_6 = 0; \\ \qquad \text{Festbleibender Complex: } x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \text{Specielle Complexe: } x_1 \pm i\,x_2 + x_3 \mp i\,x_4 = 0. \end{array}\right\} (44\gamma)$$

Für diese unter 1) — 3) betrachteten Complexe werden die Gleichungen:

$$X_1{}^2 + X_2{}^2 + 2\,X_6{}^2 = 0 \text{ (vgl. (41}\beta\text{) für } \nu_2 = 0).$$

4) 80 Complexe $\Omega' \ldots \sum\limits_1^3 (+\,x_{i_1}\,x_{i_2}) - x_{i_4}{}^2 - x_{i_5}{}^2 - x_{i_6}{}^2 = 0 \quad \ldots \quad (45\alpha)$

$\nu_2 = \frac{1}{2}$. Singularitätenfläche:

$$x_{i_1}{}^2 + x_{i_2}{}^2 + x_{i_3}{}^2 = 0 \text{ oder } x_{i_4}{}^2 + x_{i_5}{}^2 + x_{i_6}{}^2 = 0 \quad \ldots \quad (45\beta)$$

d. h. eine der Fundamentalflächen $F^{(1)}$, deren jede 8 mal auftritt. Die Leitgeraden der speciellen Complexe sind 2 Gerade k_0, welche z. B. mit je einem Geradenpaar e und h ein Coordinatentetraeder mit vier Eckpunkten $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(k)}$ (vier Ebenen $(_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)})$ bestimmen. Die Gleichung des Complexes Ω' nimmt dann die Form$\left(\text{vgl. (40}\beta\text{) für } \nu_2 = \frac{1}{2}\right)$: $X_1{}^2 + X_2{}^2 + 4\,X_6{}^2 = 0$ an.

Z. B. (vgl. I unter 8) dieses § (36γ) und (36δ)).

$$\left.\begin{array}{l}\Omega' \ldots x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1 - x_2^2 - x_4^2 - x_6^2 = 0\\ F_1^{(1)} \ldots x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 \text{ oder } x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0\\ \text{Netz: } a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_6 x_6 = 0. \text{ Festbleibender Complex: } x_1 + x_3 + x_5 = 0\\ \text{Specielle Complexe: } x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_5 = 0 \text{ und } x_1 + \alpha^2 x_3 + \alpha x_5 = 0 \ldots\end{array}\right\} \quad (45\gamma)$$

5) 240 Complexe $\Omega' \ldots \sum_1^3 (+ x_{i_1} x_{i_2}) + x_{i_4}^2 + x_{i_5}^2 - x_{i_6}^2 = 0$ (46α)

$$\left.\begin{array}{l}\nu_2 = -\frac{1}{2}. \text{ Singularitätenfläche: } [x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3 x_{i_4}^2 + 3 x_{i_5}^2 = 0\\ \qquad\text{oder } [-2 x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3 (x_{i_2} - x_{i_3})^2 + 6 x_{i_6}^2 = 0,\end{array}\right\} \quad (46\beta)$$

d. h. eine der 240 Flächen $F^{(6)}$ (vgl. § 7 unter 6)). Die Leitgeraden der speciellen Complexe sind wie unter 4) 2 Gerade k_0, und als Coordinatentetraeder ist bez. dasselbe wie unter 4) zu wählen. Die Gleichung des Complexes Ω' erhält dann die Form $\left(\text{vgl. (41}\beta\text{) für } \nu_2 = -\frac{1}{2}\right)$:

$$3 (X_1^2 + X_2^2) + 4 X_6^2 = 0.$$

Z. B. (vgl. (36γ) und (36δ) unter I 8) dieses §).

$$\left.\begin{array}{l}\Omega' \ldots x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1 - x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0\\ F^{(6)} \ldots (x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 x_4^2 + 3 x_6^2 = 0 \text{ oder } (-2 x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 (x_3 - x_5)^2 + 6 x_2^2 = 0\\ \text{Netz: } a_1 (x_1 + x_3 + x_5) + a_4 x_4 + a_6 x_6 = 0. \text{ Festbleibender Complex: } x_2 = 0\\ \text{Specielle Complexe: } x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_5 = 0 \text{ und } x_1 + \alpha^2 x_3 + \alpha x_5 = 0.\end{array}\right\} \quad (46\gamma)$$

6) 480 Complexe $\Omega' \ldots \sum_1^3 (+ x_{i_1} x_{i_2}) \pm (2 x_{i_4} x_{i_5} - x_{i_6}^2) = 0$. . (47α)

$$\left.\begin{array}{l}\nu_2 = -\frac{1}{2}. \text{ Singularitätenfläche: } 2 [x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3 (x_{i_4} - x_{i_5})^2 + 6 x_{i_6}^2 = 0\\ \qquad\text{oder } [2 x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3 (x_{i_2} \mp x_{i_3})^2 + 3 (x_{i_4} + x_{i_5})^2 = 0,\end{array}\right\} \quad (47\beta)$$

d. h. eine der 480 Flächen $F^{(7)}$ (vgl. § 7 unter 7)). Die Leitgeraden der speciellen Complexe sind wiederum zwei Gerade k_0, welche mit je einem Geradenpaar d_0 und l ein Coordinatentetraeder bestimmen, in Beziehung auf welches die Gleichung des Complexes Ω' (vgl. (41β)) die Form:

$$3 (X_1^2 + X_2^2) + 4 X_6^2 = 0$$

erhält. Z. B. (vgl. (38γ) und (38δ) unter I 10) dieses §):

$$\left.\begin{array}{l}\Omega' \ldots - x_1 x_3 + x_3 x_5 - x_5 x_1 - 2 x_2 x_4 + x_6^2 = 0\\ F^{(7)} \ldots 2 (-x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 (x_2 - x_4)^2 + 6 x_6^2 = 0\\ \qquad \text{oder } (2 x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 (x_3 - x_5)^2 + 3 (x_2 + x_4)^2 = 0\\ \text{Netz: } a_1 (-x_1 + x_3 + x_5) + a_2 (x_2 - x_4) + a_6 x_6 = 0; \text{ Festbleibender Complex: } x_2 + x_4 = 0\\ \text{Specielle Complexe: } -x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_5 = 0 \text{ und } -x_1 + \alpha^2 x_3 + \alpha x_5 = 0.\end{array}\right\} (47\gamma)$$

III. Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche durch zwei Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Vierseit gemein haben, gebildet wird.

Diese Complexe Ω'' treten bei den allgemeinen Correlationen als Ort derjenigen Geraden auf, welche von den ihnen zufolge der Correlation entsprechenden geschnitten werden.[1]) Die zugehörige Singularitätenfläche wird durch zwei Flächen zweiten Grades, welche das sog. Hauptvierseit der Correlation gemein haben, gebildet; diese beiden Flächen werden durch die Correlation in sich selbst übergeführt, während die übrigen Flächen zweiten Grades, welche durch dies Vierseit gehen, sich involutorisch in der Correlation entsprechen.[2]) Zu diesen Flächen gehören die beiden Kernflächen und die Ebenen-Punkt-Paare, zu welchen die sich selbst entsprechenden Flächen, als Doppelelemente der Involution, harmonisch sind.

Ferner bleiben zwei allgemeine lineare Complexe C', C'' bei der Correlation unverändert; denselben ist das „Strahlennetz", welches die Diagonalen des Hauptvierseits zu Leitgeraden hat, gemein, und alle übrigen Gewinde, welche dies Strahlennetz gemein haben, entsprechen sich zu je zweien involutorisch.

Die Gleichung $\Omega'' + \nu P = 0$ hat in diesem Falle[3]) als Wurzeln $\nu_1 = \nu_2$, $\nu_3 = \nu_4$, $\nu_5 = -\nu_6$; wird das Haupttetraeder der Correlation als Coordinatentetraeder gewählt und sind einmal $X_5 = 0$, $X_6 = 0$. . . (48α) die beiden festbleibenden Complexe, so ist die Gleichung des Complexes Ω'' durch:

$$\nu_1 (X_1^2 + X_2^2) + \nu_3 (X_3^2 + X_4^2) + \nu_5 (X_5^2 - X_6^2) = 0 \quad . . . (48\beta)$$

dargestellt, während die Gleichungen der beiden festbleibenden Flächen G_1, G_2, d. h. der Singularitätenfläche von Ω'' in der einfachen Form:

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \ . . . \ X_1^2 + X_2^2 + X_5^2 = 0 \text{ oder } X_3^2 + X_4^2 + X_6^2 = 0, \\ \quad \text{oder } Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 = 0 \end{array}\right\} \ . . . (48\gamma_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_2 \ . . . \ X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0 \text{ oder } X_1^2 + X_2^2 + X_6^2 = 0 \\ \quad \text{oder } Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0 \end{array}\right\} \ . . . (48\gamma_2)$$

erhalten werden. Aus der zweifachen Darstellung dieser Flächen in den Coordinaten X_i ist auch die Erzeugung durch je einen der beiden Complexe (48α) und je zwei specielle Complexe, deren Leitgeraden je eins der Seitenpaare des Hauptvierseits sind, sofort zu erkennen.

[1]) Vgl. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen II. 1 S. 404.

[2]) Vgl. R. Sturm: Math. Ann. Bd. 26 S. 477.

[3]) Vgl. Weiler l. c. Fall 3).

Sind dagegen zweitens unter übrigens gleichen Voraussetzungen:

$$X_5 - X_6 = 0,\ X_5 + X_6 = 0 \quad \ldots \quad (48\alpha')$$

die beiden festbleibenden Complexe, so erhält man für $\nu_1 = \nu_2$, $\nu_3 = \nu_4$, $\nu_5' = -\nu_6'$ als Gleichung von

$$\Omega'' \ldots \nu_1 (X_1^2 + X_2^2) + \nu_3 (X_3^2 + X_4^2) + 2\nu'_5 X_5 X_6 = 0 \ldots, \quad (48\beta')$$

während für die festbleibenden Flächen die Gleichungen:

$$G_1 \ldots (X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) + 2 X_5 X_6 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 + i Z_2 Z_3 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 - i Z_2 Z_3 = 0 \,.\, (48\gamma_1')$$

$$G_2 \ldots (X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) - 2 X_5 X_6 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 - i Z_2 Z_3 = 0 \text{ oder } Z_1 Z_4 + i Z_2 Z_3 = 0 \,.\, (48\gamma_2')$$

resultiren.

Die bei den folgenden Correlationen auftretenden Complexe Ω'', sowie die Flächen G_1, G_2 sind unter 1) bis 6) kurz zusammengestellt. Die Correlationen selbst sind allgemein durch die Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} t\, Z_1' &= \alpha_{14} Z_4 \\ t\, Z_2' &= \alpha_{23} Z_3 \\ t\, Z_3' &= \alpha_{32} Z_2 \\ t\, Z_4' &= \alpha_{41} Z_1 \end{aligned}\right\} (48\delta) \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= \nu_1 X_1 - i \nu_1' X_2 \\ \sigma\, X_2' &= i \nu_1' X_1 + \nu_1 X_2 \\ \sigma\, X_3' &= \nu_3 X_3 - i \nu_3' X_4 \\ \sigma\, X_4' &= i \nu_3' X_3 + \nu_3 X_4 \\ \sigma\, X_5' &= \nu_5 X_5 + i \nu_5' X_6 \\ \sigma\, X_6' &= i \nu_5' X_5 - \nu_5 X_6, \end{aligned}\right\} (48\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} t'\, Z_1' &= \frac{1}{\alpha_{14}} Z_4 \\ t'\, Z_2' &= \frac{1}{\alpha_{23}} Z_3 \\ t'\, Z_3' &= \frac{1}{\alpha_{32}} Z_2 \\ t'\, Z_4' &= \frac{1}{\alpha_{41}} Z_1 \end{aligned}\right\} (48\delta')$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \alpha_{14}\, \alpha_{23} + \alpha_{32}\, \alpha_{41} & \nu_1' &= \alpha_{14}\, \alpha_{23} - \alpha_{32}\, \alpha_{41} \\ \nu_3 &= -(\alpha_{14}\, \alpha_{32} + \alpha_{23}\, \alpha_{41}) & \nu_3' &= -(\alpha_{14}\, \alpha_{32} - \alpha_{23}\, \alpha_{41}) \\ \nu_5 &= \alpha_{14}\, \alpha_{41} + \alpha_{23}\, \alpha_{32} & \nu_5' &= \alpha_{14}\, \alpha_{41} - \alpha_{23}\, \alpha_{32}\,. \end{aligned}\right\} (48\zeta)$$

Die beiden Kernflächen: K_1 (Polfläche), K_2 (Polarfläche) haben die Gleichungen:

$$K_1 \ldots (\alpha_{14} + \alpha_{41}) Z_1 Z_4 + (\alpha_{23} + \alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\eta_1)$$

$$K_2 \ldots \alpha_{23}\, \alpha_{32} (\alpha_{14} + \alpha_{41}) Z_1 Z_4 + \alpha_{14}\, \alpha_{41} (\alpha_{23} + \alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0; \ldots (48\eta_2)$$

der zu der Correlation gehörige tetraedrale Complex der Wechselstrahlen Ω_w[1]) wird durch die Gleichung:

$$\Omega_w \equiv \nu_1'^2 (X_1^2 + X_2^2) + \nu_3'^2 (X_3^2 + X_4^2) = 0 \quad \ldots \quad (48\vartheta)$$

dargestellt.

Für den ersten der beiden oben unterschiedenen Fälle ist

$$\alpha_{14}\, \alpha_{41} = \alpha_{23}\, \alpha_{32} \text{ d. h. } \nu_5' = 0 \quad \ldots \quad (48\iota)$$

[1]) Vgl. R. Sturm: Liniengeometrie I S. 360.

und man erhält:

$$K_1 \ldots (\alpha_{14}+\alpha_{41}) Z_1 Z_4 + (\alpha_{23}+\alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\varkappa_1)$$
$$K_2 \ldots (\alpha_{14}+\alpha_{41}) Z_1 Z_4 + (\alpha_{23}+\alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\varkappa_2)$$

Ist speciell auch noch $\nu_3' = 0$ d. h. $\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{23}} = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{32}}$, so fallen die beiden Kernflächen in eine zusammen (vgl. unter II. dieses §). Denn die beiden Bedingungen

$$\nu_3' = 0, \quad \nu_5' = 0$$

ergeben $\alpha^2_{14} = \alpha^2_{32}$, woraus entweder die Gleichheit $\alpha_{14} = \alpha_{41} = \alpha_{23} = \alpha_{32}$, d. h. der Fall der Polarcorrelation, oder $\left\{\begin{matrix} \alpha_{14} = -\alpha_{23} = \beta_1 \\ \alpha_{41} = -\alpha_{32} = -\beta_2 \end{matrix}\right\}$ folgt (vgl. (44δ)).

Im zweiten Falle ist: $\alpha_{14}\,\alpha_{41} = -\alpha_{23}\,\alpha_{32}$ d. h. $\nu_5 = 0$, ... (48ι)
und man erhält:

$$K_1 \ldots (\alpha_{14}+\alpha_{41}) Z_1 Z_4 + (\alpha_{23}+\alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\varkappa_1')$$
$$K_2 \ldots (\alpha_{14}+\alpha_{41}) Z_1 Z_4 - (\alpha_{23}+\alpha_{32}) Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\varkappa_2')$$

Wenn in beiden Fällen speciell:

$$\alpha_{14} = \alpha_{41} = 1 \quad \ldots \quad (48\lambda)$$

ist, also im ersten Falle $\alpha_{23}\,\alpha_{32} = 1$, im zweiten $\alpha_{23}\,\alpha_{32} = -1$, ausserdem $\nu_1 = -\nu_3 = \alpha_{23}+\alpha_{32}$, $\nu_1' = \nu_3' = \alpha_{23}-\alpha_{32}$ wird, so zerfällt der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen (48ϑ) in die beiden speciellen linearen Complexe:

$$X_5 - i X_6 = 0 \text{ und } X_5 + i X_6 = 0 \quad \ldots \quad (48\mu)$$

Ausserdem werden in diesem Falle durch die Correlation nicht nur die beiden Flächen G_1 und G_2 und zwar auf die erste Art, sondern ausserdem noch ∞^1 Flächen 2ten Grades auf die zweite Art in sich transformirt.[1]) Die Gleichung dieses Systems sich selbst auf die zweite Art entsprechender Flächen wird:

$$Z_1^2 - \varrho^2 Z_4^2 + 2\varrho \sqrt{-\frac{1}{\alpha_{23}\,\alpha_{32}}}\, Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\nu)$$

Im ersten Falle $\alpha_{14} = \alpha_{41} = 1$, $\alpha_{23}\,\alpha_{32} = 1$ erhält man also (vgl. 1)—3) im Nachfolgenden):

$$Z_1^2 - \varrho^2 Z_4^2 + 2 i \varrho Z_2 Z_3 = 0, \quad \ldots \quad (48o)$$

im zweiten Falle $\alpha_{14} = \alpha_{41} = 1$, $\alpha_{23}\,\alpha_{32} = -1$ dagegen (vgl. unter 4):

$$Z_1^2 - \varrho^2 Z_4^2 + 2\varrho Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \quad (48\varrho')$$

Die unter 5) und 6) aufgeführten Complexe Ω'' und Flächen G_1, G_2 entsprechen Correlationen, welche zu dem ersten, allgemeinen Falle ge-

[1]) Vgl. R. Sturm: Math. Ann. Bd. 26. S. 485—486.

hören. Sämmtliche hier auftretenden Correlationen sind $2m$-zählige, für welche die Coefficienten $\alpha_{i\varkappa}$ gleich bestimmten Einheitswurzeln werden.

1) 320 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^3 (+x_{i_1} x_{i_2}) - \sum_4^6 (+x_{i_4} x_{i_5}) = 0 \quad . \; . \; . \quad (49\alpha)$

$$\nu_1 = -1,\ \nu_3 = 1,\ \nu_5 = 2 \ \ldots\ldots \quad (49\alpha')$$

$$G_1 \ldots x_{i_1}{}^2 + x_{i_2}{}^2 + x_{i_3}{}^2 = 0 \text{ oder } x_{i_4}{}^2 + x_{i_5}{}^2 + x_{i_6}{}^2 = 0 \quad \ldots \quad (49\beta')$$

$$\left.\begin{array}{l} G_2 \ldots 2(x_{i_4} + x_{i_5} + x_{i_6})^2 + 3(x_{i_2} - x_{i_3})^2 + (-2x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3})^2 = 0 \\ \text{oder } 2(x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3})^2 + 3(x_{i_5} - x_{i_6})^2 + (-2x_{i_4} + x_{i_5} + x_{i_6})^2 = 0 \end{array}\right\} (49\beta'')$$

d. h. die Flächen G_1 sind die 10 Fundamentalflächen, von denen jede 32 mal auftritt, die Flächen G_2 sind die 320 Flächen $F^{(8)}$ (vgl. § 7 unter 8)).

Die beiden festbleibenden Gewinde sind:

$$C' \ldots \sum_1^3 (x_{i_1}) = 0,\ C'' \ldots \sum_4^6 (x_{i_4}) = 0 \ \ldots\ldots \quad (49\gamma)$$

d. h. zwei Complexe $C_{(3)}$ (vgl. § 6 (14γ)); sie bestimmen ein Strahlennetz mit einem Leitgeradenpaar k, k'; die beiden Kantenpaare des Hauptvierseits sind zwei Geradenpaare k_0, sodass die Ecken (Seitenflächen) des Haupttetraeders durch 4 Punkte $\mathfrak{k}_0$ (4 Ebenen $\varkappa_0$ (vgl. § 3 (12β)) gebildet werden. Die Gleichung von Ω'' wird alsdann (vgl. (48β))

$$\Omega'' \ldots -(X_1^2 + X_2^2) + (X_3^2 + X_4^2) + 2(X_5^2 - X_6^2) = 0, \ \ldots \quad (49\delta)$$

während die Gleichungen von G_1 und G_2 die unter (48γ) angegebene Form annehmen.

Z. B. $\Omega'' \ldots (x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1) - (x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_2) = 0 \ \ldots \quad (49\varepsilon)$

$$C' \ldots x_1 + x_3 + x_5 = 0,\ C'' \ldots x_2 + x_4 + x_6 = 0 \ \ldots\ldots \quad (49\zeta)$$

Eckpunkte Z_i und Flächen Z_i:

(Die Coordinatenwerthe sind mit passenden Factoren multiplicirt).

$$\left.\begin{array}{llcccccl} Z_1 \ldots & \mathfrak{k}_{(0)} \ldots & -i\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \ldots \varkappa_{(0)} & \ldots Z_4 \\ Z_2 \ldots & \mathfrak{k}_0 \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & \ldots \varkappa_0 & \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots & \mathfrak{k}_0 \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha}{\sqrt{3}} & \ldots \varkappa_0 & \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots & \mathfrak{k}_{(0)} \ldots & i\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \ldots \varkappa_{(0)} & \ldots Z_1 \end{array}\right\} \ldots (49\eta)$$

Kantenpaare des Haupttetraeders:

$$\left.\begin{array}{l} K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots 1 \quad \mp i \quad 1 \quad \mp i \quad 1 \quad \mp i \ \ldots k, k' \\ \left.\begin{array}{llcccccc} K_{12} & , \ldots\ldots & 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ K_{34} & \ldots\ldots & 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \\ K_{13} & \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha \\ K_{42} & \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \end{array}\right\} k_0 \end{array}\right\} \ldots (49\vartheta)$$

$$\boldsymbol{G}_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 \equiv x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 \equiv x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \ldots (49\iota')$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{G}_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv 3 z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 4 (z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) \equiv \\ 3 \zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - \zeta_4^2 + 4 (\zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3) \equiv \\ 2 (x_2 + x_4 + x_6)^2 + 3 (x_3 - x_5)^2 + (-2 x_1 + x_3 + x_5)^2 \equiv \\ 2 (x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3 (x_4 - x_6)^2 + (-2 x_2 + x_4 + x_6)^2 = 0 . \end{array}\right\} (49\iota'')$$

Kernflächen:

$$K_1 \ldots 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3 \equiv \zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - \zeta_4^2 + 2 (\zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3) = 0 \ldots (49\varkappa')$$

$$K_2 \ldots Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 2 (z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) \equiv \zeta_1^2 + \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 = 0 \ldots (49\varkappa'')$$

2) 960 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^6 (+ x_{i_1} x_{i_2}) = 0 \ldots (50\alpha)$

$$\nu_1 = -1, \; \nu_3 = 1, \; \nu_5 = 2 \ldots (50\alpha')$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{G}_1 \ldots (x_{i_1} + x_{i_2})^2 + (x_{i_3} + x_{i_4})^2 + (x_{i_5} + x_{i_6})^2 = 0 \\ \text{oder} \;\; (x_{i_1} - x_{i_2})^2 + (x_{i_3} - x_{i_4})^2 + (x_{i_5} - x_{i_6})^2 = 0 \end{array}\right\} (50\beta')$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{G}_2 \ldots 2 (x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_4} + x_{i_5} + x_{i_6})^2 + [-2(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_3} - x_{i_4}) + \\ \qquad + (x_{i_5} - x_{i_6})]^2 + 3 [(x_{i_3} - x_{i_4}) - (x_{i_5} - x_{i_6})]^2 = 0 \\ \text{oder} \;\; 2 (x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_3} - x_{i_4} + x_{i_5} - x_{i_6})^2 + [-2 (x_{i_1} + x_{i_2}) + (x_{i_3} + x_{i_4}) + \\ \qquad + (x_{i_5} + x_{i_6})]^2 + 3 [(x_{i_3} + x_{i_4}) - (x_{i_5} + x_{i_6})]^2 = 0, \end{array}\right\} (50\beta'')$$

d. h. die Flächen $\boldsymbol{G}_1$ sind die 60 Flächen $F^{(2)}$ (vgl. § 7 unter 2)), von denen jede 16 mal auftritt, die Flächen $\boldsymbol{G}_2$ sind die 960 Flächen $F^{(9)}$ (vgl. § 7 unter 9)). Die beiden festbleibenden Gewinde sind:

$$C' \ldots x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_4} + x_{i_5} + x_{i_6} = 0 \ldots (50\gamma')$$

$$C'' \ldots x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_3} - x_{i_4} + x_{i_5} - x_{i_6} = 0 \ldots (50\gamma'')$$

d. h. 2 Complexe $C_{(6)}$ (vgl. 6 (14ζ)); sie bestimmen ein Strahlennetz mit einem Leitgeradenpaar k, k'. Die beiden anderen Kantenpaare des Haupttetraeders sind 2 Geradenpaare t (vgl. § 3 unter 7)), sodass die Eckpunkte (Seitenflächen) durch zwei Punkte $\mathfrak{k}_0$ (2 Ebenen $\varkappa_0$) und durch 2 Punkte $\mathfrak{p}$ (2 Ebenen π) (vgl. § 4 unter (13ι)) repräsentirt sind. Die Gleichung des Complexes Ω' wird von derselben Form wie unter 1) (49δ).

Z. B. $\Omega'' \ldots x_1 x_6 + x_6 x_3 + x_3 x_2 + x_2 x_5 + x_5 x_4 + x_4 x_1 = 0 \ldots (50\delta)$

$C' \ldots x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \; C'' \ldots x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \ldots (50\varepsilon)$

Eckpunkte Z_i und Flächen Z_i:

$$\left.\begin{array}{llcccccl} Z_1 \ldots \mathfrak{p} \ldots & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \ldots \pi \ldots Z_1 \\ Z_2 \ldots \mathfrak{k}_0 \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha}{\sqrt{3}} & \ldots \varkappa_0 \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots \mathfrak{k}_0 \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & \ldots \varkappa_0 \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots \mathfrak{p} \ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \ldots \pi \ldots Z_4 \end{array}\right\} (50\zeta)$$

Kantenpaare des Haupttetraeders:

$$\left.\begin{array}{llllllll} K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots & 1 & \mp i & 1 & \mp i & 1 & \mp i & \ldots k, k' \\ K_{12} \ldots\ldots & 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & \alpha & \\ K_{34} \ldots\ldots & 1 & 1 & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \\ K_{13} \ldots\ldots & 1 & -1 & \alpha & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^2 & \ldots\ldots t \\ K_{42} \ldots\ldots & 1 & -1 & \alpha^2 & -\alpha^2 & \alpha & -\alpha & \end{array}\right\} \quad (50\eta)$$

$$G_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \ldots -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \equiv (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_5 + x_6)^2 = 0 \;.\;.\; F^{(2)} \;.\;.\; (50\vartheta')$$

$$G_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \ldots 3 z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 2 (z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) \equiv$$
$$\equiv 2 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2 + [-2 (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + (x_5 - x_6)]^2 +$$
$$+ 3 [(x_3 - x_4) - (x_5 - x_6)]^2 = 0 \;.\;.\;.\; F^{(9)'} \;.\;.\;.\; (50\vartheta'')$$

Kernflächen:

$$K_1 \ldots 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv -z_1^2 + z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3 \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 -$$
$$- 2 (\zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3) = 0 \;.\;.\;.\; (50\iota')$$

$$K_2 \ldots Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2 (z_3 z_4 + z_4 z_2 + z_2 z_3) \equiv$$
$$\equiv -\zeta_1^2 + \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_4 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 = 0 \;.\;.\;.\; (50\iota'')$$

3) 360 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^4 (-x_{i_1} x_{i_2}) \pm (x_{i_5}^2 - x_{i_6}^2) = 0 \;.\;.\;.\; (51\alpha)$

$$\nu_1 = \pm\sqrt{2},\; \nu_3 = \mp\sqrt{2},\; \nu_5 = 2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (51\alpha')$$

Die beiden Flächen G_1 und G_2 sind zwei zusammengehörige Flächen $F^{(10)'}$, deren Gleichungen für das hier zu betrachtende Beispiel bereits in § 7 unter 10) in den Formeln $(26\delta_1' - \vartheta_1')$ und $(26\delta_2' - \vartheta_2')$ aufgestellt wurden. Die beiden festbleibenden Gewinde sind

$$C' \ldots x_{i_5} = 0,\quad C'' \ldots x_{i_6} = 0; \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (51\beta)$$

dieselben bestimmen ein Strahlennetz mit einem Kantenpaare e; die beiden Kantenpaare des Hauptvierseits sind zwei Geradenpaare q, sodass die Eckpunkte (Seitenflächen) durch ein Punktpaar $\mathfrak{e}$ (ein Ebenenpaar ε) und ein Punktpaar $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (ein Ebenenpaar $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$) gebildet sind. Die Coordinaten dieser Elemente sind für das Beispiel in § 7 unter 10) in (26β) und (26γ) angegeben. Zu jedem Hauptvierseit gehören zwei Complexe Ω'', deren Singularitätenfläche dieselben beiden Flächen G_1 und G_2 sind.

Z. B. $\Omega_1'' \ldots x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_3 x_4 + x_4 x_1 + x_5^2 - x_6^2 = 0 \;.\;.\;.\; (51\gamma')$

$\Omega_2'' \ldots x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_3 x_4 + x_4 x_1 - x_5^2 + x_6^2 = 0, \;.\;.\;.\; (51\gamma'')$

deren Gleichungen in Beziehung auf das Haupttetraeder die Form:

$$(X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) \pm \sqrt{2}\,(X_5^2 - X_6^2) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (51\gamma)$$

erhalten. Die Gleichungen der festbleibenden Gewinde sind:

$$C' \ldots x_5 = 0,\; C'' \ldots x_6 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (51\delta)$$

Das Kantenpaar K_{14}, K_{23} ist das Geradenpaar:

$$(56) \ldots 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \pm i \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (51\varepsilon)$$

Die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen (vgl. (47$\varkappa'$) und (47$\varkappa''$)) werden:

$$\left.\begin{aligned} K_1' \ldots \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + i Z_2 Z_3 &\equiv Z_1 Z_4 + \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_4^2 + i(z_2^2 - z_3^2 + 2 z_2 z_3) \equiv \\ &\equiv 2(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) + i(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_2\zeta_3) = 0 \\ K_2' \ldots Z_1 Z_4 + \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 &\equiv \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv 2(z_1^2 + z_4^2) - i(z_2^2 - z_3^2 + 2 z_2 z_3) \equiv \\ &\equiv \zeta_1^2 + \zeta_4^2 - i(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_2\zeta_3) = 0 \end{aligned}\right\} (51\zeta')$$

$$\left.\begin{aligned} K_1'' \ldots \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 &\equiv Z_1 Z_4 - \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_4^2 - i(z_2^2 - z_3^2 + 2 z_2 z_3) \equiv \\ &\equiv 2(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) - i(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_2\zeta_3) = 0 \\ K_2'' \ldots Z_1 Z_4 - \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 &\equiv \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv 2(z_1^2 + z_4^2) + i(z_2^2 - z_3^2 + 2 z_2 z_3) \equiv \\ &\equiv \zeta_1^2 + \zeta_4^2 + i(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_2\zeta_3) = 0. \end{aligned}\right\} (51\zeta'')$$

4) 360 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^4(-x_{i_1} x_{i_2}) \pm 2 x_{i_5} x_{i_6} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (52\alpha)$

$$\nu_1 = \pm i\sqrt{2},\ \nu_3 = \mp i\sqrt{2},\ \nu_5 = 2 \ \ldots \ (52\alpha')$$

Die Gleichungen der beiden Flächen G_1 und G_2, nämlich zweier zusammengehörigen Flächen $F^{(10)''}$ sind für das hier zu betrachtende Beispiel in § 7 10) in den Formeln (26$\delta_1'' - \vartheta_1''$) und (26$\delta_2'' - \vartheta_2''$) aufgestellt worden.

Die beiden festbleibenden Gewinde sind zwei Complexe $C_{(2)}$, nämlich

$$C' \ldots x_{i_5} - x_{i_6} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (52\beta')$$
$$C'' \ldots x_{i_5} + x_{i_6} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (52\beta'');$$

das durch dieselben bestimmte Strahlennetz hat dasselbe Leitgeradenpaar e wie bez. im vorigen Falle unter 3); auch ist das Haupttetraeder dasselbe.

Z. B. $\Omega_1'' \ldots x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_3 x_4 + x_4 x_1 + 2 x_5 x_6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (52\gamma$

$\Omega_2'' \ldots x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_3 x_4 + x_4 x_1 - 2 x_5 x_6 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (52\gamma''$

deren Gleichungen in Beziehung auf das Haupttetraeder die Form:

$$(X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) \pm i\sqrt{2}\, X_5 X_6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52\delta)$$

annehmen. Die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen werden.

$$\left.\begin{aligned} K_1' \ldots \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + i Z_2 Z_3 &\equiv i Z_1 Z_4 + \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 + 2 z_2 z_3 \equiv \\ &\equiv 2\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_4^2 + 2\zeta_2\zeta_3 = 0 \\ K_2' \ldots i Z_1 Z_4 - \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 &\equiv \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - i Z_2 Z_3 \equiv 2 z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2 z_4^2 + 2 z_2 z_3 \equiv \\ &\equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 + \zeta_4^2 + 2\zeta_2\zeta_3 = 0 \end{aligned}\right\} (52\varepsilon')$$

$$\left.\begin{aligned} K_1'' \ldots \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - i Z_2 Z_3 &\equiv i Z_1 Z_4 - \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2 z_2 z_3 \equiv \\ &\equiv 2\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_4^2 - 2\zeta_2\zeta_3 = 0 \\ K_2'' \ldots i Z_1 Z_4 + \sqrt{2}\, Z_2 Z_3 &\equiv \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + i Z_2 Z_3 \equiv 2 z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 2 z_4^2 - 2 z_2 z_3 \equiv \\ &\equiv \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 - 2\zeta_2\zeta_3 = 0. \end{aligned}\right\} (52\varepsilon'')$$

5) 240 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^3(x_{i_1} x_{i_2}) - x_{i_4}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53\alpha)$

$$\nu_1 = 0,\ \nu_3 = -1,\ \nu_5 = -2 \quad \ldots\ldots \quad (53\alpha')$$

$$G_1 \ldots x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + x_{i_3}^2 = 0 \ \text{oder}\ x_{i_4}^2 + x_{i_5}^2 + x_{i_6}^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (53\beta')$$

$$\left.\begin{aligned} G_2 \ldots &[x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3(x_{i_5}^2 + x_{i_6}^2) = 0 \\ \text{oder}\ &[-2 x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3})]^2 + 3(x_{i_2} - x_{i_3})^2 + 6 x_{i_4}^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (53\beta'')$$

d. h. die Flächen G_1 sind die Fundamentalflächen $F^{(1)}$, deren jede 24 mal auftritt, die Flächen G_2 sind die 240 Flächen $F^{(6)}$ (vgl. § 7 unter 6) und § 8 II 5)). Die beiden festbleibenden Gewinde sind:

$$C' \ldots x_{i_1} \pm (x_{i_2} + x_{i_3}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\gamma')$$

$$C'' \ldots x_{i_4} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\gamma'')$$

d. h. ein Complex $C_{(3)}$ und ein Complex $C_{(1)}$; das durch dieselben bestimmte Strahlennetz hat ein Geradenpaar h zu Leitgeraden. Das Haupttetraeder ist von derselben Beschaffenheit, wie für die unter I 8) und 9) dieses § betrachteten tetraedralen Complexe. In Beziehung auf das Haupttetraeder erhält die Gleichung des Complexes Ω'' die Form:

$$\Omega'' \ldots (X_3^2 + X_4^2) + 2(X_5^2 - X_6^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\delta).$$

Bei der zugehörigen Correlation ergibt sich der tetraedrale Complex Ω_w der Wechselstrahlen (vgl. (48ϑ)), welcher bei den Fällen 1) bis 4) in zwei specielle lineare Complexe zerfällt, durch die Gleichung

$$3(X_1^2 + X_2^2) + 4(X_3^2 + X_4^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\varepsilon)$$

dargestellt; d. h. es ist derselbe tetraedrale Complex, welcher unter I 8) (36β') für die Collineationen mit demselben Haupttetraeder auftrat.

Z. B. $\Omega'' \ldots -x_1 x_3 - x_3 x_5 + x_5 x_1 - x_6^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\zeta)$

$$C' \ldots x_1 - x_3 + x_5 = 0, \quad C'' \ldots x_6 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (53\eta)$$

Eckpunkte Z_i und Flächen z_i:

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} Z_1 \ldots & 1 & -\frac{1}{j} c_1 & -jc_1 & -i & \ldots & Z_4 \\ Z_2 \ldots & c_1 & j & \frac{1}{j} & i c_1 & \ldots & Z_3 \\ Z_3 \ldots & c_1 & \frac{1}{j} & j & -i c_1 & \ldots & Z_2 \\ Z_4 \ldots & 1 & -jc_1 & -\frac{1}{j} c_1 & i & \ldots & Z_1 \end{array}\right\} \ldots \ldots (53\vartheta)$$

Kantenpaare des Haupttetraeders:

$$\left.\begin{array}{lcccccc l} K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \pm i\sqrt{3} & \ldots h \\ \left\{\begin{array}{l} K_{12} \ldots \\ K_{34} \ldots \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -\alpha^2 \\ -\alpha \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha^2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \Big\} \ldots k_0 \\ K_{13} \text{ und } K_{42} \ldots & 0 & 1 & 0 & \pm i & 0 & 0 & \ldots e \end{array}\right\} \ldots (53\iota)$$

$$G_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \equiv x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 \equiv x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \ldots F_1^{(1)} \ldots (53\varkappa')$$

$$\left.\begin{array}{l} G_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \ldots z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 + 2 z_1 z_2 + 2 z_1 z_3 - 2 z_3 z_4 + 2 z_4 z_2 \equiv \\ \equiv (x_1 - x_3 + x_5)^2 + 3(x_2^2 + x_4^2) \equiv (2x_1 - x_3 + x_5)^2 + 3(x_3 + x_5)^2 + 6x_6^2 = 0 \ldots F^{(6)} \equiv F_4^{(1)} + F_5^{(1)} + F_9^{(1)} \end{array}\right\} \ldots (53\varkappa'')$$

Kernflächen:

$$K_1 \ldots Z_1 Z_4 - c_2^2 Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - c_1^2 Z_2 Z_3 \equiv -z_2^2 - z_3^2 + z_1 z_2 - z_3 z_4 + z_1 z_3 + z_4 z_2 \equiv \equiv \zeta_1^2 + \zeta_4^2 + \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_4 \zeta_2 = 0 \quad \ldots (53\lambda')$$

$$K_2 \ldots Z_1 Z_4 - c_1^2 Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - c_2^2 Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 + z_4^2 + z_1 z_2 - z_3 z_4 + z_1 z_3 + z_4 z_2 \equiv \equiv -\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_4 \zeta_2 = 0 \quad \ldots (53\lambda'')$$

6) 1152 Complexe $\Omega'' \ldots \sum_1^5 (+x_{i_1} x_{i_2}) - x_{i_6}^2 = 0$ (54α)

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1^{(1)} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ \nu_3^{(1)} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi,\ \nu_5^{(1)} = 1 \\ \nu_1^{(2)} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi,\ \nu_3^{(2)} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ \nu_5^{(2)} = 1 \end{array}\right\} \ldots \ldots (54\beta)$$

Die Flächen G_1 und G_2 sind zwei zusammengehörige Flächen $F^{(11)}$ (vgl. § 7, 11)), deren Gleichungen für das zu betrachtende Beispiel unter (27β)—(27γ) bereits aufgestellt sind. Die beiden festbleibenden Gewinde sind:

$$C' \ldots x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_4} + x_{i_5} = 0;\quad C'' \ldots x_{i_6} = 0 \quad \ldots \ldots (54\gamma)$$

d. h. ein Complex $C_{(5)}$ (vgl. § 6 (14ε)) und ein Complex $C_{(1)}$. Das durch dieselben bestimmte Strahlennetz hat ein Geradenpaar m (vgl. § 4, (13σ)):

$$x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3} = x_{i_4} = x_{i_5} = 1,\ x_{i_6} = \pm i\sqrt{5} \quad \ldots \ldots (54\delta)$$

zu Leitgeraden. Die Kanten des Hauptvierseits sind zwei Geradenpaare n (vgl. § 4 (13τ)); das Haupttetraeder hat wie in I 12) vier Eckpunkte $\mathfrak{m}$ (vier Seitenflächen μ) vergl. § 4 8b)). Die Gleichungen der beiden zusammengehörigen Complexe Ω'' werden alsdann:

$$\Omega_1'' \ldots (X_1^2 + X_2^2)\sin\frac{\pi}{10} - (X_3^2 + X_4^2)\cos\frac{\pi}{5} + (X_5^2 - X_6^2) = 0 \quad \ldots \ldots (54\varepsilon')$$

$$\Omega_2'' \ldots -(X_1^2 + X_2^2)\cos\frac{\pi}{5} + (X_3^2 + X_4^2)\sin\frac{\pi}{10} + (X_5^2 - X_6^2) = 0 \quad \ldots \ldots (54\varepsilon'')$$

Die beiden tetraedralen Complexe Ω_{w_1}, Ω_{w_2} der Wechselstrahlen sind dieselben, wie bei den Collineationen I 12), deren Haupttetraeder dasselbe ist. (Vgl. (40β'), (40β'') und (40ε'), (40ε'')).

Z. B. $\Omega''_1 \ldots -x_1^2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_2 = 0$. . . (54ζ')

$\Omega_2'' \ldots -x_1^2 + x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_2 = 0$. . . (54ζ'')

$C' \ldots x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ (54η')

$C'' \ldots x_1 = 0$. (54η'')

Die Coordinaten der Elemente des Haupttetraeders sind in I 12) unter (40γ) und (40δ) angegeben.

Die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen werden:

$$\left\{\begin{array}{l} K_1' \ldots Z_1 Z_4 + \mathrm{tg}\,\varphi \,.\, Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 + \mathrm{cotg}\,\varphi \,.\, Z_2 Z_3 = 0 \\ K_2' \ldots Z_1 Z_4 + \mathrm{cotg}\,\varphi \,.\, Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 + \mathrm{tg}\,\varphi \,.\, Z_2 Z_3 = 0 \end{array}\right\} \ldots (54\vartheta')$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1'' \ldots Z_1 Z_4 - \operatorname{cotg}\varphi \,.\, Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - \operatorname{tg}\varphi \,.\, Z_2 Z_3 = 0 \\ K_3'' \ldots Z_1 Z_4 - \operatorname{tg}\varphi \,.\, Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - \operatorname{cotg}\varphi \,.\, Z_2 Z_3 = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots (54\vartheta'')$$

da im ersten Falle

$$\alpha_{14} + \alpha_{41} = \pm 2\cos\frac{\pi}{10} = \pm\frac{1}{\sin\varphi}, \quad \alpha_{23} + \alpha_{32} = \pm 2\cos\frac{3\pi}{10} = \pm\frac{1}{\cos\varphi}, \quad \ldots \quad (54\iota')$$

im zweiten Falle

$$\alpha_{14} + \alpha_{41} = \pm 2\cos\frac{3\pi}{10} = \pm\frac{1}{\cos\varphi}, \quad \alpha_{23} + \alpha_{32} = \mp 2\cos\frac{\pi}{10} = \mp\frac{1}{\sin\varphi} \quad \ldots \quad (54\iota'')$$

wird (vgl. (48η)).

§ 9.

Specielle und allgemeine hier in Betracht kommende Collineationen und Correlationen.

I. A) Specielle Collineationen.

1) Die Identität:

$$\tau Z_l' = Z_l \ (l = 1, 2, 3, 4) \text{ und } \sigma X_k' = X_k \ (k = 1, 2 \ldots 6) \quad \ldots (55)$$

Alle Elemente des Raumes bleiben fest; Wurzel $\tau = 1$ vierfach, $\sigma = 1$ sechsfach.

2) Geschaart-involutorische Collineationen.

Für ein Coordinatentetraeder, dessen eines Gegenkantenpaar (K_{14} und K_{23}) die Axen sind, werden die Formeln durch

$$\left.\begin{array}{l} \tau Z_1' = Z_1 \\ \tau Z_2' = -Z_2 \\ \tau Z_3' = -Z_3 \\ \tau Z_4' = Z_4 \end{array}\right\} (56\alpha) \text{ oder durch } \left.\begin{array}{l} \tau Z_1' = Z_4 \\ \tau Z_2' = Z_3 \\ \tau Z_3' = -Z_2 \\ \tau Z_4' = -Z_1 \end{array}\right\} (56\alpha') \text{ und } \left.\begin{array}{l} \sigma X_1' = X_1 \\ \sigma X_2' = X_2 \\ \sigma X_3' = X_3 \\ \sigma X_4' = X_4 \\ \sigma X_5' = -X_5 \\ \sigma X_6' = -X_6 \end{array}\right\} (56\alpha')$$

dargestellt; der tetraedrale Complex zerfällt in die beiden speciellen Complex $X_5 - i X_6 = 0$ und $X_5 + i X_6 = 0$. Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $1, 1, 1, 1, -1, -1$, der Gleichung in τ: $1, 1, -1, -1$ oder $i, i, -i, -i$; im ersteren Falle sind die Axen reell: hyperbolisch-geschaarte Involution; im zweiten Falle imaginär: elliptisch-geschaarte Involution.

Alle Elemente der beiden Axen, wie alle Geraden der durch dieselben bestimmten Congruenz bleiben fest. Alle Complexe des „Strahlen-Gebüsches“:

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 + k_4 X_4 = 0, \quad \ldots \quad (56\gamma)$$

welche die beiden Axen als „Grundgerade“ gemein haben, ebenso alle Complexe des Büschels:

$$k_5 X_5 + k_6 X_6 = 0, \quad \ldots \quad (56\delta)$$

welches zu dem Gebüsche in Involution ist, und endlich die ∞^5-Flächen 2ten Grades:

$$l_{11} Z_1^2 + l_{22} Z_2^2 + l_{33} Z_3^2 + l_{44} Z_4^2 + 2 l_{14} Z_1 Z_4 + 2 l_{23} Z_2 Z_3 = 0 \quad . \; . \; . \quad (56\varepsilon)$$

werden bez. in sich transformirt.

Als Axen werden im Folgenden die 15 Geradenpaare e, die 180 Geradenpaare d und die 120 Geradenpaare d_0 (vgl. § 3 unter (11)) auftreten.

3) m-zählige axiale Collineationen,[1]) wobei $m = 3, 4$ (im zweiten Haupttheile auch $= 5$) ist. Die Transformationsformeln werden für ein Coordinatentetraeder, dessen eines Gegenkantenpaar (K_{14} und K_{23}) bez. durch die Reihenaxe und die Büschelaxe gebildet wird:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= e^{\frac{2\pi i}{m}} Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= e^{-\frac{2\pi i}{m}} Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= Z_4 \end{aligned}\right\} (57\alpha) \text{ und } \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= X_1 \cos\frac{2\pi}{m} - X_2 \sin\frac{2\pi}{m} \\ \sigma\, X_2' &= X_1 \sin\frac{2\pi}{m} + X_2 \cos\frac{2\pi}{m} \\ \sigma\, X_3' &= X_3 \cos\frac{2\pi}{m} + X_4 \sin\frac{2\pi}{m} \\ \sigma\, X_4' &= -X_3 \sin\frac{2\pi}{m} + X_4 \cos\frac{2\pi}{m} \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= X_6\,. \end{aligned}\right\} (57\beta)$$

Ist die Kante K_{14} Büschel-, die Kante K_{23} Reihen-Axe, so werden die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= e^{\frac{2\pi i}{m}} Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= e^{-\frac{2\pi i}{m}} Z_4, \end{aligned}\right\} (57\alpha')$$

während in den Formeln (57β) nur die dritte und vierte sich in

$$\left.\begin{aligned} \sigma\, X_3' &= X_3 \cos\frac{2\pi}{m} - X_4 \sin\frac{2\pi}{m} \\ \sigma\, X_4' &= X_3 \sin\frac{2\pi}{m} + X_4 \cos\frac{2\pi}{m} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (57\beta')$$

ändern. Die Wurzeln der Gleichung in τ sind $1, 1, e^{\frac{2\pi i}{m}}, e^{-\frac{2\pi i}{m}}$, der Gleichung in σ: $1, 1, e^{\frac{2\pi i}{m}}, e^{\frac{2\pi i}{m}}, e^{-\frac{2\pi i}{m}}, e^{-\frac{2\pi i}{m}}$.

[1]) Vgl. über die Bezeichnung „axiale Collineation" F. Schur: Math. Ann. Bd. 19, S. 431. — J. Feder: (Math. Ann. Bd. 47, S. 347 ff.) nennt nach Reye's Vorgang diese Collineation planar.

Auch hier zerfällt der tetraedrale Complex $X_5^2 + X_6^2 = 0$ in zwei specielle lineare. Fest bleiben ausser den beiden Axen alle Strahlen der beiden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte die Punkte $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ und deren Ebenen die Ebenen E_2 und E_3 sind.

Die Complexe der beiden „Gebüsche":

$$k_1 (X_1 \mp i X_2) + k_3 (X_3 \pm i X_4) + k_5 X_5 + k_6 X_6 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (57\gamma)$$

d. h. alle Complexe, welche je einen der beiden erwähnten Strahlbüschel gemein haben, ebenso alle Complexe des Büschels:

$$k_5 X_5 + k_6 X_6 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (57\delta)$$

und ebenso die ∞^3 Flächen 2ten Grades:

$$l_{11} Z_1^2 + l_{44} Z_4^2 + 2\, l_{14} Z_1 Z_4 + 2\, l_{23} Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (57\varepsilon)$$

werden bez. in sich transformirt.

Als Axen der dreizähligen axialen Collineationen treten im Folgenden die 160 Geradenpaare k, als Axen der vierzähligen die 15 Geradenpaare e auf.

4) m-zählige geschaarte Collineationen,[1]) wobei $m = 3, 4$ (im zweiten Haupttheile auch $= 5$) ist. Für ein Coordinatentetraeder, dessen eines Gegenkantenpaar die beiden Axen der geschaarten Collineationen sind, werden die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \tau Z_1' &= Z_1 \\ \tau Z_2' &= e^{\frac{2\pi i}{m}} Z_2 \\ \tau Z_3' &= e^{\frac{2\pi i}{m}} Z_3 \\ \tau Z_4' &= Z_4 \end{aligned}\right\} (58\alpha) \text{ oder } \left.\begin{aligned} \tau Z_1' &= e^{-\frac{\pi i}{m}} Z_1 \\ \tau Z_2' &= e^{\frac{\pi i}{m}} Z_2 \\ \tau Z_3' &= e^{\frac{\pi i}{m}} Z_3 \\ \tau Z_4' &= e^{-\frac{\pi i}{m}} Z_4 \end{aligned}\right\} (58\alpha') \quad \left.\begin{aligned} \sigma X_1' &= X_1 \\ \sigma X_2' &= X_2 \\ \sigma X_3' &= X_3 \\ \sigma X_4' &= X_4 \\ \sigma X_5' &= X_5 \cos\frac{2\pi}{m} + X_6 \sin\frac{2\pi}{m} \\ \sigma X_6' &= -X_5 \sin\frac{2\pi}{m} + X_6 \cos\frac{2\pi}{m}; \end{aligned}\right\} (58\beta)$$

die Wurzeln der Gleichung in τ sind: $1, 1, e^{\frac{2\pi i}{m}}, e^{\frac{2\pi i}{m}}$ oder $e^{-\frac{\pi i}{m}}, e^{-\frac{\pi i}{m}}, e^{\frac{\pi i}{m}}, e^{\frac{\pi i}{m}}$,

diejenigen der Gleichung in σ sind: $1, 1, 1, 1, e^{\frac{2\pi i}{m}}, e^{-\frac{2\pi i}{m}}$.

Der tetraedrale Complex $X_5^2 + X_6^2 = 0$ zerfällt auch hier in zwei specielle lineare. Fest bleiben bei der Collineation die beiden Axen und alle Geraden der durch sie bestimmten Congruenz. Alle Complexe des „Gebüsches":

[1]) Vgl. R. Sturm: Math. Ann. Bd. 26, S. 174. Der Ausdruck „Collineation mit Axen" statt „geschaarter Collineation" scheint mir nicht geeignet, da er zu Verwechselungen mit der „axialen" Collineation 3) nach Schur führen kann.

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 + k_4 X_4 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58\gamma)$$

welche die beiden Axen als Grundgerade gemein haben, und die beiden speciellen Complexe:

$$X_5 \mp i X_6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58\delta)$$

werden in sich transformirt; jede der ∞^3 Flächen 2ten Grades:

$$l_{12} Z_1 Z_2 + l_{34} Z_3 Z_4 + l_{13} Z_1 Z_3 + l_{42} Z_4 Z_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (58\varepsilon)$$

welche durch das Axenpaar hindurchgehen, geht in sich (auf die erste Art) über. Als Axen der geschaarten Collineationen treten für die dreizähligen die 80 Geradenpaare k_0 (§ 3 (11)), für die vierzähligen die 15 Geradenpaare e auf. Für $m = 2$ resultirt ebenso wie bei 3) die involutorisch-geschaarte Collineation 2).

5) Centrisch-involutorische Collineationen. Die Transformationsformeln werden für ein Coordinatentetraeder, dessen einer Eckpunkt ($\mathfrak{E}_1$) das Centrum, dessen gegenüberliegende Seitenfläche (E_1) die Ebene der centrischen Involution (Homologie) ist:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= -Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= Z_4 \end{aligned}\right\} (59\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= -X_2 \\ \sigma\, X_2' &= X_1 \\ \sigma\, X_3' &= -X_4 \\ \sigma\, X_4' &= X_3 \\ \sigma\, X_5' &= -X_6 \\ \sigma\, X_6' &= X_5\,. \end{aligned}\right\} (59\beta)$$

Die Gleichung des tetraedralen Complexes wird hier eine Identität. Die Wurzeln τ sind $-1, 1, 1, 1$, die Wurzeln σ: $-1, 1, -1, 1, -1, 1$. Alle Strahlen des Strahlenbüschels mit Mittelpunkt $\mathfrak{E}_1$ und alle Strahlen des Strahlenfeldes der Ebene E_1 bleiben fest; es werden ∞^6 Flächen zweiten Grades, für welche sich $\mathfrak{E}_1$ und E_1 als Pol und Polarebene entsprechen, nämlich die Flächen:

$$(59\gamma) \ldots l_{11} Z_1^2 + l_{22} Z_2^2 + l_{33} Z_3^2 + l_{44} Z_4^2 + 2\, l_{34} Z_3 Z_4 + 2\, l_{42} Z_4 Z_2 + 2\, l_{23} Z_2 Z_3 = 0$$

in sich (auf die zweite Art) transformirt.

Die hier auftretenden Punkte $\mathfrak{E}_1$ und Ebenen E_1 sind die 60 Punkte $\mathfrak{e}$ und 60 Ebenen ε, welche die 15 Fundamentaltetraeder constituiren.

I B) Allgemeine Collineationen.

Die sämmtlichen hier auftretenden Collineationen sind m-zählige, wobei $m = 4, 6, 8, 12, 5$ ist (vgl. § 8 unter I, Formeln (28)).

1) Vierzählige Collineationen.

Für das festbleibende Tetraeder als Coordinatentetraeder werden die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \tau Z_1' &= j\,Z_1 \\ \tau Z_2' &= -j\,Z_2 \\ \tau Z_3' &= -\frac{1}{j} Z_3 \\ \tau Z_4' &= \frac{1}{j} Z_4 \end{aligned}\right\} (60\alpha) \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} \tau Z_1' &= Z_1 \\ \tau Z_1' &= -Z_2 \\ \tau Z_3' &= i\,Z_3 \\ \tau Z_4' &= -i\,Z_4 \end{aligned}\right\} (60\alpha') \qquad \left.\begin{aligned} \sigma X_1' &= X_2 \\ \sigma X_2' &= -X_1 \\ \sigma X_3' &= -X_3 \\ \sigma X_4' &= -X_4 \\ \sigma X_5' &= X_5 \\ \sigma X_6' &= X_6\,; \end{aligned}\right\} (60\beta)$$

die Gleichung des tetraedralen Complexes Ω wird (vgl. § 8 I 1) bis 5)):

$$(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60\gamma)$$

Die Wurzeln τ sind $j, -j, -\frac{1}{j}, \frac{1}{j}$ oder $1, -1, i, -i$, die Wurzeln σ: $1, 1, -1, -1, i, -i$ oder $1, -1, i, -i, i, -i$. Die zweite Potenz dieser Substitution ergiebt eine geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar K_{12} und K_{34}, während die dritte Potenz die Substitution liefert, für welche in den Wurzelwerthen für τ und σ das Vorzeichen für i das entgegengesetzte ist.

Die vierzähligen Collineationen S, S^3 besitzen die ausgezeichnete Eigenschaft, dass sie einmal, da die beiden Bedingungsgleichungen (vgl. § 8 unter (28ε') und (28ε'')) $\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 = -i$ und $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_4\alpha_2 = i$ erfüllt sind, auf zwei Arten eigentliche Collineationen sind, durch welche die Complexe der beiden Büschel (28ζ') und (28ζ'') und ebenso alle Flächen zweiter Ordnung der beiden Büschel (28η') und (28η'') in sich transformirt werden; andererseits sind sie aber, da die Bedingungen (28ϰ) $\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_3\alpha_4 = -1$ und gleichzeitig $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ und $\alpha_3 = -\alpha_4 = i$ erfüllt sind, auf zwei Arten uneigentliche Collineationen, durch welche die beiden Netze (Gewebe) sich selbst entsprechender Flächen (28λ') und (28λ''), wie auch die beiden Gebüsche sich involutorisch entsprechender Flächen (28μ') und (28μ'') bestimmt sind.

Die Kanten, Eckpunkte und Seitenflächen der Haupttetraeder für die hier in Betracht kommenden vierzähligen Collineationen sind in § 8 I unter 1) bis 5) angegeben.

2) Sechszählige Collineationen.

Dieselben sind entweder auf zwei Arten eigentliche oder auf eine Art uneigentliche Collineationen.

a) Auf zwei Arten eigentliche sechszählige Collineationen.

Die Transformationsformeln werden für das festbleibende Tetraeder als Coordinatentetraeder:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= -Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= -\alpha Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= \alpha Z_4 \end{aligned}\right\} (61\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} X_2 \\ \sigma\, X_2' &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 \\ \sigma\, X_3' &= -X_3 \\ \sigma\, X_4' &= -X_4 \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= X_6\,, \end{aligned}\right\} (61\beta)$$

wobei $\alpha^3 = 1$ ist; die Gleichung des tetraedralen Complexes Ω wird (vergl. § 8 I unter 8) und 10), Formeln (36β) und (38β)):

$$\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) + (X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (61\gamma)$$

Die Wurzeln τ sind αi, $-\alpha i$, $-\alpha^2 i$, $\alpha^2 i$ oder 1, -1, $-\alpha$, α; die Wurzeln σ: $1, 1, -1, -1, \alpha, \alpha^2$. Den Potenzen einer solchen Substitution entsprechen folgende Wurzelwerthe für τ und σ:

	Wurzeln für τ:				Wurzeln für σ:						
S . . .	1	-1	$-\alpha$	α . . .	1	1	-1	-1	α	α^2	(61δ)
S^2 . . .	1	1	α^2	α^2 . . .	1	1	1	1	α^2	α	
S^3 . . .	1	-1	-1	1 . . .	1	1	-1	-1	1	1	
S^4 . . .	1	1	α	α . . .	1	1	1	1	α	α^2	
S^5 . . .	1	-1	$-\alpha^2$	α^2 . . .	1	1	-1	-1	α^2	α.	

S und S^5 ergeben die beiden zusammengehörigen sechszähligen Collineationen; dieselben sind auf zwei Arten eigentlich, da die beiden Bedingungen (§ 8 (28ε') und (28ε'')) $\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_4\alpha_2$ erfüllt sind; S^2 und S^4 liefern zwei zusammengehörige dreizählige geschaarte Collineationen (vgl. unter 4) dieses § für $m = 3$), deren Axenpaar die Kanten K_{12} und K_{34} sind, und S^3 ergiebt eine geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar K_{13} und K_{42}.

Die Kanten, Eckpunkte und Flächen der Haupttetraeder für die im Folgenden auftretenden derartigen sechszähligen Collineationen sind in § 8 I unter 8) und 10) angegeben worden.

b) Auf eine Art uneigentliche sechszählige Collineationen.

Die Transformationsformeln sind:

$$\left.\begin{aligned} \tau\ Z_1' &= Z_1 \\ \tau\ Z_2' &= -Z_2 \\ \tau\ Z_3' &= \alpha\, Z_3 \\ \tau\ Z_4' &= \alpha^2 Z_4 \end{aligned}\right\}\ (62\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\ X_1' &= -X_2 \\ \sigma\ X_2' &= X_1 \\ \sigma\ X_3' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_3 - \tfrac{1}{2}\,X_4 \\ \sigma\ X_4' &= \tfrac{1}{2}\,X_3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_4 \\ \sigma\ X_5' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_5 - \tfrac{1}{2}\,X_6 \\ \sigma\ X_6' &= \tfrac{1}{2}\,X_5 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_6; \end{aligned}\right\}\ (62\beta)$$

die Gleichung des tetraedralen Complexes (vgl. § 8 I unter 11), Formel (39β)) ist: $(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0$ (62γ)

Die den Potenzen einer solchen Substitution entsprechenden Wurzelwerthe für τ und σ sind:

	Wurzeln für τ:				Wurzeln für σ:					
S	1	—1	α	α^2	1	—1	α	$-\alpha$	α^2	$-\alpha^2$
S^2	1	1	α^2	α	1	1	α^2	α^2	α	α
S^3	1	—1	1	1	1	—1	1	—1	1	—1
S^4	1	1	α	α^2	1	1	α	α	α^2	α^2
S^5	1	—1	α^2	α	1	—1	α^2	$-\alpha^2$	α	$-\alpha$.

(62δ)

S und S^5 liefern die beiden zusammengehörigen sechszähligen Collineationen, welche auf eine Art uneigentlich sind, da die Bedingungen (§ 8 (28ϰ)) $\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_3\alpha_4$ und $\alpha_1 = -\alpha_2$ erfüllt sind; S^2 und S^4 ergeben zwei zusammengehörige dreizählige axiale Collineationen (vergl. unter 3) dieses § für $m = 3$), deren Axenpaar die Kanten K_{12} und K_{34} sind, und S^3 ergiebt eine centrisch involutorische Collineation (vgl. unter 5) dieses §), für welche die Ecke $\mathfrak{E}_1$ der Mittelpunkt des festbleibenden Strahlenbündels, die Ebene E_1 die Ebene des festbleibenden Strahlenfeldes ist.

Ueber die Elemente des Haupttetraeders für die hier in Betracht kommenden derartigen sechszähligen Collineation vgl. § 8 I unter 11).

3) Achtzählige Collineationen.

a) Auf eine Art eigentliche achtzählige Collineationen.

Die Transformationsformeln sind:

$$\left.\begin{aligned} \tau\ Z_1' &= Z_1 \\ \tau\ Z_2' &= \frac{1}{j}\,Z_2 \\ \tau\ Z_3' &= -j\,Z_3 \\ \tau\ Z_4' &= -Z_4 \end{aligned}\right\}\ (63\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\, X_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_1 + X_2)\\
\sigma\, X_2' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_1 - X_2)\\
\sigma\, X_3' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_3 - X_4)\\
\sigma\, X_4' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_3 + X_4)\\
\sigma\, X_5' &= -X_5\\
\sigma\, X_6' &= -X_6\,;
\end{aligned}\right\}\quad (63\beta)$$

die Gleichungen der beiden tetraedralen Complexe Ω werden (vergl. § 8 I unter 6) (34β)):

$$-(X_1^2+X_2^2)+(X_3^2+X_4^2)\pm\sqrt{2}\,(X_5^2+X_6^2)=0\,, \quad . \;.\;.\;.\quad (63\gamma)$$

von denen der eine zu den den Substitutionen S und S^7, der andere zu den den Substitutionen S^3 und S^5 entsprechenden Transformationen gehört.

Die den Potenzen von S angehörigen Wurzeln für τ und σ sind:

$$\left.\begin{array}{lccccccccccc}
 & \multicolumn{4}{c}{\text{Wurzeln für } \tau:} & & \multicolumn{6}{c}{\text{Wurzeln für } \sigma:}\\
S \;\ldots & 1 & \frac{1}{j}=e^{-\frac{\pi i}{4}}, & -j=e^{-\frac{3\pi i}{4}}, & -1 & \ldots & 1 & 1 & j & -j & \frac{1}{j} & -\frac{1}{j}\\
S^2 \ldots & 1 & -i & i & 1 & \ldots & 1 & 1 & i & i & -i & -i\\
S^3 \ldots & 1 & e^{-\frac{3\pi i}{4}} & e^{-\frac{\pi i}{4}} & -1 & \ldots & 1 & 1 & -\frac{1}{j} & \frac{1}{j} & -j & j\\
S^4 \ldots & 1 & -1 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
S^5 \ldots & 1 & e^{\frac{3\pi i}{4}} & e^{\frac{\pi i}{4}} & -1 & \ldots & 1 & 1 & -j & j & -\frac{1}{j} & \frac{1}{j}\\
S^6 \ldots & 1 & i & -i & 1 & \ldots & 1 & 1 & -i & -i & i & i\\
S^7 \ldots & 1 & e^{\frac{\pi i}{4}} & e^{\frac{3\pi i}{4}} & -1 & \ldots & 1 & 1 & \frac{1}{j} & -\frac{1}{j} & j & -j.
\end{array}\right\}\quad (63\delta)$$

S, S^7 und S^3, S^5 ergeben die zu je zweien zusammengehörigen achtzähligen Collineationen, welche, da sie die Bedingung $\alpha_1\,\alpha_4 = \alpha_2\,\alpha_3$ erfüllen, auf eine Art eigentliche sind; S^2 und S^6 liefern zwei zusammengehörige 4zählige axiale Collineationen (vgl. unter I A 3) dieses § für $m = 4$), deren Axen das Kantenpaar K_{14}, K_{23} sind und endlich S^4 bedeutet eine geschaart-involutorische Collineation mit demselben Kantenpaar als Axen.

Die Elemente des Haupttetraeders für die hier auftretenden Collineationen sind in § 8 I unter 6) angegeben worden.

b) Auf eine Art uneigentliche achtzählige Collineationen.

Die Transformationsformeln sind:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= -Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= j\, Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= \frac{1}{j}\, Z_4 \end{aligned}\right\} \quad (64\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= -X_2 \\ \sigma\, X_2' &= X_1 \\ \sigma\, X_3' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_3 + X_4) \\ \sigma\, X_4' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_3 - X_4) \\ \sigma\, X_5' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_5 - X_6) \\ \sigma\, X_6' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_5 + X_6); \end{aligned}\right\} \quad (64\beta)$$

die Gleichung des tetraedralen Complexes Ω wird (vgl. § 8 I unter 7) (35β)):

$$(X_3^2 + X_4^2) - (X_5^2 + X_6^2) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64\gamma)$$

Die den Potenzen von S entsprechenden Wurzeln für τ und σ sind:

$$\left.\begin{array}{lcccccccccccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{Wurzeln für } \tau:} & & \multicolumn{6}{c}{\text{Wurzeln für } \sigma:} \\ S \;,\ldots & 1 & -1 & j & \frac{1}{j} & \ldots & 1 & -1 & j & -j & \frac{1}{j} & -\frac{1}{j} \\ S^2 \ldots & 1 & 1 & i & -i & \ldots & 1 & 1 & i & i & -i & -i \\ S^3 \ldots & 1 & -1 & -\frac{1}{j} & -j & \ldots & 1 & -1 & -\frac{1}{j} & \frac{1}{j} & -j & j \\ S^4 \ldots & 1 & 1 & -1 & -1 & \ldots & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ S^5 \ldots & 1 & -1 & -j & -\frac{1}{j} & \ldots & 1 & -1 & -j & j & -\frac{1}{j} & \frac{1}{j} \\ S^6 \ldots & 1 & 1 & -i & i & \ldots & 1 & 1 & -i & -i & i & i \\ S^7 \ldots & 1 & -1 & \frac{1}{j} & j & \ldots & 1 & -1 & \frac{1}{j} & -\frac{1}{j} & j & -j\,. \end{array}\right\} \quad (64\delta)$$

Die Potenzen S, S^7; S^3, S^5 ergeben die vier zusammengehörigen achtzähligen Collineationen, welche wegen $\alpha_1 \alpha_2 = -\alpha_3 \alpha_4$ und $\alpha_1 = -\alpha_2$ (vgl. § 8 I Formel (28$\varkappa$)) uneigentliche sind, S^2 und S^4 liefern zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen, deren Axenpaar das Kantenpaar K_{12}, K_{34} ist und endlich S^4 bedeutet eine geschaart-involutorische Collineation mit demselben Axenpaar.

Die Elemente des Haupttetraeders für die hier auftretenden derartigen Collineationen sind dieselben, wie für die eigentlichen achtzähligen unter 3a) (vgl. § 8 I unter 7)), wobei in der Bezeichnung Z_2, Z_3, Z_4 bezw. durch Z_4, Z_2, Z_3, also K_{14}, K_{23} durch K_{12}, K_{34} zu ersetzen sind.

4) Zwölfzählige Collineationen.

Dieselben sind nur auf eine Art eigentliche; die Transformationsformeln werden:

$$\left.\begin{aligned}\tau\ Z_1' &= Z_1\\ \tau\ Z_2' &= -i Z_2\\ \tau\ Z_3' &= \alpha Z_3\\ \tau\ Z_4' &= -i\alpha Z_4\end{aligned}\right\}\ (65\alpha)\qquad \left.\begin{aligned}\sigma\ X_1' &= -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,X_2\\ \sigma\ X_2' &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,X_1 - \frac{1}{2}X_2\\ \sigma\ X_3' &= -X_4\\ \sigma\ X_4' &= X_3\\ \sigma\ X_5' &= X_5\\ \sigma\ X_6' &= X_6\ ;\end{aligned}\right\}\ (65\beta)$$

die Gleichung des tetraedralen Complexes wird (vgl. § 8 I unter 9) (37β)):

$$\Omega_w \ \ldots -\frac{1}{2}\,(X_1^2+X_2^2)+(X_5^2+X_6^2)=0\ \ldots\ldots\ (65\gamma)$$

Die den Potenzen von S entsprechenden Wurzeln für τ und σ sind:

	Wurzeln für τ:				Wurzeln für σ:						
S	1	$-i$	α	$-i\alpha$	1	1	i	$-i$	α	α^2	
S^2	1	-1	α^2	$-\alpha^2$	1	1	-1	-1	α^2	α	
S^3	1	i	1	i	1	1	$-i$	i	1	1	
S^4	1	1	α	α	1	1	1	1	α	α^2	
S^5	1	$-i$	α^2	$-i\alpha^2$	1	1	i	$-i$	α^2	α	
S^6	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	(65δ)
S^7	1	i	α	$i\alpha$	1	1	$-i$	i	α	α^2	
S^8	1	1	α^2	α^2	1	1	1	1	α^2	α	
S^9	1	$-i$	1	$-i$	1	1	i	$-i$	1	1	
S^{10}	1	-1	α	$-\alpha$	1	1	-1	-1	α	α^2	
S^{11}	1	i	α^2	$i\alpha^2$	1	1	$-i$	i	α^2	α.	

Die Potenzen S, S^{11}; S^5, S^7 liefern die vier zusammengehörigen zwölfzähligen Collineationen, welche wegen $\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ auf eine Art eigentliche sind, S^2 und S^{10} ergeben zwei zusammengehörige sechszählige Collineationen, welche auf zwei Arten eigentliche sind (vgl. unter I 2a) dieses §) und für welche das Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die zwölfzähligen; S^3 und S^9 ergeben zwei zusammengehörige vierzählige, S^4 und S^8 zwei zusammengehörige dreizählige geschaarte Collineationen (vgl. unter I A 3) dieses §), deren Axenpaare bez. die Kantenpaare K_{13}, K_{42} und K_{12}, K_{34} sind und endlich S^6 bedeutet eine geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar K_{13}, K_{42}.

Die Elemente des Haupttetraeders für die hier in Betracht kommenden zwölfzähligen Collineationen sind in § 8 unter 8), 9) Formeln (36) und (37) angegeben.

5) Fünfzählige Collineationen.

Dieselben sind nur auf eine Art eigentliche; die Transformationsformeln werden:

$$\left.\begin{aligned} \tau\, Z_1' &= Z_1 \\ \tau\, Z_2' &= e^{-\frac{2\pi i}{5}} Z_2 \\ \tau\, Z_3' &= e^{-\frac{4\pi i}{5}} Z_3 \\ \tau\, Z_4' &= e^{\frac{4\pi i}{5}} Z_4 \end{aligned}\right\} (66\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= -X_1 \cos\frac{\pi}{5} - X_2 \sin\frac{\pi}{5} \\ \sigma\, X_2' &= X_1 \sin\frac{\pi}{5} - X_2 \cos\frac{\pi}{5} \\ \sigma\, X_3' &= X_3 \cos\frac{2\pi}{5} - X_4 \sin\frac{2\pi}{5} \\ \sigma\, X_4' &= X_3 \sin\frac{2\pi}{5} + X_4 \cos\frac{2\pi}{5} \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= X_6\ ; \end{aligned}\right\} (66\beta)$$

die Gleichungen der beiden tetraedralen Complexe Ω, von denen der erstere zu den den Substitutionen S, S^4, der andere zu den den Substitutionen S^2, S^3 entsprechenden Transformationen gehört, werden (vgl. § 8 I unter 12) (40β') (40β''):

$$-(X_1^2+X_2^2)\cos\frac{\pi}{5} + (X_3^2+X_4^2)\sin\frac{\pi}{10} + (X_5^2+X_6^2) = 0 \quad .\ .\ .\ .\ (66\gamma')$$

$$(X_1^2+X_2^2)\sin\frac{\pi}{10} - (X_3^2+X_4^2)\cos\frac{\pi}{5} + (X_5^2+X_6^2) = 0 \quad .\ .\ .\ .\ .\ (66\gamma'')$$

Die den Potenzen von S zugehörigen Wurzelwerthe für τ und σ sind:

$$\begin{array}{lcccc|cccccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{Wurzeln für } \tau:} & \multicolumn{6}{c}{\text{Wurzeln für } \sigma:} \\ S \ldots & 1 & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & e^{\frac{4\pi i}{5}} & \ldots\ 1 & 1 & e^{\frac{2\pi i}{5}} & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & e^{\frac{4\pi i}{5}} & e^{-\frac{4\pi i}{5}} \\ S^2 \ldots & 1 & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & e^{\frac{2\pi i}{5}} & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & \ldots\ 1 & 1 & e^{\frac{4\pi i}{5}} & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & e^{\frac{2\pi i}{5}} \\ S^3 \ldots & 1 & e^{\frac{4\pi i}{5}} & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & e^{\frac{2\pi i}{5}} & \ldots\ 1 & 1 & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & e^{\frac{4\pi i}{5}} & e^{\frac{2\pi i}{5}} & e^{-\frac{2\pi i}{5}} \\ S^4 \ldots & 1 & e^{\frac{2\pi i}{5}} & e^{\frac{4\pi i}{5}} & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & \ldots\ 1 & 1 & e^{-\frac{2\pi i}{5}} & e^{\frac{2\pi i}{5}} & e^{-\frac{4\pi i}{5}} & e^{\frac{4\pi i}{5}}. \end{array} \quad (66\delta)$$

Die Potenzen S, S^4 und S^2, S^3 liefern die zu je zweien zusammengehörigen fünfzähligen Collineationen, welche wegen $\alpha_1\,\alpha_4 = \alpha_2\,\alpha_3$ auf eine Art eigentliche sind; die Elemente des Haupttetraeders für die hier in Betracht kommenden fünfzähligen Collineationen sind in § 8 I unter 12) aufgeführt.

II A) Specielle Correlationen.

1) Polarcorrelationen.

Die hier auftretenden Polarcorrelationen werden in Beziehung auf ein Coordinatentetraeder, welches hinsichtlich der Basis sich selbst conjugirt ist, durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= \pm Z_1 \\ t\,Z_2' &= \pm Z_2 \\ t\,Z_3' &= \pm Z_3 \\ t\,Z_4' &= \pm Z_4 \end{aligned}\right\} \quad (67\alpha)$$

die Basis durch $\pm Z_1^2 \pm Z_2^2 \pm Z_3^2 \pm Z_4^2 = 0$ $(67\beta')$

oder durch $\pm Z_1^2 \pm Z_2^2 \pm Z_3^2 \pm Z_4^2 = 0$ $(67\beta'')$

dargestellt. Für die vier positiven Vorzeichencombinationen, z. B.

$$+\ +\ -\ -\ \ldots (F_2^{(1)})$$

werden die entsprechenden Formeln in X_i:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_1 \\ \sigma\,X_2' &= -X_2 \\ \sigma\,X_3' &= -X_3 \\ \sigma\,X_4' &= X_4 \\ \sigma\,X_5' &= -X_5 \\ \sigma\,X_6' &= X_6\,; \end{aligned}\right\} \quad (67\gamma)$$

die Gleichung der Basis wird:

$X_1^2 + X_4^2 + X_6^2 = 0$ (67δ)

oder $X_2^2 + X_3^2 + X_5^2 = 0$ $(67\delta')$

Diese Basis bildet die „Grundregelschaar“ der beiden Netze von Complexen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 X_1 + a_4 X_4 + a_6 X_6 &= 0 \\ a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_5 X_5 &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67\delta'')$$

welche durch die Polarcorrelation in sich transformirt werden. Für die vier negativen Vorzeichencombinationen, z. B. $- + + + \ldots (F_1^{(2)})$ erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_2 \\ \sigma\,X_2' &= X_1 \\ \sigma\,X_3' &= X_4 \\ \sigma\,X_4' &= X_3 \\ \sigma\,X_5' &= X_6 \\ \sigma\,X_6' &= X_5 \end{aligned}\right\} \quad (67\varepsilon)$$

und als Gleichung der Basis:

$(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2 = 0$ (67ζ)

oder $(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 + (X_5 + X_6)^2 = 0$ $(67\zeta')$

(Vgl. (18δ) und (18ε) in § 7).

Diese Basis bildet die „Grundregelschaar“ der beiden Complex-Netze:

$a_1(X_1 \mp X_2) + a_3(X_3 \mp X_4) + a_5(X_5 \mp X_6) = 0,$ $(67\zeta'')$

welche durch die Correlation in sich übergehen. Z. B. in Beziehung auf die Fläche $F_1^{(1)} \ldots Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = 0$ als Basisfläche wird die Fläche (67δ): $F_2^{(1)} \ldots Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 - Z_4^2 = 0$, welche mit $F_1^{(1)}$ ein Vierseit (35), (46) gemein hat, in sich auf die erste Art, dagegen die Fläche (67ζ):

$F_1^{(2)} \ldots -Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2=0$, welche mit $F_1^{(1)}$ eine conische Berührung hat, in sich auf die zweite Art transformirt.

Wählt man dagegen als Coordinatentetraeder ein solches, dessen beiden Kantenpaare zwei Geradenpaare der beiden Erzeugungen der Fläche sind, dessen Eckpunkte und Seitenfläche also der Fläche angehören (ein sog. Polartetraeder besonderer Art), so erhält man für K_{12}, K_{13} und K_{34}, K_{42} als Erzeugende:

$$\left.\begin{array}{l} t\,Z_1' = Z_4 \\ t\,Z_2' = \gamma Z_3 \\ t\,Z_3' = \gamma Z_2 \\ t\,Z_4' = Z_1 \end{array}\right| \quad (67\eta_1)$$

und als Gleichung der Basis:

$$Z_1 Z_4 + \gamma Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (67\vartheta_1)$$

$$\text{oder } Z_1 Z_4 + \gamma Z_2 Z_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (67\vartheta_1')$$

$$\gamma = \pm 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\,X_1' = X_1 \\ \sigma\,X_2' = X_2 \\ \sigma\,X_3' = -X_3 \\ \sigma\,X_4' = -X_4 \\ \sigma\,X_5' = \mp X_5 \\ \sigma\,X_6' = \pm X_6 \end{array}\right| \quad (67\eta_2)$$

$$\text{und } X_1^2+X_2^2+X_6^2=0 \text{ oder } X_3^2+X_4^2+X_5^2=0 \quad \ldots \quad (67\vartheta)$$

$$\text{resp. } X_1^2+X_2^2+X_5^2=0 \text{ oder } X_3^2+X_4^2+X_6^2=0 \quad \ldots \quad (67\vartheta')$$

Die Netze von Complexen, deren Grundregelschaar diese Fläche ist, haben zu Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 X_2 + a_2 X_2 + a_6 X_6 = 0 \\ a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0 \end{array}\right\} (67\vartheta_1'') \text{ und } \left.\begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_5 X_5 = 0 \\ a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_6 X_6 = 0. \end{array}\right\} (67\vartheta_2'')$$

Die hier in Betracht kommenden Correlationen haben zu Basisflächen die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$, die 60 Flächen $F^{(2)}$, die 90 Flächen $F^{(3)}$ und die 180 Flächen $F^{(4)}$ (vgl. § 7 unter 1), 2), 3), 4)).

2) Nullcorrelationen.

Es treten hier nur die Nullsysteme auf, deren zugehörige lineare Complexe die 6 Fundamental-Complexe $C_{(1)}$ und die 30 Complexe $C_{(2)}$ (vgl. § 6 (14α) (14β)) sind. Für einen Complex $X_1=0$ lauten die Transformationsformeln in Bezug auf ein Tetraeder, dessen Gegenkantenpaar K_{12}, K_{34} ein Paar hinsichtlich des Nullsystems conjugirter Polaren ist, während die vier übrigen Kanten Complexstrahlen darstellen:

$$\left.\begin{array}{l} t\,Z_1' = Z_2 \\ t\,Z_2' = -Z_1 \\ t\,Z_3' = Z_4 \\ t\,Z_4' = -Z_3 \end{array}\right| (68\alpha) \qquad \left.\begin{array}{l} \sigma\,X_1' = -X_1 \\ \sigma\,X_2' = X_2 \\ \sigma\,X_3' = X_3 \\ \sigma\,X_4' = X_4 \\ \sigma\,X_5' = X_5 \\ \sigma\,X_6' = X_6\,. \end{array}\right| (68\beta)$$

Alle Complexe des „Gewebes“:

$$a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\gamma)$$

zu welchen der Complex $X_1 = 0$ in Involution ist, werden in sich transformirt.

Für ein Nullsystem, dessen zugehöriger linearer Complex ein Complex $C_{(2)} \ldots x_{i_1} \pm x_{i_2} = 0$ ist, kann diese Form leicht durch Coordinatentransformation erhalten werden.

Für eine Correlation $Z'_i = \sum\limits_k \beta_{ik} Z_k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$ liefern bekanntlich die Wurzeln der biquadratischen Gleichung, welche durch Nullsetzen der Determinante entsteht, deren Diagonalglieder β_{ii} $(\varrho - 1)$ sind, während zwei symmetrisch liegende Elemente durch $\varrho \beta_{ik} - \beta_{ki}$ und $\varrho \beta_{ki} - \beta_{ik}$ dargestellt sind, die vier Werthgruppen Z_i, welche die mit ihren entsprechenden Ebenen incidenten Punkte bestimmen. Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung werden bei einer Polarcorrelation $\varrho = 1, 1, 1, 1$, bei einer Nullcorrelation $\varrho = -1, -1, -1, -1$.

Die Gleichung 6ten Grades in σ, deren Wurzeln die bei einer Correlation festbleibenden Geraden und linearen Complexe bestimmen, hat für den Fall einer Polarcorrelation (vgl. (67γ)) die Wurzeln $\sigma = 1, 1, 1, -1, -1, -1$, für den Fall einer Nullcorrelation (vgl. (68β)) die Wurzeln $\sigma = -1, 1, 1, 1, 1, 1$.

3) Correlationen mit Axen.

Bei einer derartigen Correlation sind die beiden sich involutorisch entsprechenden Axen g_1, g_2 dadurch ausgezeichnet, dass zwei bestimmte durch g_1 gehende Ebenen Π_1, Π_2 bez. mit den ihnen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ von g_2 incident sind und dass die Punkte von g_1 in incidente Ebenen von g_2 übergehen, während den Ebenen durch g_1 (ausser Π_1 und Π_2) nicht incidente Punkte von g_2 entsprechen. Es bleiben also die Geraden der beiden ebenen Strahlbüschel $(\mathfrak{P}_1, \Pi_1)$ und $(\mathfrak{P}_2, \Pi_2)$ bei der Correlation fest; der Complex Ω' zweiten Grades zerfällt in zwei lineare Complexe, welche sich durch die Correlation vertauschen, während zwei andere, demselben Complexbüschel angehörige lineare Complexe in sich transformirt werden.[1]) Die durch die Correlation in sich transformirten Flächen 2ten Grades können auf die erste oder zweite Art in sich transformirt werden; wir unterscheiden hiernach Correlationen mit Axen von der ersten oder zweiten Art.

[1]) Vgl. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen. S. 411 unter 11).

Für das Folgende kommen nur vierzählige Correlationen mit Axen und zwar von der ersten und der zweiten Art in Betracht. Wird ein Tetraeder zum Haupttetraeder gewählt, dessen Kanten K_{12} und K_{34} bez. g_1 und g_2 sind, während Π_1, Π_2 die Ebenen E_1, E_2, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Eckpunkte $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_4$ repräsentiren (durch einen auf g_1 gewählten Punkt $\mathfrak{E}_1$ sind dann E_1, $\mathfrak{E}_2$ und E_2 bestimmt und die vier Kanten K_{13}, K_{42}, K_{14}, K_{23} entsprechen sich selbst), so wird die vierzählige Correlation mit Axen der ersten Art durch die Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= -Z_2\\ t\,Z_2' &= Z_1\\ t\,Z_3' &= i\,Z_4\\ t\,Z_4' &= i\,Z_3 \end{aligned}\right\}\ (69\alpha)\qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_1\\ \sigma\,X_2' &= -X_2\\ \sigma\,X_3' &= X_4\\ \sigma\,X_4' &= -X_3\\ \sigma\,X_5' &= -X_6\\ \sigma\,X_6' &= X_5\,. \end{aligned}\right\}\ (69\beta)$$

Das Quadrat dieser Substitution ergiebt eine involutorisch geschaarte Collineation mit den Axen g_1, g_2, die dritte Potenz wiederum eine Correlation:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= -Z_2\\ t\,Z_2' &= Z_1\\ t\,Z_3' &= -i\,Z_4\\ t\,Z_4' &= -i\,Z_3 \end{aligned}\right\}\ (69\alpha')\qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_1\\ \sigma\,X_2' &= -X_2\\ \sigma\,X_3' &= -X_4\\ \sigma\,X_4' &= X_3\\ \sigma\,X_5' &= X_6\\ \sigma\,X_6' &= -X_5\,. \end{aligned}\right\}\ (69\beta')$$

$$\Omega' \equiv (X_1 - X_2)\,(X_1 + X_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69\gamma)$$

Die beiden Complexe: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ (69δ)

werden in sich transformirt; die durch die Correlation in sich transformirten Flächen z. B. $Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4 = 0 \ldots (F_5^{(1)})$ und $Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4 = 0 \ldots (F_8^{(1)})$ gehen auf die erste Art in sich über.

Eine vierzählige Axencorrelation der zweiten Art wird dagegen für dasselbe Haupttetraeder durch die Formeln charakterisirt:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= -Z_2\\ t\,Z_2' &= Z_1\\ t\,Z_3' &= Z_4\\ t\,Z_4' &= Z_3 \end{aligned}\right\}\ (70\alpha)\qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_2\\ \sigma\,X_2' &= X_1\\ \sigma\,X_3' &= -X_4\\ \sigma\,X_4' &= X_3\\ \sigma\,X_5' &= X_6\\ \sigma\,X_6' &= -X_5\,. \end{aligned}\right\}\ (70\beta)$$

Das Quadrat dieser Substitution ergiebt wiederum eine involutorisch geschaarte Collineation mit den Axen g_1, g_2, die dritte Potenz wiederum die Correlation:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= Z_2 \\ t\,Z_2' &= -Z_1 \\ t\,Z_3' &= Z_4 \\ t\,Z_4' &= Z_3 \end{aligned}\right\} \quad (70\alpha') \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_2 \\ \sigma\,X_2' &= X_1 \\ \sigma\,X_3' &= X_4 \\ \sigma\,X_4' &= -X_3 \\ \sigma\,X_5' &= -X_6 \\ \sigma\,X_6' &= X_5 \end{aligned}\right\} \quad (70\beta')$$

$$\Omega' \equiv 2\,X_1\,X_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70\gamma)$$

Die beiden Complexe: $X_1 + X_2 = 0$, $X_1 - X_2 = 0$ (70δ)

werden in sich transformirt; die in sich transformirten Flächen z. B.

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = 0 \ldots (F_1^{(1)}),\quad Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 - Z_4^2 = 0 \ldots (F_2^{(1)})$$

$$Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = 0 \ldots (F_3^{(1)}),\quad Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 + Z_4^2 = 0 \ldots (F_4^{(1)})$$

gehen auf die zweite Art in sich über.

Die Wurzeln ϱ der charakteristischen biquadratischen Gleichung (vgl. 2) am Ende) werden für beide Fälle $\varrho = 1, 1, -1, -1$; die Wurzeln σ werden $\sigma = 1, -1, i, i, -i, -i$.

Die im Folgenden auftretenden derartigen vierzähligen Axencorrelationen sind einmal solche erster und zweiter Art, deren Axenpaare die Geradenpaare e und bei welchen die Haupttetraeder je eins der 15 Fundamentaltetraeder T_i sind, ausserdem noch solche zweiter Art mit je einem Axenpaar g, bei welchen die beiden Punkte $\mathfrak{P}$ und die beiden Ebenen Π zwei verschiedenen Fundamentaltetraedern als Eckpunkte bez. Seitenflächen angehören.

4) Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche.

Ueber diese Correlationen ist bereits in § 8 unter II) das Nöthige gesagt und eine Zusammenstellung der im Folgenden in Betracht kommenden Complexe 2ten Grades, der Singularitätenflächen, der festbleibenden Complexe (unter (41α) bis (41ε)) gegeben worden. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in ϱ (vgl. (41δ)) und (41ε) werden eine Doppelwurzel $\varrho = -\frac{\beta_2}{\beta_1} = -(\nu_2 + \nu_2')$ und eine Doppelwurzel $\varrho = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = -(\nu_2 - \nu_2')$; die Wurzeln der Gleichung in σ (vgl. $(41\varepsilon')$) werden:

$$\sigma = \nu_2 + \nu_2' = \frac{\beta_2}{\beta_1},\quad \nu_2 - \nu_2' = \frac{\beta_1}{\beta_2},\quad 1,\ 1,\ 1,\ -1.$$

a) Für die vierzähligen im Folgenden auftretenden derartigen Correlationen ist:

$$\nu_2 = 0,\quad \nu_2' = -i,\quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = i,\quad \frac{\beta_1}{\beta_2} = -i;$$

die Transformationsformeln werden also (vgl. (41δ) und (41ε')):

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= \frac{1}{j}Z_4 \\ t\,Z_2' &= -\frac{1}{j}Z_3 \\ t\,Z_3' &= -j\,Z_2 \\ t\,Z_4' &= j\,Z_1 \end{aligned}\right\}\ (71\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= X_2 \\ \sigma\,X_2' &= -X_1 \\ \sigma\,X_3' &= X_3 \\ \sigma\,X_4' &= X_4 \\ \sigma\,X_5' &= X_5 \\ \sigma\,X_6' &= -X_6 \end{aligned}\right\}\ (71\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} t'\,Z_1' &= j\,Z_4 \\ t'\,Z_2' &= -j\,Z_3 \\ t'\,Z_3' &= -\frac{1}{j}Z_2 \\ t'\,Z_4' &= \frac{1}{j}Z_1 \end{aligned}\right\}\ (71\alpha') \qquad \Omega' \equiv X_1^2 + X_2^2 + 2\,X_6^2 = 0, \quad .\ .\ .\ (71\gamma)$$

$$\text{also}\ \left.\begin{aligned} \varrho &= i,\ i,\ -i,\ -i \\ \sigma &= i,\ -i,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1 \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (71\delta)$$

Die 2te Potenz der Substitution ergiebt eine involutorisch geschaarte Collineation mit dem Axenpaar K_{12} und K_{34}, die 3te Potenz die zugehörige vierzählige Collineation, für welche in den Formeln (71α) und (71α') j und $\frac{1}{j}$ mit einander zu vertauschen sind und in (71β) die beiden ersten Formeln $\begin{aligned}\sigma\,X_1' &= -X_2 \\ \sigma\,X_2' &= X_1\end{aligned}$ lauten.

Für die drei hier in Betracht kommenden Gruppen von vierzähligen Correlationen sind in § 8 II unter 1) bis 3) die zugehörigen Complexe Ω', die Singularitätenflächen, die festbleibenden Complexe u. s. w. angegeben worden.

b) Bei den sechszähligen derartigen Correlationen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) Erster Fall:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta_2}{\beta_1} &= \nu_2 + \nu_2' = -\alpha,\ \ \nu_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} &= \nu_2 - \nu_2' = -\alpha^2,\ \ \nu_2' = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha) = -\frac{i}{2}\sqrt{3} \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (72\delta)$$

Die Transformationsformeln werden:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= \alpha\,Z_4 \\ t\,Z_2' &= -\alpha\,Z_3 \\ t\,Z_3' &= -\alpha^2 Z_2 \\ t\,Z_4' &= \alpha^2\,Z_1 \end{aligned}\right\}\ (72\beta) \qquad \left.\begin{aligned} t'\,Z_1' &= \alpha^2\,Z_4 \\ t'\,Z_2' &= -\alpha^2\,Z_3 \\ t'\,Z_3' &= -\alpha\,Z_2 \\ t'\,Z_4' &= \alpha\,Z_1 \end{aligned}\right\}\ (72\beta')$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\, X_1' &= \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, X_2 \\
\sigma\, X_2' &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\, X_1 + \frac{1}{2} X_2 \\
\sigma\, X_3' &= X_3 \\
\sigma\, X_4' &= X_4 \\
\sigma\, X_5' &= X_5 \\
\sigma\, X_6' &= -X_6
\end{aligned}\right\} \quad (72\gamma)$$

$$\Omega' \equiv X_1^2 + X_2^2 + 4\, X_6^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72\delta)$$

Die 5te Potenz dieser Substitution ergiebt die zugehörige sechszählige Correlation, für welche in den Formeln (72β) und (72β') α mit α^2 zu vertauschen ist und in den beiden ersten Formeln (72γ) die $\sqrt{3}$ das entgegengesetzte Vorzeichen erhält, die 2te und 4te Potenz repräsentiren dreizählige geschaarte Collineationen (vgl. Formel (58β) für $m = 3$), deren Axenpaar K_{12} und K_{34} ist und endlich die 3te Potenz der Substitution ergiebt eine Polarcorrelation, deren Basis die Singularitätenfläche $X_1^2 + X_2^2 + X_6^2 = 0$ ist. Es kann dies Verhalten sofort aus den Werthen für die Wurzeln σ, welche den Potenzen von S entsprechen, geschlossen werden.

Man hat nämlich:

Wurzeln σ:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
S & \ldots\ldots & -\alpha, & -\alpha^2, & 1, & 1, & 1, & -1 \\
S^2 & \ldots\ldots & \alpha^2, & \alpha, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
S^3 & \ldots\ldots & -1, & -1, & 1, & 1, & 1, & -1 \\
S^4 & \ldots\ldots & \alpha, & \alpha^2, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
S^5 & \ldots\ldots & -\alpha^2, & -\alpha, & 1, & 1, & 1, & -1\,.
\end{array}\right\} \quad (72\varepsilon)$$

Die Complexe Ω', die festbleibenden linearen Complexe u. s. w., welche bei den nachfolgenden, diesem ersten Falle entsprechenden, sechszähligen Collineationen auftreten, sind in § 8 II unter 4) (Formeln (45)) angegeben.

β) Zweiter Fall.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\beta_2}{\beta_1} &= \nu_2 + \nu_2' = \alpha, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} \\
\frac{\beta_1}{\beta_2} &= \nu_2 - \nu_2' = \alpha^2, \quad \nu_2' = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^2) = \frac{i}{2}\sqrt{3}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (73\alpha)$$

Die Transformationsformeln werden:

$$\left.\begin{aligned}
t\, Z_1' &= \alpha\, Z_4 \\
t\, Z_2' &= -\alpha\, Z_3 \\
t\, Z_3' &= \alpha^2\, Z_2 \\
t\, Z_4' &= -\alpha^2\, Z_1
\end{aligned}\right\} \quad (73\beta) \qquad
\left.\begin{aligned}
t'\, Z_1' &= \alpha^2\, Z_4 \\
t'\, Z_2' &= -\alpha^2 Z_3 \\
t'\, Z_3' &= \alpha\, Z_2 \\
t'\, Z_4' &= -\alpha\, Z_1
\end{aligned}\right\} \quad (73\beta')$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= -\tfrac{1}{2}X_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}X_2 \\ \sigma\, X_2' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_1 - \tfrac{1}{2}\,X_2 \\ \sigma\, X_3' &= X_3 \\ \sigma\, X_4' &= X_4 \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= -X_6 \end{aligned}\right\} \quad (73\gamma)$$

$$\Omega' \equiv X_1{}^2 + X_2{}^2 + \frac{4}{3}\,X_6{}^2 = 0 \;\dots\dots\dots\dots \quad (73\delta)$$

Auch hier ergiebt die 5te Potenz dieser Substitution die zugehörige sechszählige Correlation, für welche in (73β) und (73β') α mit α^2 zu vertauschen und in den beiden ersten Formeln (73γ) der $\sqrt{3}$ das entgegengesetzte Zeichen zu ertheilen ist, ebenso liefern S^2 und S^4 dreizählige geschaarte Collineationen (vgl. Formel (58β) für $m = 3$) mit dem Axenpaar K_{12} und K_{34}, dagegen ergiebt die 3te Potenz S^3 eine Nullcorrelation, deren zugehöriger linearer Complex $X_6 = 0$ ist. Man hat nämlich:

Wurzeln σ:

$$\left.\begin{array}{llllllll} S & \dots\dots & \alpha, & \alpha^2, & 1, & 1, & 1, & -1 \\ S^2 & \dots\dots & \alpha^2, & \alpha, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ S^3 & \dots\dots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -1 \\ S^4 & \dots\dots & \alpha, & \alpha^2, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ S^5 & \dots\dots & \alpha^2, & \alpha, & 1, & 1, & 1, & -1. \end{array}\right\} \quad (73\varepsilon)$$

Für die beiden Gruppen der im Folgenden auftretenden, diesem zweiten Falle entsprechenden sechszähligen Correlationen sind in § 8 II unter 5) und 6) die Complexe Ω', die festbleibenden linearen Complexe u. s. w. aufgeführt worden.

II B) Allgemeine Correlationen.

Von allgemeinen Correlationen kommen hier nur die bereits in § 8 unter III (Formeln (48)) charakterisirten $2m$-zähligen in Betracht und zwar für die Werthe $m = 3, 4, 6, 5$. Die Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung werden (vgl. (48δ)):

$$\varrho = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{14}},\ \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{41}},\ \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}},\ \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{32}},$$

während die Wurzeln σ der Gleichung 6ten Grades werden (vgl. (48ε)):

$$\sigma = \nu_1 \pm \nu_1',\ \nu_3 \pm \nu_3',\ \nu_5,\ -\nu_5.$$

1) Sechszählige Correlationen (vgl. § 8 III unter 1) und 2)).

Die Transformationsformeln werden:

$$\left.\begin{aligned} t\,Z_1' &= Z_4 \\ t\,Z_2' &= \alpha\,Z_3 \\ t\,Z_3' &= \alpha^2 Z_2 \\ t\,Z_4' &= Z_1 \end{aligned}\right\} (74\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\,X_1' &= -\tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_2 \\ \sigma\,X_2' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 \\ \sigma\,X_3' &= \tfrac{1}{2}X_3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_4 \\ \sigma\,X_4' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X_3 + \tfrac{1}{2}X_4 \\ \sigma\,X_5' &= X_5 \\ \sigma\,X_6' &= -X_6 \end{aligned}\right\} (74\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} t'\,Z_1' &= Z_4 \\ t'\,Z_2' &= \alpha^2 Z_3 \\ t'\,Z_3' &= \alpha\,Z_2 \\ t'\,Z_4' &= Z_1 \end{aligned}\right\} (74\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 = -1,\ \nu_3 = 1,\ \nu_5 = 2 \\ \nu_1' = \nu_3' = i\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \ \ldots\ (74\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Wurzeln } \varrho = 1,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2; \\ &\text{„} \quad \sigma = 1,\ -1,\ \alpha,\ -\alpha,\ \alpha^2,\ -\alpha^2. \end{aligned}\right\} \ \ldots\ (74\delta)$$

Die 5te Potenz dieser Substitution S ergiebt die zugehörige sechszählige Correlation, für welche in (74α) und (74α') α mit α^2 zu vertauschen und in (74β) der $\sqrt{3}$ das entgegengesetzte Vorzeichen zu ertheilen ist, die 2te und 4te Potenz repräsentiren dreizählige axiale Collineationen (vgl. unter I A 3) dieses §), deren Axenpaar durch K_{14} und K_{23} gebildet wird, die dritte Potenz der Substitution endlich ergiebt eine Polarcorrelation, für welche die Basisfläche die Fläche $Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 = 0$ ist. Diese Beziehungen folgen sofort aus den Werthen für die Wurzeln σ, welche den Potenzen von S entsprechen.

Für die beiden im Folgenden auftretenden Gruppen von je 640 und 1920 derartigen sechszähligen Correlationen sind in § 8 III unter 1) und 2) die Elemente der Haupttetraeder, die Gleichungen des Complexes Ω'', der beiden auf die erste Art festbleibenden Flächen G_1 und G_2, der festbleibenden Gewinde u. s. w. angegeben worden; der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen (vgl. § 8 unter (48ϑ) und (48μ) zerfällt hier wegen $\nu_1' = \nu_3'$ in die beiden speciellen linearen Complexe $\left\{\begin{aligned} X_5 - i\,X_6 = 0 \\ X_5 + i\,X_6 = 0 \end{aligned}\right\}$. Die Gleichungen der beiden Kernflächen sind in (49$\varkappa'$) u. (49$\varkappa''$), die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen ist unter (48ϱ') angegeben.

2) Achtzählige Correlationen.

a) Die beiden festbleibenden Complexe sind $X_5 = 0$, $X_6 = 0$ (vgl. § 8 III unter 3)).

Die Transformationsformeln sind:

$$\left.\begin{array}{l} t\,Z_1' = Z_4 \\ t\,Z_2' = j\,Z_3 \\ t\,Z_3' = \frac{1}{j}\,Z_2 \\ t\,Z_4' = Z_1 \end{array}\right\} (75\alpha) \qquad \left.\begin{array}{l} \sigma X_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2) \\ \sigma X_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X_1+X_2) \\ \sigma X_3' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3-X_4) \\ \sigma X_4' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3+X_4) \\ \sigma\,X_5' = X_5 \\ \sigma\,X_6' = -X_6 \end{array}\right\} (75\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} t'\,Z_1' = Z_4 \\ t'\,Z_2' = \frac{1}{j}\,Z_3 \\ t'\,Z_3' = j\,Z_2 \\ t'\,Z_4' = Z_1 \end{array}\right\} (75\alpha')$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \pm\sqrt{2},\ \nu_3 = \mp\sqrt{2},\ \nu_5 = 2, \\ \nu_1' = \nu_3' = \pm i\sqrt{2}; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (75\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wurzeln } \varrho = 1,\ 1,\ i,\ -i \\ \quad\text{,,}\quad \sigma = 1,\ -1,\ j,\ -j,\ \frac{1}{j},\ -\frac{1}{j} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (75\delta)$$

Die Potenzen S, S^7 und S^3, S^5 der Substitution ergeben die zu je zweien zusammengehörigen achtzähligen Correlationen; in S und S^7 (vergl. Formeln (48ε) in § 8 III) haben ν_1 und ν_3 das obere, $\nu_1' = \nu_3'$ bez. das obere oder untere, in S^3 und S^5 haben ν_1 und ν_3 das untere, $\nu_1' = \nu_3'$ bez. das untere oder obere Vorzeichen. Die Potenzen S^2 und S^6 ergeben zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen (vgl. unter I A 3) dieses §), deren Axenpaar K_{14} u. K_{23} sind und endlich S^4 repräsentirt die geschaarte involutorische Collineation mit demselben Axenpaar (vergl. I A 2)). Aus der folgenden Zusammenstellung der Werthe für α_{14}, α_{23}, α_{32}, α_{41} und der Wurzeln für σ, welche den Potenzen von S entsprechen, sind diese Beziehungen sofort zu entnehmen.

	Werthe für α_{14}	α_{23}	α_{32}	α_{41}	Werthe für die Wurzeln σ:						
S . . .	1	j	$\frac{1}{j}$	1	j,	$\frac{1}{j}$,	$-j$,	$-\frac{1}{j}$,	1,	-1	(75ε)
S^2 . . .	1	i	$-i$	1	i,	$-i$,	i,	$-i$,	1,	1	
S^3 . . .	1	$-\frac{1}{j}$	$-j$	1	$-\frac{1}{j}$,	$-j$,	$\frac{1}{j}$,	j,	1,	-1	
S^4 . . .	1	-1	-1	1	-1,	-1,	-1,	-1,	1,	1	
S^5 . . .	1	$-j$	$-\frac{1}{j}$	1	$-j$,	$-\frac{1}{j}$	j,	$\frac{1}{j}$,	1,	-1	
S^6 . . .	1	$-i$	i	1	$-i$,	i,	$-i$,	i,	1,	1	
S^7 . . .	1	$\frac{1}{j}$	j	1	$\frac{1}{j}$,	j,	$-\frac{1}{j}$	$-j$,	1,	-1.	

Die Gleichungen der Kernflächen sind (vgl. ($48\varkappa_1$) und ($48\varkappa_2$))

für S und S^7: $K_1 \;.\;.\;.\; \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 = 0$; $K_2 \;.\;.\;.\; \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 = 0$. . (75ζ)

für S^3 und S^5: $K_1 \;.\;.\;.\; \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$; $K_2 \;.\;.\;.\; \sqrt{2}\, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$. . ($75\zeta'$)

Die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen 2ten Grades ist unter ($48\varrho'$) angegeben.

b) Die beiden festbleibenden Complexe sind: $X_5 - X_6 = 0$, $X_5 + X_6 = 0$ (vgl. § 8 III unter 4)).

Die Transformationsformeln sind:

$$\left.\begin{aligned} t\, Z_1' &= Z_4 \\ t\, Z_2' &= -\frac{1}{j} Z_3 \\ t\, Z_3' &= j\, Z_2 \\ t\, Z_4' &= Z_1 \end{aligned}\right\} (76\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} t'\, Z_1' &= Z_4 \\ t'\, Z_2' &= -j\, Z_3 \\ t'\, Z_3' &= \frac{1}{j} Z_2 \\ t'\, Z_4' &= Z_1 \end{aligned}\right\} (76\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma X_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \\ \sigma X_2' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-X_1 + X_2) \\ \sigma X_3' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 - X_4) \\ \sigma X_4' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 + X_4) \\ \sigma\, X_5' &= X_6 \\ \sigma\, X_6' &= X_5 \end{aligned}\right\} (76\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu_1 = \pm i\sqrt{2},\ \nu_3 = \mp i\sqrt{2},\ \nu_5 = 0 \\ &\nu_1' = \nu_3' = \mp\sqrt{2},\ \nu_5' = 2 \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (76\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Wurzeln: } \varrho = 1,\ 1,\ i,\ -i \\ &\qquad \sigma = 1,\ -1,\ j,\ -j,\ \frac{1}{j},\ -\frac{1}{j}\,. \end{aligned}\right\} (76\delta)$$

Hinsichtlich der Potenzen dieser Substitution gilt dasselbe wie für die unter a) betrachtete Substitution, wie dies auch aus folgenden Werthen für α_{14}, α_{23}, α_{32}, α_{41}, welche den Potenzen von S entsprechen, zu erkennen ist.

Werthe für:	α_{14}	α_{23}	α_{32}	α_{41}	
S	1	$-\frac{1}{j}$	j	1	
S^2	1	$-i$	i	1	
S^3	1	j	$-\frac{1}{j}$	1	
S^4	1	-1	-1	1	(76ε)
S^5	1	$\frac{1}{j}$	$-j$	1	
S^6	1	i	$-i$	1	
S^7	1	$-j$	$\frac{1}{j}$	1.	

Für die beiden den Fällen a) und b) entsprechenden Gruppen von je 720 derartigen achtzähligen Correlationen sind die Elemente des Haupttetraeders, welches bez. für beide Gruppen dasselbe ist, die Gleichungen der Complexe Ω'', der festbleibenden Flächen G_1, G_2, in § 8 III unter 3) und 4) angegeben worden. Die Gleichungen der beiden Kernflächen für S^1 und S^7, S^3 und S^5 sind unter (52ε') und (52ε''), die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen 2ten Grades ist unter (48ϱ') angegeben. Für beide Fälle zerfällt wegen $\nu_1' = \nu_3'$ der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen in die beiden erwähnten speciellen linearen Complexe.

3) Zwölfzählige Collineationen (vgl. § 8 III unter 5)).

$$\left.\begin{aligned} t\, Z_1' &= \alpha j\, Z_4 \\ t\, Z_2' &= \alpha^2 j\, Z_3 \\ t\, Z_3' &= -\alpha \frac{1}{j} Z_2 \\ t\, Z_4' &= -\alpha^2 \frac{1}{j} Z_1 \end{aligned}\right\} \quad (77\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= -X_2 \\ \sigma\, X_2' &= X_1 \\ \sigma\, X_3' &= \frac{1}{2} X_3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, X_4 \\ \sigma\, X_4' &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\, X_3 + \frac{1}{2} X_4 \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= -X_6 \end{aligned}\right\} \quad (77\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} t'\, Z_1' &= \alpha^2 \frac{1}{j} Z_4 \\ t'\, Z_2' &= \alpha \frac{1}{j} Z_3 \\ t'\, Z_3' &= -\alpha^2 j\, Z_2 \\ t'\, Z_4' &= -\alpha j\, Z_1 \end{aligned}\right\} \quad (77\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu_1 = 0,\ \nu_3 = -1,\ \nu_5 = -2 \\ &\nu_1' = 2i,\ \nu_3' = -i\sqrt{3},\ \nu_5' = 0 \end{aligned}\right\} (77\gamma) \qquad \text{Wurzeln} \left.\begin{aligned} &\varrho = \alpha i,\ -\alpha i,\ \alpha^2 i,\ -\alpha^2 i \\ &\sigma = 1,\ -1,\ i,\ -i,\ \alpha,\ \alpha^2. \end{aligned}\right\} (77\delta)$$

Den Potenzen der Substitution S entsprechen folgende Werthe für die Coefficienten α_{ik} und die Wurzeln σ:

	Werthe für α_{14}	α_{23}	α_{32}	α_{41}:	Werthe für die Wurzeln σ:						
S . . .	αj,	$\alpha^2 j$,	$-\alpha\frac{1}{j}$,	$-\alpha^2\frac{1}{j}$	. . . i,	$-i$,	α,	α^2,	1,	-1	(77ε)
S^2 . . .	$\alpha^2 i$,	αi,	$-\alpha^2 i$,	$-\alpha i$	. . . -1,	-1,	α^2,	α,	1,	1	
S^3 . . .	$-\frac{1}{j}$,	$-\frac{1}{j}$,	j,	j	. . . $-i$,	i,	1,	1,	1,	-1	
S^4 . . .	$-\alpha$,	$-\alpha^2$,	$-\alpha$,	$-\alpha^2$	. . . 1,	1,	α,	α^2,	1,	1	
S^5 . . .	$-\alpha^2 j$,	$-\alpha j$,	$\alpha^2\frac{1}{j}$,	$\alpha\frac{1}{j}$	. . . i,	$-i$,	α^2,	α,	1,	-1	
S^6 . . .	$-i$,	$-i$,	i,	i	. . . -1,	-1,	1,	1,	1,	1	
S^7 . . .	$\alpha\frac{1}{j}$	$\alpha^2\frac{1}{j}$,	$-\alpha j$,	$-\alpha^2 j$	. . . $-i$,	i,	α,	α^2,	1,	-1	
S^8 . . .	α^2,	α,	α^2,	α	. . . 1,	1,	α^2,	α,	1,	1	
S^9 . . .	j,	j,	$-\frac{1}{j}$,	$-\frac{1}{j}$	. . . i,	$-i$,	1,	1,	1,	-1	
S^{10} . . .	αi,	$\alpha^2 i$,	$-\alpha i$,	$-\alpha^2 i$	. . . -1,	-1,	α,	α^2,	1,	1	
S^{11} . . .	$-\alpha^2\frac{1}{j}$,	$-\alpha\frac{1}{j}$,	$\alpha^2 j$,	αj	. . . $-i$,	i,	α^2,	α,	1,	-1 .	

Aus dieser Zusammenstellung ist zu entnehmen, dass die Potenzen S, S^5, S^7, S^{11} die vier zusammengehörigen 12zähligen Correlationen, S^2 und S^{10} zwei zusammengehörige sechszählige Collineationen (vgl. unter I B) 3) *a*) dieses § und § 8 I) unter 8)), deren Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die zwölfzähligen Correlationen, S^3 und S^9 zwei zusammengehörige vierzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche (vergleiche unter II A) 4) *a*) dieses §), S^4 und S^8 zwei zusammengehörige dreizählige geschaarte Collineationen mit einem Axenpaar k (vgl. unter I A) 4) dieses §) darstellen, während S^6 eine involutorisch geschaarte Collineation mit dem Axenpaar $\left\{\begin{matrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$ repräsentirt.

Für die im Folgenden auftretenden 960 derartigen zwölfzähligen Correlationen sind in § 8 III unter 5) Formeln (53) die Gleichungen des Complexes Ω'', der festbleibenden Flächen G_1, G_2, der festbleibenden Complexe und des tetraedralen Complexes der Wechselstrahlen, sowie die Elemente des Haupttetraeders angegeben; ebenso auch die Gleichungen der beiden Kernflächen K_1 und K_2.

4) Zehnzählige Correlationen (vgl. § 8 III unter 6)).

$$\left.\begin{aligned} t\, Z_1' &= e^{-\frac{\pi i}{10}} Z_4 \\ t\, Z_2' &= e^{-\frac{3\pi i}{10}} Z_3 \\ t\, Z_3' &= e^{\frac{3\pi i}{10}} Z_2 \\ t\, Z_4' &= e^{\frac{\pi i}{10}} Z_1 \end{aligned}\right\} \quad (78\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma\, X_1' &= \cos\frac{2\pi}{5}\,.\,X_1 + \sin\frac{2\pi}{5}\,.\,X_2 \\ \sigma\, X_2' &= -\sin\frac{2\pi}{5}\,.\,X_1 + \cos\frac{2\pi}{5}\,.\,X_2 \\ \sigma\, X_3' &= \cos\frac{4\pi}{5}\,.\,X_3 + \sin\frac{4\pi}{5}\,.\,X_4 \\ \sigma\, X_4' &= -\sin\frac{4\pi}{5}\,.\,X_3 + \cos\frac{4\pi}{5}\,.\,X_4 \\ \sigma\, X_5' &= X_5 \\ \sigma\, X_6' &= -X_6, \end{aligned}\right\} \quad (78\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} t'\, Z_1' &= e^{\frac{\pi i}{10}} Z_4 \\ t'\, Z_2' &= e^{\frac{3\pi i}{10}} Z_3 \\ t'\, Z_3' &= e^{-\frac{3\pi i}{10}} Z_2 \\ t'\, Z_4' &= e^{-\frac{\pi i}{10}} Z_1 \end{aligned}\right\} \quad (78\alpha')$$

$$\text{wobei } \cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,\ \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (78\beta')$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 2\cos\frac{2\pi}{5} = \operatorname{tg}\varphi,\ \nu_3 = -2\cos\frac{\pi}{5} = -\operatorname{cotg}\varphi,\ \nu_5 = 2, \\ \nu_1' &= -2\,i\sin\frac{2\pi}{5} = -\frac{i}{\sin\varphi},\ \nu_3' = -2\,i\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{i}{\cos\varphi},\ \nu_5' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (78\gamma)$$

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

$$\left.\begin{aligned} &\text{Wurzeln } \varrho = e^{\frac{\pi i}{5}},\ e^{-\frac{\pi i}{5}},\ e^{\frac{3\pi i}{5}},\ e^{-\frac{3\pi i}{5}} \\ &\quad\text{„}\quad \sigma = 1,\ -1,\ e^{\frac{\pi i}{5}},\ e^{-\frac{\pi i}{5}},\ e^{\frac{3\pi i}{5}},\ e^{-\frac{3\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \quad (78\delta)$$

Den Potenzen der Substitution S entsprechen folgende Werthe der Coefficienten α_{ik} und der Wurzeln σ:

$$\begin{array}{lllll|l} & \text{Werthe für } \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{32} & \alpha_{41}: & \text{Werthe für die Wurzeln } \sigma: \\ S & \ldots e^{-\frac{\pi i}{10}}, & e^{-\frac{3\pi i}{10}}, & e^{\frac{3\pi i}{10}}, & e^{\frac{\pi i}{10}} & \ldots e^{\frac{3\pi i}{5}},\ e^{-\frac{3\pi i}{5}},\ e^{\frac{\pi i}{5}},\ e^{-\frac{\pi i}{5}},\ -1,\ 1 \\ S^2 & \ldots e^{-\frac{\pi i}{5}}, & e^{-\frac{3\pi i}{5}}, & e^{\frac{3\pi i}{5}}, & e^{\frac{\pi i}{5}} & \ldots e^{-\frac{4\pi i}{5}},\ e^{\frac{4\pi i}{5}},\ e^{\frac{2\pi i}{5}},\ e^{-\frac{2\pi i}{5}},\ 1,\ 1 \\ S^3 & \ldots e^{-\frac{3\pi i}{10}}, & e^{-\frac{9\pi i}{10}}, & e^{\frac{9\pi i}{10}}, & e^{\frac{3\pi i}{10}} & \ldots e^{-\frac{\pi i}{5}},\ e^{\frac{\pi i}{5}},\ e^{\frac{3\pi i}{5}},\ e^{-\frac{3\pi i}{5}},\ -1,\ 1 \\ S^4 & \ldots e^{-\frac{2\pi i}{5}}, & e^{\frac{4\pi i}{5}}, & e^{-\frac{4\pi i}{5}}, & e^{\frac{2\pi i}{5}} & \ldots e^{\frac{2\pi i}{5}},\ e^{-\frac{2\pi i}{5}},\ e^{\frac{4\pi i}{5}},\ e^{-\frac{4\pi i}{5}},\ 1,\ 1 \\ S^5 & \ldots\ -i, & i, & -i, & i & \ldots -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1 \\ S^6 & \ldots e^{-\frac{3\pi i}{5}}, & e^{\frac{\pi i}{5}}, & e^{-\frac{\pi i}{5}}, & e^{\frac{3\pi i}{5}} & \ldots e^{-\frac{2\pi i}{5}},\ e^{\frac{2\pi i}{5}},\ e^{-\frac{4\pi i}{5}},\ e^{\frac{4\pi i}{5}},\ 1,\ 1 \\ S^7 & \ldots e^{-\frac{7\pi i}{10}}, & e^{-\frac{\pi i}{10}}, & e^{\frac{\pi i}{10}}, & e^{\frac{7\pi i}{10}} & \ldots e^{\frac{\pi i}{5}},\ e^{-\frac{\pi i}{5}},\ e^{-\frac{3\pi i}{5}},\ e^{\frac{3\pi i}{5}},\ -1,\ 1 \\ S^8 & \ldots e^{-\frac{4\pi i}{5}}, & e^{-\frac{2\pi i}{5}}, & e^{\frac{2\pi i}{5}}, & e^{\frac{4\pi i}{5}} & \ldots e^{\frac{4\pi i}{5}},\ e^{-\frac{4\pi i}{5}},\ e^{-\frac{2\pi i}{5}},\ e^{\frac{2\pi i}{5}},\ 1\ 1 \\ S^9 & \ldots e^{-\frac{9\pi i}{10}}, & e^{-\frac{7\pi i}{10}}, & e^{\frac{7\pi i}{10}}, & e^{\frac{9\pi i}{10}} & \ldots e^{-\frac{3\pi i}{5}},\ e^{\frac{3\pi i}{5}},\ e^{-\frac{\pi i}{5}},\ e^{\frac{\pi i}{5}},\ -1,\ 1. \end{array} \quad (78\varepsilon)$$

Diese Zusammenstellung lässt erkennen, dass die Potenzen S, S^9; S^3, S^7 die zu je zweien zusammengehörigen zehnzähligen Correlationen, die Potenzen S^2, S^8; S^4, S^6 die zu je zweien zusammengehörigen fünfzähligen Collineationen (vgl. unter I B) 5) dieses §), deren Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die zehnzähligen Correlationen, darstellen, während S^5 eine Nullcorrelation mit dem linearen Complexe $X_6 = 0$ repräsentirt.

Für die 2304 hier auftretenden derartigen zehnzähligen Correlationen sind in § 8 III unter 6) die Gleichungen der beiden Complexe Ω_1'', Ω_2'', der festbleibenden Complexe und Flächen, der beiden tetraedralen Complexe der Wechselstrahlen, sowie die Elemente des Haupttetraeders (vgl. § 8 I 12) unter ($40\beta'$), ($40\beta''$), (40γ)) angegeben worden; ebenso auch die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen K_1', K_2' und K_1'', K_2''; nämlich für S und S^9 unter ($54\vartheta'$), für S^3 und S^7 unter ($54\vartheta''$).

§ 10.

Uebersicht der linearen Transformationen der Cf. (60_{15}, 30_6).

Mit Benutzung der in den vorhergehenden Paragraphen gewonnenen und zusammengestellten Resultate werden wir nunmehr ohne Schwierigkeit unsere eigentliche Aufgabe, die sämmtlichen linearen Transformationen der Cf. (60_{15}, 30_6) aufzustellen und nach ihrer geometrischen Bedeutung zu interpretiren, zu lösen im Stande sein.

Wenn man unter Zugrundelegung des Fundamentaltetraeders T_1 mit den 6 Liniencoordinaten $x_1, x_2 \dots x_6$ sämmtliche Permutationen:

$$x_i' = x_k \quad (i, k = 1, 2, \dots 6)$$

unter gleichzeitiger Anwendung der $2^5 = 32$ Vorzeichencombinationen:

$$x_i' = \pm x_k \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (79\alpha)$$

vornimmt[1]), so ergeben sich im Ganzen $6!\,2^5 = 23040$ Substitutionen. Dabei bedeutet jede aus einer geraden Anzahl dieser beiden Elementaroperationen zusammengesetzte Aenderung der x_i eine Collineation, jede aus einer ungeraden Anzahl zusammengesetzte eine Correlation, sodass also 11520 Collineationen und ebenso viele Correlationen resultiren.

Diese Transformationen lassen sich in den auf dasselbe Fundamentaltetraeder T_1 bezogenen tetraedrischen Coordinaten z_l oder ζ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) ausdrücken, indem man zunächst die Plücker'schen Liniencoordinaten p'_{ik} durch p_{ik} darstellt und aus diesen Relationen die Transformationsformeln in Punkt- oder Ebenen-Coordinaten erhält; die hierzu nöthigen Rechnungen vereinfachen sich wesentlich zufolge der besonderen Form der Substitutionen (79α). Die Collineationen, bez. Correlationen werden alsdann durch folgende Formeln ausgedrückt ($l = 1, 2, 3, 4$):

$$\tau z'_l = a_{l,1} z_1 + a_{l,2} z_2 + a_{l,3} z_3 + a_{l,4} z_4; \quad \tau' \zeta'_l = A_{l,1} \zeta_1 + A_{l,2} \zeta_2 + A_{l,3} \zeta_3 + A_{l,4} \zeta_4 \quad \dots \quad (79\beta)$$

$$t \zeta'_l = a_{l,1} z_1 + a_{l,2} z_2 + a_{l,3} z_3 + a_{l,4} z_4; \quad t' z'_l = A_{l,1} \zeta_1 + A_{l,2} \zeta_2 + A_{l,3} \zeta_3 + A_{l,4} \zeta_4, \quad \dots \quad (79\beta')$$

worin die Coefficienten $a_{l,1}, a_{l,2}, a_{l,3}, a_{l,4}$ und $A_{l,1}, A_{l,2}, A_{l,3}, A_{l,4}$ die Coordinaten der Ecken bezw. Flächen je eines der 15 Fundamentaltetraeder bedeuten. Bei reellen Werthen der Coordinaten ist $A_{lm} = a_{lm}$, bei imaginären $A_{l,m} = a'_{l,m}$, wo $a'_{l,m}$ der conjugirt complexe Werth zu $a_{l,m}$ ist. Die sämmt-

[1]) Vgl. W. Reichardt: Math. Ann. Bd. 28 S. 84—98 und H. Maschke: Math. Ann. Bd. 30 S. 496 ff.

lichen 24 Permutationen der Coordinaten für die Ecken (Flächen) jedes der 15 Fundamentaltetraeder nebst den 8 Vorzeichencombinationen ergeben $15 . 192 = 2880$ Substitutionen; ferner treten die Substitutionen auf, bei welchen die Coordinatenwerthe je zweier Ecken (Flächen) jedes Fundamentaltetraeders und zwar

der ersten und zweiten (oder der dritten und vierten) Ecke (Fläche),
der ersten und dritten (oder der zweiten und vierten) „ „ ,
der ersten und vierten (oder der zweiten und dritten) „ „

mit dem Factor i multiplicirt sind, so dass aus den mit den Vorzeichencombinationen versehenen Permutationen dieser Werthe weitere $3 . 2880 = 8640$ Substitutionen resultiren, im Ganzen also $4 . 2880 = 11520$ Collineationen und ebensoviele Correlationen erhalten werden.[1])

Wir wollen diese Substitutionen durch folgende abgekürzte Bezeichnung darstellen; die Collineationen, den beiden Formen in (79β) entsprechend durch:

$$\left.\begin{array}{ll} [l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4]_p & ; \ [\overline{\underline{l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4}}]_p \\ [l_1, \pm l_2, \pm i l_3, \pm i l_4]_p & ; \ [\overline{\underline{l_1, \pm l_2, \pm i l_3, \pm i l_4}}]_p \\ [l_1, \pm i l_2, \pm l_3, \pm i l_4]_p & ; \ [\overline{\underline{l_1, \pm i l_2, \pm l_3, \pm i l_4}}]_p \\ [l_1, \pm i l_2, \pm i l_3, \pm l_4]_p & ; \ [\overline{\underline{l_1, \pm i l_2, \pm i l_3, \pm l_4}}]_p, \end{array}\right\} \quad (79\gamma)$$

die Correlationen, den beiden Formen in (79β') entsprechend durch:

$$\left.\begin{array}{ll} [\overline{l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4}]_p & ; \ [\underline{l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4}]_p \\ [\overline{l_1, \pm l_2, \pm i l_3, \pm i l_4}]_p & ; \ [\underline{l_1, \pm l_2, \pm i l_3, \pm i l_4}]_p \\ [\overline{l_1, \pm i l_2, \pm l_3, \pm i l_4}]_p & ; \ [\underline{l_1, \pm i l_2, \pm l_3, \pm i l_4}]_p \\ [\overline{l_1, \pm i l_2, \pm i l_3, \pm l_4}]_p & ; \ [\underline{l_1, \pm i l_2, \pm i l_3, \pm l_4}]_p. \end{array}\right\} \quad (79\gamma')$$

Hierin bedeuten $l_1, l_2, l_3, l_4 = 1, 2, 3, 4$ die in irgend einer Reihenfolge genommenen tetraedrischen Coordinaten der 4 Ecken (Flächen) $a_{l_1 1}$, $a_{l_2 2}$, $a_{l_3 3}$, $a_{l_4 4}$ ($A_{l_1 1}$, $A_{l_2 2}$, $A_{l_3 3}$, $A_{l_4 4}$) des Fundamentaltetraeders T_p ($p = 1, 2 \ldots 15$). Die Coordinaten der Ecken $\mathfrak{e}_i$ (der Flächen ε_i) der 15 Tetraeder T_p sind am Schlusse dieses § in der Tabelle (79ε) nach einer für die folgenden An-

[1]) Maschke giebt l. c. die 4fache Zahl, nämlich 64 . 720 Substitutionen an, welche Collineationen und ebensoviele, welche Correlationen bedeuten, indem er die sämmtlichen tetraedrischen Coordinatenwerthe noch mit —1, i, —i multiplicirt; doch kommen für die geometrische Deutung nur die bestimmten Verhältnisse der Coordinaten in Betracht. Vergl. die Bemerkungen bei H. Burckhardt: Math. Ann. Bd. 38 S. 183 erste Anmerkung und bei E. Study: Berichte der k. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. v. 9. Mai 1892. S. 123 Anm.

wendungen geeigneten Wahl der Aufeinanderfolge und des Proportionalitätsfactors zusammengestellt.

Die geometrische Bedeutung der Transformationen wird sowohl durch die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichungen 6ten Grades in σ, als auch der Wurzeln der biquadratischen Gleichungen für die Collineationen in τ, für die Correlationen in ϱ bedingt und durch die Zurückführung der Transformationen auf die canonische Form (bei Zugrundelegung des Haupttetraeders) nach den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Regeln näher bestimmt.

Die $16 \,.\, 720 = 11520$ Substitutionen, welche aus einer geraden Anzahl der beiden erwähnten Elementaroperationen der x_i entstehen und denen je eine Collineation entspricht, zerfallen in zwei Klassen von je $8 \,.\, 720 = 5760$ Substitutionen, von welchen die erste je eine positive Permutation der x_i mit gerader, die zweite je eine negative Permutation mit ungerader Anzahl negativer Vorzeichen enthält. Ebenso zerfallen die 11520 Substitutionen, welche durch eine ungerade Anzahl der beiden Elementaroperationen entstehen und denen je eine Correlation entspricht, in zwei Klassen von je 5760 Substitutionen, von welchen die erste je eine positive Permutation mit ungerader, die zweite je eine negative Permutation mit gerader Anzahl negativer Vorzeichen enthält.

Die beiden Klassen der Permutationen sind in übersichtlicher Anordnung folgende (wobei $(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k})$ eine cyclische Permutation der k^{ten} Ordnung bedeutet):

A) Positive Permutationen:

1)	1 Permutation		(x_{i_1})
2)	$\binom{6}{3} \,.\, 2! = 40$	Permutationen	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$
3)	$\binom{6}{2}\binom{4}{2} \,.\, \frac{1}{2} = 45$	„	$(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})$
4)	$\binom{6}{3}\frac{2!\;2!}{2} = 40$	„	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$
5)	$\binom{6}{2} \,.\, 3! = 90$	„	$(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$
6)	$\binom{6}{5} \,.\, 4! = 144$	„	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$

Zusammen: 360 Permutationen.

B) Negative Permutationen:

1)	$\binom{6}{2} = 15$	Permutationen	$(x_{i_1} x_{i_2})$
2)	$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} \,.\, \frac{1}{3!} = 15$	„	$(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})(x_{i_5} x_{i_6})$
3)	$\binom{6}{4} \,.\, 3! = 90$	„	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$
4)	$\binom{6}{3}\binom{3}{2} \,.\, 2! = 120$	„	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5})$
5)	$\binom{6}{6} \,.\, 5! = 120$	„	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$

Zusammen: 360 Permutationen.

(79δ)

Für jede dieser Permutationsgruppen sollen nunmehr in den folgenden Paragraphen die zugehörigen linearen Transformationen, welche durch Hinzufügen der Vorzeichencombinationen resultiren, nach ihrer geometrischen Bedeutung festgestellt werden. Es werden sich hierbei sämmtliche in § 9 betrachteten Fälle von Collineationen und Correlationen darbieten. Die gleichzeitige Darstellung dieser Substitutionen in tetraedrischen Punkt- und Ebenen-Coordinaten ist besonders für die Bestimmung der Elemente des Haupttetraeders, der festbleibenden Flächen 2ten Gr. u. s. w., dann aber auch deswegen von Wichtigkeit, weil hier die Unterscheidung der Substitutionen in reelle und imaginäre, welche bei Anwendung der x_i-Coordinaten wegfällt, deutlich hervortritt. Die Art und Weise, in welcher sich die sämmtlichen Substitutionen auf die 15 Fundamentaltetraeder verteilen, wird aus der später § 22 unter C) aufzustellenden Tabelle ersichtlich.

Hier folgt zunächst die Tabelle für die Coordinaten der Ecken und Flächen der 15 Fundamentaltetraeder T_p, wobei die Ecken durch **1**, **2**, **3**, **4**, die Flächen durch $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ bezeichnet sind. Die Coordinaten der Ecken und Flächen sind mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung mit solchen Factoren multiplicirt, dass für $T_1 \ldots T_6$ die Summe der Quadrate gleich eins wird.

Bei der mit Rücksicht auf spätere Anwendungen gewählten Anordnung der Ecken und der Vorzeichen für die Coordinaten derselben ist die Determinante für die 3 Tetraeder $T_1 \ldots T_3$ gleich $+1$, für die 3 Tetraeder $T_4 \ldots T_6$ gleich -1.

$$T_1 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 1\ 0\ 0\ 0 \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots 0\ 1\ 0\ 0 \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots 0\ 0\ 1\ 0 \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots 0\ 0\ 0\ 1 \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_2 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_3 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_4 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots 0\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0 \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0 \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_5 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_6 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{1} \\ 2 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{2} \\ 3 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \bar{3} \\ 4 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{4} \end{array}\right\}$$

$$T_7 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{2} \\ 2 \ldots 0\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{1} \\ 3 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{i}{\sqrt{2}}\ 0\ 0 \ldots \bar{4} \\ 4 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\ 0\ 0 \ldots \bar{3} \end{array}\right\}$$

$$T_8 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{3} \\ 2 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{4} \\ 3 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{1} \\ 4 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{i}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{2} \end{array}\right\}$$

$$T_9 \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{4} \\ 2 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0\ \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{3} \\ 3 \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \bar{2} \\ 4 \ldots 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{i}{\sqrt{2}}\ 0 \ldots \bar{1} \end{array}\right\} \qquad (79\varepsilon)$$

$$T_{10} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{2} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{1} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{4} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{3} \end{array}\right\}$$

$$T_{11} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{3} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{4} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{1} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{2} \end{array}\right\}$$

$$T_{12} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{4} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{i}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{3} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{2} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{1} \end{array}\right\}$$

$$T_{13} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{2} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{1} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{4} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{3} \end{array}\right\}$$

$$T_{14} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{3} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{4} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2} \ldots \bar{1} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{i}{2} \ldots \bar{2} \end{array}\right\}$$

$$T_{15} \,.. \left\{\begin{array}{l} 1 \ldots -\frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{4} \\ 2 \ldots \frac{1}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{3} \\ 3 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{i}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \bar{2} \\ 4 \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{i}{2}\ -\frac{i}{2}\ \frac{1}{2} \ldots \bar{1} \end{array}\right\}$$

I. Substitutionen, welche den positiven Permutationen der x_i entsprechen.

§ 11.

Collineationen und Correlationen, welche der Grundpermutation (x_{i_1}) entsprechen.

A) Collineationen, entsprechend den positiven Vorzeichencombinationen.

1) Die der Grundpermutation mit durchweg gleichen (positiven) Vorzeichen entsprechende Substitution:

$$x'_k = x_k \quad (k = 1, 2 \ldots 6) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (80\alpha)$$

$$\text{oder } z'_l = z_l, \text{ oder } \zeta'_l = \zeta_l \quad (l = 1, 2, 3, 4) \ldots \ldots \ldots \quad (80\beta)$$

bedeutet geometrisch die identische Transformation, bei welcher alle Elemente des Raumes festbleiben. Die 6 Wurzeln σ, sowie die 4 Wurzeln τ werden sämmtlich $= 1$.

2) Die 15 den mit einer geraden Anzahl negativer Vorzeichen versehenen Grundpermutation entsprechenden Substitutionen können als mit je zwei negativen Elementen x_i, x_k behaftet angenommen werden. Dieselben bedeuten sämmtlich geschaart-involutorische Collineationen, deren Axenpaar je ein Geradenpaar $e = (i, k)$ ist (vgl. § 9 I A 2)), welche sich einfach durch die beiden negativen Elemente x_i, x_k bestimmt. Der vierfachen Wurzel $\sigma = 1$ entsprechen alle Geraden der linearen Congruenz $\left.\begin{matrix} x_i = 0 \\ x_k = 0 \end{matrix}\right\}$, der Doppelwurzel $\sigma = -1$ die beiden Axen derselben, welche den übrigen 4 Fundamentalcomplexen gemeinschaftlich sind.

Bei diesen 15 Transformationen, bei welchen je eins der 9 reellen und 6 imaginären Axenpaare e, sowie alle diese schneidenden Geraden (also weitere 6 Geradenpaare e) festbleiben, geht jeder der 6 Fundamentalcomplexe und jede der 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ in sich über; von den 15 Fundamentaltetraedern bleiben drei, welche das betreffende Axenpaar als

gemeinschaftliches Kantenpaar haben, fest, während die übrigen 12 Tetraeder in sich selbst übergehen.

Bei Anwendung tetraedrischer Coordinaten werden diese 15 Substitutionen (nebst der Identität) durch die vier positiven Permutationen 1 2 3 4, 2 1 4 3, 3 4 1 2, 4 3 2 1 der Ecken (Flächen) des Fundamentaltetraeders T_1 und zwar mit gerader Anzahl negativer Vorzeichen dargestellt; die Wurzeln der biquadratischen Gleichung in τ sind die Doppelwurzeln $+1$, -1 für die 9 hyperbolischen, den reellen, und $+i$, $-i$ für die 6 elliptischen, den imaginären Axenpaaren e zugehörigen, geschaarten Involutionen (vgl. § 9 (56α'). In der folgenden Tabelle sind diese den 9 hyperbolischen und den 6 elliptischen Involutionen entsprechenden Substitutionen unter Anwendung der oben eingeführten abkürzenden Bezeichnung (79γ) zusammengestellt.

$$\left.\begin{array}{ll}
(12)\ldots[-x_1\,-x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6]\ldots[1\ 2-3-4]_1 & (36)\ldots[x_1\,x_2\,-x_3\,x_4\,x_5\,-x_6]\ldots[2\ 1-4-3]_1 \\
(34)\ldots[x_1\,x_2\,-x_3\,-x_4\,x_5\,x_6]\ldots[1-2\ 3-4]_1 & (25)\ldots[x_1\,-x_2\,x_3\,x_4\,-x_5\,x_6]\ldots[3-4\ 1-2]_1 \\
(56)\ldots[x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,-x_5\,-x_6]\ldots[1-2-3\ 4]_1 & (14)\ldots[-x_1\,x_2\,x_3\,-x_4\,x_5\,x_6]\ldots[4-3-2\ 1]_1 \\
\multicolumn{2}{c}{(45)\ldots[x_1\,x_2\,x_3\,-x_4\,-x_5\,x_6]\ldots[2\ 1\ 4\ 3]_1} \\
\multicolumn{2}{c}{(16)\ldots[-x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,-x_6]\ldots[3\ 4\ 1\ 2]_1} \\
\multicolumn{2}{c}{(23)\ldots[x_1\,-x_2\,-x_3\,x_4\,x_5\,x_6]\ldots[4\ 3\ 2\ 1]_1}
\end{array}\right\}(80\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(35)\ldots[x_1\,x_2\,-x_3\,x_4\,-x_5\,x_6]\ldots[2-1\ 4-3]_1 & (46)\ldots[x_1\,x_2\,x_3\,-x_4\,x_5\,-x_6]\ldots[2-1-4\ 3]_1 \\
(51)\ldots[-x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,-x_5\,x_6]\ldots[3-4-1\ 2]_1 & (62)\ldots[x_1\,-x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,-x_6]\ldots[3\ 4-1-2]_1 \\
(13)\ldots[-x_1\,x_2\,-x_3\,x_4\,x_5\,x_6]\ldots[4\ 3-2-1]_1 & (24)\ldots[x_1\,-x_2\,x_3\,-x_4\,x_5\,x_6]\ldots[4-3\ 2-1]_1
\end{array}\right\}(80\delta)$$

3) Die 16 Transformationen 1) und 2) bilden eine Gruppe G_{16}, welche z. B. durch die beiden Vierergruppen (00), (35), (51), (13) und (00), (46), (62), (24) erzeugt werden kann,[1]) wo (00) die Identität bedeutet.

B) Correlationen, entsprechend den negativen Vorzeichencombinationen.

1) Die 6 Substitutionen, welche der mit je einem negativen Elemente x_i versehenen Grund-Permutation entsprechen, bedeuten Nullcorrelationen, deren zugehörige Complexe die 6 Fundamentalcomplexe $C_{(1)}$ sind (vgl. § 9 II A 2)). Die entsprechenden Formeln in Tetraedercoordinaten ergeben sich in leicht erkennbarer Zuordnung aus den Formeln (80δ), wenn statt der Ecken (Flächen) die Flächen (Ecken) von T_1 eingeführt werden, nach der Bezeichnung (79γ') also über oder unter die Ziffern ein Horizontalstrich gesetzt wird.

[1]) Vgl. E. Study: Sitzungsber. d. sächs. Gesellsch. d. W. Mai 1892. S. 133 ff.

So ist z. B.

$$\left.\begin{array}{l} (1) \ldots [-x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] \ldots \overline{[2-1\ 4-3]}_1 \ldots \underline{[2-1\ 4-3]}_1 \\ (2) \ldots [x_1\, -x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] \ldots \overline{[2-1-4\ 3]}_1 \ldots \underline{[2-1-4\ 3]}_1 \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} (80\varepsilon)$$

2) Die 10 Substitutionen, welche der mit je drei negativen Elementen x_i behafteten Grundpermutation entsprechen, bedeuten Polarcorrelationen, deren Basisflächen die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ sind. (Vgl. § 9 II A 1)). Die entsprechenden Darstellungen in Tetraedercoordinaten sind aus folgender Zusammenstellung (vgl. (17ε) in § 7) ersichtlich.

$$\left.\begin{array}{l|l} F^{(1)}_1 \ldots [x_1\, -x_2\, x_3\, -x_4\, x_5\, -x_6] \ldots \overline{[1\ 2\ 3\ 4]}_1 & F^{(1)}_5 \ldots [x_1\, -x_2\, -x_3\, -x_4\, x_5\, x_6] \ldots \overline{[2\ 1\ -4\ -3]}_1 \\ F^{(1)}_2 \ldots [x_1\, -x_2\, -x_3\, x_4\, -x_5\, x_6] \ldots \overline{[1\ 2\ -3\ -4]}_1 & F^{(1)}_6 \ldots [x_1\, x_2\, x_3\, -x_4\, -x_5\, -x_6] \ldots \overline{[3\ -4\ 1\ -2]}_1 \\ F^{(1)}_3 \ldots [x_1\, -x_2\, -x_3\, x_4\, x_5\, -x_6] \ldots \overline{[1\ -2\ 3\ -4]}_1 & F^{(1)}_7 \ldots [x_1\, x_2\, -x_3\, -x_4\, -x_5\, x_6] \ldots \overline{[4\ -3\ -2\ 1]}_1 \\ F^{(1)}_4 \ldots [x_1\, -x_2\, x_3\, -x_4\, -x_5\, x_6] \ldots \overline{[1\ -2\ -3\ 4]}_1 & F^{(1)}_8 \ldots [x_1\, -x_2\, x_3\, x_4\, -x_5\, -x_6] \ldots \overline{[2\ 1\ 4\ 3]}_1 \\ & F^{(1)}_9 \ldots [x_1\, x_2\, -x_3\, x_4\, -x_5\, -x_6] \ldots \overline{[3\ 4\ 1\ 2]}_1 \\ & F^{(1)}_{10} \ldots [x_1\, x_2\, -x_3\, -x_4\, x_5\, -x_6] \ldots \overline{[4\ 3\ 2\ 1]}_1. \end{array}\right\} (80\zeta)$$

Die sämmtlichen 32 Transformationen A) B) bilden eine Gruppe G'_{32}, in welcher die Gruppe G_{16} als „invariante" Untergruppe enthalten ist.

§ 12.
Collineationen und Correlationen, welche aus den 40 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})$ resultiren.

A) Collineationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

Von diesen Substitutionen gehören je zwei als S und S^2 zusammen,

$$\text{z. B. } \left.\begin{array}{l} S = (x_1\, x_3\, x_5) = [x_3\, x_2\, x_5\, x_4\, x_1\, x_6] \\ S^2 = (x_1\, x_5\, x_3) = [x_5\, x_2\, x_1\, x_4\, x_3\, x_6], \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (81\alpha)$$

während $S^3 = 1$ ist.

1) Die $4 \,.\, 40 = 160$ derartigen Substitutionen, bei welchen sämmtliche Elemente x_i positiv sind oder zwei der permutirten Elemente negative Vorzeichen haben, bedeuten dreizählige geschaarte Collineationen (vgl. § 9 I A 4)), deren Axenpaar durch je zwei Gerade k_0 (vgl. § 3 (11)) gebildet ist. Der vierfachen Wurzel $\sigma = 1$ entsprechen drei in einem Büschel liegende lineare Complexe $C_{(2)}$ (vgl. § 6 (14β)), also alle Geraden einer linearen Congruenz, deren Axen sich aus den beiden anderen Wurzeln $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \alpha^2$ als zwei zusammengehörige Gerade k_0 ergeben (vgl. § 6 am Ende). Für das obige Beispiel (81α) sind diese drei Complexe $C_{(2)}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 - x_5 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81\beta)$$

die Axen der Congruenz sind die beiden Geraden:

$$k_0 \ . \ . \ . \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \end{matrix}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (81\gamma)$$

Die Complexe des Gebüsches (vgl. (58γ)):

$$a_1 (x_1 + x_3 + x_5) + a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_6 x_6 = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \quad (81\delta)$$

sowie die beiden speciellen Complexe, deren Leitgerade je eine der beiden Axen (81γ) ist, werden in sich transformirt. Die beiden Axen bleiben absolut fest, während die Punkte (Ebenen) der Geraden, welche beide Axen schneiden, sich mit Ausnahme der beiden festen Punkte (Ebenen) nach der Periode 3 verschieben (drehen).

Als entsprechende Substitution in *tetraedrischen* Coordinaten ergeben sich aus jedem der beiden Tetraeder T_2, T_3 2 . 4 reelle, aus jedem der 6 Tetraeder $T_{10} \, .. \, T_{15}$ 2 . 4 imaginäre und aus jedem der Tetraeder $T_4 \, .. \, T_6$ und $T_7 \, .. \, T_9$ 4 . 4 imaginäre Substitutionen, sodass also drei Gruppen von 16, 48 und 96 Substitutionen unterschieden werden können. So erhält man für das oben gewählte Beispiel:

$$\left.\begin{matrix} S \ = [x_3\, x_2\, x_5\, x_4\, x_1\, x_6] = [1 \ 3 \ 4 \ 2]_2 \\ S^2 = [x_5\, x_2\, x_1\, x_4\, x_3\, x_6] = [1 \ 4 \ 2 \ 3]_3 ; \end{matrix}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (81\varepsilon)$$

die beiden Doppelwurzeln $\tau = \alpha, \alpha^2$ liefern die beiden Axen (81γ) der Collineation; zu den ∞^3 Flächen zweiten Grades, welche durch das Axenpaar hindurchgehen und durch die Collineation in sich transformirt werden (vgl. § 9 I A 4) unter (58ε)), gehören je eine Fundamentalfläche $F^{(1)}$ (die übrigen Fundamentalflächen gehen zu je dreien in einander über), je 6 Flächen $F^{(5)}$, je 3 Flächen $F^{(6)}$, je 6 Flächen $F^{(7)}$, je 8 Flächen $F^{(8)}$ (vergl. § 7 unter 1), 5), 6), 7), 8)).

2) Die 12 . 40 = 480 Substitutionen von der Form (81α), bei welchen entweder je zwei der nicht permutirten Grössen x_i oder je eine der permutirten und je eine der nicht permutirten Grössen x_i negative Vorzeichen haben, bedeuten *sechszählige Collineationen* und zwar auf *zwei Arten eigentliche* sechszählige Collineationen (vgl. § 9 I B unter 2) a)). Die Eckpunkte (Seitenflächen) des Haupttetraeders dieser Collineationen sind 4 Punkte (Ebenen) $\mathfrak{h}^{(e)}_0 = \mathfrak{k}^{(k)}_0$ $(({}^{(e)}_0 = \varphi^{(k)}_0)$, welche in § 8 I 8) in (36γ) angegeben sind, die 3 Kantenpaare sind je ein Geradenpaar k_0, e und h (vgl. (36δ)), welche bez. den Wurzelwerthen $\sigma = \alpha, \alpha^2$, der Doppelwurzel $\sigma = -1$

und der Doppelwurzel $\sigma = 1$ entsprechen. Die beiden Büschel von Gewinden (vgl. § 8 C I (28ζ' und ζ'')), deren Basis je ein Strahlennetz mit den Leitgeraden e und h ist, werden durch die Collineation bez. in sich transformirt. Z. B. für:

$$\left.\begin{array}{l} S \;\,= [x_3\, x_2\, x_5 \;-x_4\, x_1 \;-x_6] = [3 \;-1 \;-2\; 4]_2 \\ S^5 = [x_5\, x_2\, x_1 \;-x_4\, x_3 \;-x_6] = [4 \;-1 \;-3\; 2]_3, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (81\zeta)$$

wobei S^2, S^4 (vgl. § 9 I B 2) a)) die beiden dreizähligen geschaarten Collineationen S^2 und S in (81α),

$$S^3 = [x_1\, x_2\, x_3 \;-x_4\, x_5 \;-x_6] = [2 \;-1 \;-4\; 3]_1 \quad \ldots\ldots \quad (81\eta)$$

die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar (46) darstellt (vgl. (80δ)) und die Elemente des Haupttetraeders die in (36γ) und (36δ) angegebenen sind, werden die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden:

$$x_4 + \mu' x_6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81\vartheta')$$
$$x_2 + \mu'' (x_1 + x_3 + x_5) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81\vartheta'')$$

Die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes ist in (36ε) angegeben worden.

Bei Anwendung tetraedrischer Coordinaten ergiebt sich aus jedem der unter 1) dieses § angeführten Tetraeder die dreifache Anzahl der Substitutionen; die Wurzeln αi, $-\alpha i$, $-\alpha^2 i$, $\alpha^2 i$ bestimmen die Ecken (Flächen) des Haupttetraeders und die Gleichungen der beiden in sich transformirten Flächenbüschel (vgl. § 8 C I (28η') und (28η'')) werden für das Haupttetraeder als Coordinatentetraeder:

$$Z_1\, Z_4 + \lambda' Z_2\, Z_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81\iota')$$
$$Z_1\, Z_3 + \lambda'' Z_4\, Z_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81\iota'')$$

Zu den Flächen des ersten Büschels, dessen Vierseit durch zwei Gerade k_0 und zwei Gerade e gebildet ist, gehören je eine Fundamentalfläche $F^{(1)}$, je 6 Flächen $F^{(5)}$ und je 3 Flächen $F^{(6)}$, zu den Flächen des zweiten Büschels, dessen Vierseit durch zwei Gerade k_0 und zwei Gerade h gebildet wird, gehören je 2 Flächen $F^{(7)}$ (vgl. § 7 unter 1), 5), 6), 7)).

Den 12 . 40 = 480 derartigen, zu je zweien zusammengehörigen Substitutionen entsprechend tritt jeder der 240 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(k)}$ (jede der 240 Ebenen $(^{(e)}_{0} = \varphi^{(k)}_{0})$ viermal auf, jedes der 80 Geradenpaare k_0 tritt dreimal, jedes der 15 Geradenpaare e 16 mal und jedes der 240 Geradenpaare h einmal auf. Wir können also drei Gruppen von 1 . 48, 3 . 48 und 6 . 48

Substitutionen unterscheiden; für die Substitutionen der ersten Gruppe ist das Kantenpaar e des Haupttetraeders imaginär, das Kantenpaar h reell; für diejenigen der zweiten Gruppe sind alle Kantenpaare imaginär, für diejenigen der dritten Gruppe ist das Kantenpaar e reell, die beiden anderen imaginär. Die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen dieser drei Gruppen auf die Fundamentaltetraeder entspricht genau der unter A) 1) angegebenen.

Durch je zwei der Transformationen 1) und 2) gehen immer 5 mal je drei der 15 Fundamentaltetraeder T_i in einander über.

B) Correlationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die sämmtlichen derartigen $16 . 40 = 640$ Substitutionen bedeuten sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche (vgl. § 8 unter II) und zwar treten hier die beiden in § 9 II A 4) b) unter α) und β) unterschiedenen Fälle auf.

1) Die $4 . 40 = 160$ derartigen Substitutionen, bei welchen von drei permutirten Elementen x_i eins oder alle drei negativ sind und von welchen je zwei als S und S^5 zusammengehören, bedeuten solche sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche, für welche S^3 eine Polarcorrelation, deren Basis die Kernfläche ist, darstellt, während S^2 und S^4 dreizählige geschaarte Correlationen sind (vgl. § 9 II A 4) b) unter α)). Die Wurzeln σ sind (vgl. (72 ε)):

$$\sigma = 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -\alpha,\ -\alpha^2;$$

die Gleichung des Complexes Ω', der Kernfläche, des festbleibenden linearen Complexes, der beiden festbleibenden speciellen Complexe und ihrer Leitgeraden sind in den Formeln (45 γ) (§ 8 II unter 4)) für das Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} S &= [-x_3\,x_2 - x_5\,x_4 - x_1\,x_6] = [\overline{1\ 3\ 4\ 2}]_2 = [\underline{1\ 3\ 4\ 2}]_2 \\ S^5 &= [-x_5\,x_2 - x_1\,x_4 - x_3\,x_6] = [\overline{1\ 4\ 2\ 3}]_3 = [\underline{1\ 4\ 2\ 3}]_3 \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (81\varkappa)$$

angegeben worden; $S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_3$, $S^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_2$ stimmen bezw. mit deu geschaarten Collineationen S^2 und S in (81 ε) unter A) 1) überein, während

$$S^3 = [-x_1\,x_2 - x_3\,x_4 - x_5\,x_6] = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$$

die Polarcorrelation in Bezug auf $F^{(1)}_1$ darstellt.

Die Kernflächen sind die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$, von welchen jede 8 mal, die festbleibenden linearen Complexe die 80 Complexe $C_{(3)}$ (vgl.

(14γ) in § 6 A), von welchen jeder 1 mal, und die Leitgeraden der festbleibenden speciellen linearen Complexe je ein Geradenpaar k_0, von den jedes 1 mal für je zwei zusammengehörige Transformationen auftritt. Auch hier lassen sich also drei Gruppen von 16, 48 und 96 Transformationen unterscheiden; die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen dieser drei Gruppen auf die Fundamentaltetraeder entspricht der unter A) 1) angegebenen.

2) Die 12 . 40 = 480 Substitutionen der x_i, bei welchen entweder ein nicht permutirtes Element negativ oder zwei nicht permutirte und ein permutirtes Element negativ sind und von welchen je zwei als S und S^5 zusammengehören, bedeuten solche sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche, für welche S^3 eine Nullcorrelation darstellt, während S^2 und S^4 dreizählige geschaarte Collineationen bedeuten (vgl. § 9 II A) 4) unter b) β)). Die Wurzeln σ sind (vgl. (73ε)) $1, 1, 1, -1, \alpha, \alpha^2$; die Gleichungen des Complexes Ω', der Kernfläche, des festbleibenden linearen Complexes, welcher der zu dem S^3 entsprechenden Nullsystem gehörige ist, der beiden festbleibenden speciellen Complexe und ihrer Leitgeraden sind in den Formeln (46γ) (§ 8 II unter 5)) für das Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} S &= [x_3 \; -x_2 \; x_5 \; x_4 \; x_1 \; x_6] = [\overline{3 \; -1 \; -2 \; 4}]_2 = [\underline{3 \; -1 \; -2 \; 4}]_2 \\ S^5 &= [x_5 \; -x_2 \; x_1 \; x_4 \; x_3 \; x_6] = [\overline{4 \; -1 \; 3 \; -2}]_3 = [\underline{4 \; -1 \; -2 \; 4}]_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (81\lambda)$$

angegeben worden; auch hier (vgl. (81$\varkappa$)) stimmen $S^2 = [1\;4\;2\;3]_3$, $S^4 = [1\;3\;4\;2]_2$ bez. mit den geschaarten Collineationen S^2 und S in (81ε) überein, während $S^3 = [x_1 \; -x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6] = [\overline{2 \; -1 \; -4 \; 3}]_1$ die Nullcorrelation in Bezug auf $x_2 = 0$ darstellt.

Die Kernflächen sind die 240 Flächen $F^{(6)}$ (§ 7 6)), von welchen jede einmal, die festbleibenden linearen Complexe die 10 Fundamentalcomplexe $C_{(1)}$, von welchen jeder 24 mal, und die Leitgeraden der festbleibenden speciellen linearen Complexe je ein Geradenpaar k_0, von denen jedes dreimal für je zwei zusammengehörige Transformationen auftritt.

Die 480 Substitutionen zerfallen also auch hier (vgl. unter A) 2)) in drei Gruppen von 1 . 48, 3 . 48 und 6 . 48 entsprechend der Beschaffenheit der Kernflächen und der Haupttetraeder.

Werden die sämmtlichen hierher gehörigen Substitutionen und zwar sowohl diejenigen, welche Collineationen, als die, welche Correlationen

bedeuten, in tetraedrischen Coordinaten dargestellt (vgl. § 10 (79γ) und (79γ')), so entfallen auf die beiden Fundamentaltetraeder T_2, T_3 je $2 \cdot 16$, also $4 \cdot 16 = 64$ reelle, auf die 6 Tetraeder $T_{10} \dots T_{15}$ je $2 \cdot 16$, also $12 \cdot 16 = 192$ imaginäre, und auf die 3 Tetraeder $T_4 \dots T_6$ und die 3 Tetraeder $T_7 \dots T_9$ je $4 \cdot 16$, also $24 \cdot 16 = 384$ imaginäre Collineationen und ebensoviele Correlationen.

§ 13.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 45 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})$ resultiren.

A) Collineationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $4 \cdot 45 = 180$ derartigen Substitutionen, bei welchen sämmtliche Elemente x_i positiv sind oder je zwei permutirte Elemente eines Paares oder endlich beider Paare negative Vorzeichen haben, bedeuten (vgl. § 9 I A 2)) geschaart-involutorische Collineationen, deren Axenpaar je eins der 180 Geradenpaare d (vgl. § 3 unter (11) und § 6) ist. Z. B. den vier aus $(x_3\, x_5)\,(x_4\, x_6)$ hervorgehenden Substitutionen entsprechen bezw. geschaart involutorische Collineationen mit den durch ihre x_i-Coordinaten bestimmten Axenpaaren d:

$$\left.\begin{array}{lllllllll}
[x_1\, x_2\, x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [-1\;2\;4\;3]_1 & \text{Zugehöriges Axenpaar } d\colon & 0 & 0 & 1 & \pm i & -1 & \mp i \\
[x_1\, x_2 - x_5 - x_6 - x_3 - x_4] = [1\,-2\;4\;3]_1 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & 0 & 0 & 1 & \pm i & 1 & \pm i \\
[x_1\, x_2 - x_5\, x_6 - x_3\, x_4] = [2\;1\;3\,-4]_1 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & 0 & 0 & 1 & \mp i & 1 & \pm i \\
[x_1\, x_2\, x_5 - x_6\, x_3 - x_4] = [2\;1\,-3\;4]_1 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & 0 & 0 & -1 & \pm i & 1 & \pm i.
\end{array}\right\} \quad (82\alpha)$$

Durch jede dieser 180 Transformationen, bei welchen je eins der 36 reellen und der $72 + 72$ imaginären Axenpaare d erster und zweiter Art, sowie alle diese schneidenden Geraden festbleiben, gehen je zwei Fundamentalcomplexe $C_{(1)}$ (im Beispiel $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) in sich, die übrigen 4 zu je zweien ineinander über, ebenso gehen je zwei der Fundamentalflächen $F^{(1)}$ (im Beispiel $F_1^{(1)}$ und $F_2^{(1)}$), die übrigen 8 zu je zweien in einander über, endlich gehen je drei Fundamentaltetraeder T_i (im Beispiel T_1, T_4, T_7, welche das Kantenpaar (12) gemein haben) in sich, die übrigen 12 zu je zweien in einander über.

Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen die 36 geschaart-involutorischen Collineationen mit reellem Axenpaare d zu je $4 \cdot 3$ auf die 3 Tetraeder T_1, T_2, T_3, die 72 imaginären Colli-

neationen, deren Axenpaar durch zwei imaginäre Gerade d erster Art gebildet wird zu 4.6 auf T_1, zu je 4.2 auf die 6 Tetraeder $T_{10}..T_{15}$ und die 72 imaginären Collineationen, deren Axenpaar zwei imaginäre Gerade d zweiter Art sind, zu je 4.2 auf die 6 Tetraeder $T_4..T_9$ und zu je 4.1 auf die 6 Tetraeder $T_{10}..T_{15}$.

2) Die $4.45 = 180$ Substitutionen, bei welchen je eins der beiden permutirten Elemente beider Paare negatives Vorzeichen hat, bedeuten **vierzählige axiale Collineationen** (vgl. § 9 I A unter 3)), deren Reihen- und Büschelaxe durch je ein Geradenpaar $e = (i\,k)$ gebildet wird und bei welchen die beiden festbleibenden Punkte ($\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$) der letzteren und die beiden festbleibenden Ebenen (E_2, E_3) der ersteren durch bezw. 2 Punkte $\mathfrak{e}$ und 2 Ebenen ε repräsentirt sind. Von den vier zusammengehörigen Substitutionen bedeuten die beiden, sich als S und S^3 entsprechenden Paare axiale Collineationen, deren Reihen- und Büschelaxe mit einander vertauscht ist; S^2 stellt die geschaart-involutorische Collineation mit diesem Axenpaar dar. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S = [x_1\,x_2\,x_5\,x_6 - x_3 - x_4] = [1\,2 - 4\,3]_1 \\ S^3 = [x_1\,x_2 - x_5 - x_6\,x_3\,x_4] = [1\,2\,4 - 3]_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Reihenaxe: } 1\ -i\ 0\ 0\ 0\ 0 \text{ mit Ebenen } \varepsilon_{25}, \varepsilon_{26} \\ \text{Büschelaxe: } 1\ \ i\ 0\ 0\ 0\ 0 \text{ „ Punkten } \mathfrak{e}_{26}, \mathfrak{e}_{25} \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} S = [x_1\,x_2\,x_5 - x_6 - x_3\,x_4] = [-2\,1\,3\,4]_1 \\ S^3 = [x_1\,x_2 - x_5\,x_6\,x_3 - x_4] = [2 - 1\,3\,4]_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Reihenaxe: } 1\ \ i\ 0\ 0\ 0\ 0 \text{ „ Ebenen } \varepsilon_{27}, \varepsilon_{28} \\ \text{Büschelaxe: } 1\ -i\ 0\ 0\ 0\ 0 \text{ „ Punkten } \mathfrak{e}_{28}, \mathfrak{e}_{27} \end{array} \\ \qquad\qquad S^2 = [-x_1 - x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6] = [1\,2 - 3 - 4]_1 . \end{array}\right\} \quad (82\beta)$$

Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $\sigma = 1, 1, i, i, -i, -i$ und zwar entsprechen der Doppelwurzel $\sigma = 1$ die beiden Axen, den beiden Doppelwurzeln $\sigma = i$ und $\sigma = -i$ bez. alle Strahlen der beiden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte je einer der beiden festbleibenden Punkte der Büschel-, deren Ebenen je eine der beiden festbleibenden Ebenen der Reihenaxe ist. Für die Wurzeln $\tau = 1, 1, i, -i$ ergiebt sich dasselbe Resultat.

Die in sich übergehenden Complexe der beiden Gebüsche (57γ) lassen sich leicht erhalten (im obigen Beispiele:

$$k_1\,x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,(x_3 \pm i\,x_5) + k_4\,(x_4 \pm i\,x_6) = 0),$$

ebenso diejenigen des Büschels (im obigen Beispiele: $k_1\,x_1 + k_2\,x_2 = 0$); zu den ∞^3 in sich transformirten Flächen 2ten Grades (57ε) gehören zwei Fundamentalflächen (im Beispiel $F_1^{(1)}$ und $F_2^{(1)}$), ebenso zwei der 60 Flächen $F^{(2)}$, zwei der 90 Flächen $F^{(3)}$ u. s. w.

Von diesen 180 vierzähligen axialen Collineationen sind $9.4 = 36$ solche mit je einem reellen Axenpaar e und je zwei festen imaginären

Punkten $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε); die entsprechenden Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen zu je $4 . 3$ auf die drei Tetraeder T_1, T_2, T_3. Ferner haben von den 144 imaginären Collineationen $9 . 8 = 72$ je ein reelles Axenpaar e und je zwei feste reelle Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε), die übrigen $12 . 6 = 72$ je ein imaginäres Axenpaar e und je zwei feste imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε); die entsprechenden imaginären Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen für die ersten 72 zu je $4 . 6$ auf T_1, zu je $4 . 2$ auf $T_{10} \,.\,.\, T_{15}$, für die andern 72 zu je $4 . 2$ auf die Tetraeder $T_4 \,.\,.\, T_9$ und zu je $4 . 1$ auf die Tetraeder $T_{10} \,.\,.\, T_{15}$.

3) Endlich bedeuten die $8 . 45 = 360$ derartigen Substitutionen, bei welchen ein Element x_i der beiden nicht permutirten Elemente und ein Element x_k eines Paares der permutirten Elemente negatives Vorzeichen haben, vierzählige Collineationen (vergleiche § 9 I B 1)). Diese Collineationen besitzen, wie a. a. O. gezeigt wurde, die ausgezeichnete Eigenschaft, auf zwei Arten eigentliche und auf zwei Arten uneigentliche Collineationen zu sein. Die Eckpunkte (Seitenflächen) des Haupttetraeders sind je 4 Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (je 4 Ebenen $(\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)})$, deren Coordinaten für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} S \;= [-x_1\, x_2\, x_5\, x_6 -x_3\, x_4] = [3\; 4\, -2\; 1]_1 \\ S^3 = [-x_1\, x_2 -x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [4\, -3\; 1\; 2]_1 \end{array}\right\} \quad S^2 = [x_1\, x_2 -x_3\, x_4 -x_5\, x_6] = [2\, -1\; 4\, -3]_1 \quad (82\gamma)$$

(vgl. (80δ) in § 11) in § 8 C) I unter 2) (30γ), ebenso wie die Coordinaten der Kanten K_{13}, K_{42}; K_{14}, K_{23}; K_{12}, K_{34} dieses Tetraeders, welche bez. den Wurzeln $\sigma = 1, 1; -1, -1; i, -i$ entsprechen, angegeben sind; auch die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes ist unter (30ε) aufgeführt. Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (vergl. § 8 C I (28ζ') und (28ζ'')), deren Basis je ein Strahlennetz mit zwei Leitgeraden d_0 ist, werden für das betrachtete Beispiel:

$$x_2 + \mu'(x_4 + x_6) = 0 \text{ und } x_1 + \mu''(x_4 - x_6) = 0 \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (82\delta).$$

Zu den Flächen der beiden in sich transformirten Flächenbüschel (vgl. (28η')) und (28η'')), deren Gleichungen für das Haupttetraeder als Coordinatentetraeder sind:

$$Z_1\, Z_4 + \lambda'\, Z_2\, Z_3 = 0 \text{ und } Z_1\, Z_3 + \lambda''\, Z_4\, Z_2 = 0,$$

gehören je eine Fläche $F^{(1)}$, je eine Fläche $F^{(3)}$, je zwei Flächen $F^{(7)}$; und zwar im Beispiel zu dem ersteren Flächenbüschel, dessen Vierseit aus den beiden Geraden (35) und den beiden imaginären Geraden d_0: $0 \pm i\sqrt{2}\; 0\; 1\; 0\; 1$

gebildet wird, die Fläche $F_1^{(1)}$, die Fläche $F^{(3)}$:

$$F_9^{(1)} + F_7^{(1)} \equiv 2\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1(z_3 - z_4) - z_2(z_3 + z_4) = 0 \quad . . (82\varepsilon'),$$

die beiden Flächen $F^{(7)}$:

$$6\,x_2^2 + 3\,(x_4 + x_6)^2 + 2\,(x_1 + x_4 - x_6)^2 = 0 \text{ und } 6\,x_2^2 + 3\,(x_4 + x_6)^2 + 2\,(x_1 - x_4 + x_6)^2 = 0;$$

zu dem zweiten Flächenbüschel, dessen Vierseit zu Kanten die beiden Geraden (35) und die beiden reellen Geraden d_0: $\pm i\sqrt{2}\ 0\ 0\ 1\ 0\ {-1}$ hat, die Fläche $F_2^{(1)}$, die Fläche $F^{(3)}$:

$$F_9^{(1)} - F_7^{(1)} \equiv 2\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1(z_3 - z_4) + z_2(z_3 + z_4) = 0 \quad . . (82\varepsilon'')$$

und die beiden Flächen $F^{(7)}$:

$$6\,x_1^2 + 3\,(x_4 - x_6)^2 + 2\,(x_2 + x_4 + x_6)^2 = 0 \text{ und } 6\,x_1^2 + 3\,(x_4 - x_6)^2 + 2\,(x_2 - x_4 - x_6)^2 = 0.$$

Zu den Flächen der beiden Netze (Gewebe) vergl. (28λ') und (28λ'') gehören je 2 Flächen $F^{(3)}$, im Beispiele zu dem ersten Netze die beiden Flächen:

$$\left.\begin{array}{l} F_3^{(1)} + i\,F_4^{(1)} \equiv (x_3 - x_6)^2 + (x_3 + x_6)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ \quad \text{oder } (x_4 - x_5)^2 + (x_4 + x_5)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 - z_2^2 - i\,(z_3^2 - z_4^2) = 0 \\ F_5^{(1)} + i\,F_8^{(1)} \equiv (x_3 - x_4)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ \quad \text{oder } (x_5 - x_6)^2 + (x_5 + x_6)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \text{ oder } z_1 z_2 + i\,z_3 z_4 = 0, \end{array}\right| \quad . . (82\zeta')$$

zu dem zweiten Netze die beiden Flächen:

$$\left.\begin{array}{l} F_3^{(1)} - i\,F_4^{(1)} \equiv (x_3 - x_6)^2 + (x_3 + x_6)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \\ \quad \text{oder } (x_4 - x_5)^2 + (x_4 + x_5)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 - z_2^2 + i\,(z_3^2 - z_4^2) = 0 \\ F_5^{(1)} - i\,F_8^{(1)} \equiv (x_3 - x_4)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \\ \quad \text{oder } (x_5 - x_6)^2 + (x_5 + x_6)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \text{ oder } z_1 z_2 - i\,z_3 z_4 = 0. \end{array}\right| \quad . . (82\zeta'')$$

Diese Flächen werden auf die zweite Art in sich transformirt.

Da einerseits jede der 18 reellen Geraden e 4 reelle und 8 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und jede der 12 imaginären Geraden e 12 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ als Kubooktaederpunkte enthält, andererseits jede der 72 reellen Geraden d_0 4 reelle und 2 imaginäre Punkte $\mathfrak{f}_0^{(d)}$ und jede der 168 imaginären Geraden d_0 6 imaginäre Punkte $\mathfrak{f}_0^{(d)}$ als Oktaederpunkte enthält, so ergibt sich, dass durch jeden der 72 reellen Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ eine reelle Gerade e und 4 reelle Gerade d_0, durch 144 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ eine reelle Gerade e und 4 imaginäre Gerade d_0 und durch weitere 144 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ eine imaginäre Gerade e, eine reelle und 3 imaginäre Gerade d_0 hindurchgehen. Da Analoges für die Ebenen $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$ gilt, so folgt, dass vier Gruppen von Haupttetraedern der vierzähligen Collineationen entstehen:

a) 36 Haupttetraeder mit imaginären Eckpunkten $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und Seitenflächen $\iota_0^{(e)}$, einem imaginären Kantenpaar e, einem reellen und einem ima-

ginären Kantenpaar d_0; b) 72 Haupttetraeder mit imaginären Eckpunkten und Flächen, einem reellen Kantenpaar e und zwei imaginären Kantenpaaren d_0; c) 36 Haupttetraeder mit imaginären Eckpunkten und Flächen, einem reellen Kantenpaar e und zwei imaginären Kantenpaaren d_0; d) 36 Haupttetraeder mit reellen Eckpunkten und Seitenflächen, einem reellen Kantenpaar e und zwei imaginären Kantenpaaren d_0.

Jedes Haupttetraeder entspricht zweien zusammengehörigen Substitutionen S und S^3; die 72 zu a) gehörigen reellen Substitutionen entfallen bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten zu je 8.3 auf die Tetraeder T_1, T_2, T_3; die zu b) gehörigen 144 imaginären Substitutionen entfallen zu je 8.6 auf T_1 und zu je 8.2 auf die Tetraeder $T_{10} \,..\, T_{15}$; endlich die zu c) und d) gehörigen 144 imaginären Substitutionen entfallen zu je 8.2 auf die Tetraeder $T_4 \,..\, T_9$ und zu je 8.1 auf die Tetraeder $T_{10} \,..\, T_{15}$.

B) Correlationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $4.45 = 180$ Substitutionen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})$, bei welchen eines der beiden nicht permutirten Elemente negatives Vorzeichen hat, die permutirten Elemente der beiden Paare aber alle gleiches, oder die beiden permutirten Elemente eines Paares negatives Vorzeichen haben, bedeuten Polarcorrelationen, deren Basisfläche je eine der 180 Flächen $F^{(4)}$ (vgl. § 7 4)) ist. So gehören z. B. zu den folgenden Substitutionen Polarcorrelationen mit den Basisflächen:

Substitution: Basisfläche der Correlation:

$$\left.\begin{array}{ll}
[x_1\, -x_2\, x_5\, -x_6\, x_3\, -x_4] = [\overline{-1\,2\,4\,3}]_1 = [\underline{-1\,2\,4\,3}]_1 & ..\; 2\,x_1^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \\
 & \text{oder } z_1^2 - z_2^2 - 2\,z_3\,z_4 = 0 \\
[x_1\, -x_2\, -x_5\, x_6\, -x_3\, x_4] = [\overline{1\,-2\,4\,3}]_1 = [\underline{1\,-2\,4\,3}]_1 & ..\; 2\,x_1^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \\
 & \text{oder } z_1^2 - z_2^2 + 2\,z_3\,z_4 = 0 \\
[x_1\, -x_2\, x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [\overline{2\,1\,-3\,4}]_1 = [\underline{2\,1\,-3\,4}]_1 & ..\; 2\,x_1^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \\
 & \text{oder } z_3^2 - z_4^2 - 2\,z_1\,z_2 = 0 \\
[-x_1\, x_2\, x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [\overline{2\,1\,3\,-4}]_1 = [\underline{2\,1\,3\,-4}]_1 & ..\; 2\,x_1^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \\
 & \text{oder } z_3^2 - z_4^2 + 2\,z_1\,z_2 = 0\,.
\end{array}\right\} \quad (82\zeta)$$

Die erste und zweite, ebenso die dritte und vierte Basisfläche haben je ein durch zwei Geradenpaare d gebildetes Vierseit gemein (vgl. § 7 unter 4)). Von den Polarcorrelationen sind wie von den Basisflächen 36 reell, 144 imaginär; bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten vertheilen

sich die Substitutionen der drei Gruppen von je 36, 72 u. 72 Substitutionen in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie für die 180 geschaart-involutorischen Collineationen (vgl. unter A) 1) dieses §).

2) Die 4 . 45 = 180 Substitutionen, bei welchen eins der beiden nicht permutirten Elemente und je eins der beiden permutirten Elemente beider Paare negatives Vorzeichen hat, bedeuten vierzählige Correlationen mit Axen und zwar von der ersten Art (vgl. § 9 II A) 3)). Die beiden sich involutorisch entsprechenden Axen sind je ein Geradenpaar $e = (i, k)$, die Mittelpunkte und Ebenen der beiden bei der Correlation festbleibenden Strahlbüschel sind je ein Punktpaar $\mathfrak{e}$ der einen und je ein Ebenenpaar ε der anderen Axe. Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Complexe, der in sich auf die erste Art transformirten Flächen 2ten Grades sind aus den Formeln (69) zu entnehmen; von je 4 zusammengehörigen Substitutionen, deren Axenpaar und Haupttetraeder dasselbe ist, entsprechen sich je zwei als S und S^3, während S^2 für beide die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar darstellt. Z. B. (vgl. (82β)):

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
S = [x_1\ {-x_2}\ x_5\ x_6\ {-x_3}\ {-x_4}] = [\overline{-2\ 1\ 3\ 4}]_1 = [\underline{-2\ 1\ 3\ 4}]_1 \\
S^3 = [x_1\ {-x_2}\ {-x_5}\ {-x_6}\ x_3\ x_4] = [\overline{2\ {-1}\ 3\ 4}]_1 = [\underline{2\ {-1}\ 3\ 4}]_1
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathfrak{e}_{26} \ldots 0\ 0\ 1\ \ i \\ \mathfrak{e}_{25} \ldots 0\ 0\ 1\ {-i} \end{array} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{25} \ldots 0\ 0\ 1\ \ i \\ \varepsilon_{26} \ldots 0\ 0\ 1\ {-i} \end{array} \\
\left.\begin{array}{l}
S = [x_1\ {-x_2}\ x_5\ {-x_6}\ {-x_3}\ x_4] = [\overline{1\ 2\ {-4}\ 3}]_1 = [\underline{1\ 2\ {-4}\ 3}]_1 \\
S^3 = [x_1\ {-x_2}\ {-x_5}\ x_6\ x_3\ {-x_4}] = [\overline{1\ 2\ 4\ {-3}}]_1 = [\underline{1\ 2\ 4\ {-2}}]_1
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathfrak{e}_{27} \ldots 1\ \ i\ 0\ 0 \\ \mathfrak{e}_{28} \ldots 1\ {-i}\ 0\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{28} \ldots 1\ \ i\ 0\ 0 \\ \varepsilon_{27} \ldots 1\ {-i}\ 0\ 0 \end{array} \\
\qquad\qquad S^2 = [x_1\ x_2\ {-x_3}\ {-x_4}\ {-x_5}\ {-x_6}] = [1\ 2\ {-3}\ {-4}]_1.
\end{array}\right\} \quad (82\eta)$$

(Spaltenköpfe: Mittelpunkte: Ebenen der Strahlbüschel:)

Die Axen sind: (12) . . . 1 $\pm i$ 0 0 0 0; die in sich transformirten Complexe: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; zu den in sich auf die erste Art transformirten Flächen gehören $F_1^{(1)}$ und $F_2^{(1)}$.

Die Eintheilung dieser 180 4zähligen Correlationen mit Axen in 36 reelle und 2 . 72 imaginäre, sowie die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen auf die Fundamentaltetraeder ist vollständig entsprechend derjenigen der 180 4zähligen axialen Collineationen (vgl. den letzten Absatz von A) 2) dieses §).

3) Die 8 . 45 = 360 Substitutionen $(x_{i_1}\ x_{i_2})\ (x_{i_3}\ x_{i_4})$ endlich, bei welchen die beiden nicht permutirten Elemente gleiches und ein Element eines Paares der permutirten Elemente negatives Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche

(vgl. § 9 II A) unter 4a)). Die Wurzeln σ sind 1, 1, 1, -1, i, $-i$; die Gleichungen der Complexe Ω', der Kernfläche $F^{(3)}$, des festbleibenden Netzes von Complexen und des linearen Complexes, der beiden festbleibenden speciellen linearen Complexe und ihrer Leitgeraden sind in den Formeln (43α). . (43γ) (§ 8 II unter 2)) für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} S\ = [x_1\, x_2 - x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [\overline{3\ 4 - 2\ 1}]_1 = [\underline{3\ 4 - 2\ 1}]_1 \\ S^3 = [x_1\, x_2\, x_5\, x_6 - x_3\, x_4] = [\overline{4 - 3\ 1\ 2}]_1 = [\underline{4 - 3\ 1\ 2}]_1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} S^2 = [x_1\, x_2 - x_3\, x_4 - x_5\, x_6] \\ \quad = [2 - 1\ 4 - 3]_1 \end{array}\right\} (82\vartheta)$$

angegeben worden; S^2 stellt die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar (35) dar, welches die Leitgeraden der beiden speciellen Complexe bildet. Die Flächen aller Büschel, deren Vierseit durch diese beiden Leitgeraden (35) und je zwei Geraden des anderen Systems der Kernfläche:

$$F^{(3)} \equiv F^{(1)}_9 + F^{(1)}_7 \; . \; . \; . \; 2\,x_1{}^2 + 2\,x_2{}^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (82\eta)$$

gebildet wird, sind involutorisch zugeordnet, wobei ausser der Kernfläche: noch eine Fläche jedes Büschels in sich transformirt wird; z. B. für das Büschel durch (35) und (12) die Fläche $F^{(1)}_9 - F^{(1)}_7 \, . \, . \, 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0$, für dasjenige durch (35) und das Geradenpaar d_0: 0 $\pm i\sqrt{2}$ 0 1 0 1 die Fläche $F^{(1)}_1$, für dasjenige durch (35) und das Geradenpaar d_0: $\pm i\sqrt{2}$ 0 0 1 0 1 (vgl. unter A 3) dieses §) die Fläche $F^{(1)}_2$, für dasjenige durch (35) und das Geradenpaar d . . . 1 1 0 $\pm i$ 0 $\pm i$ die Fläche:

$$F_1{}^{(1)} + i\,F_2{}^{(1)} \; . \; . \; . \; (x_1 - x_2)^2 + 2\,x_3{}^2 + 2\,x_5{}^2 = 0,$$

für dasjenige durch (35) und das Geradenpaar d: 1 -1 0 $\pm i$ 0 $\pm i$ die Fläche:

$$F^{(1)}_1 - i\,F^{(1)}_2 \; . \; . \; . \; . \; (x_1 + x_2)^2 + 2\,x_3{}^2 + 2\,x_5{}^2 = 0 \qquad \text{u. s. f.}$$

Da von den 90 Kernflächen $F^{(3)}$, zu deren jeder zwei Paare von Substitutionen S, S^3 gehören, 36 reell sind (vgl. § 7 B) 3)), welche je ein reelles und ein imaginäres Geradenpaar e enthalten, ferner 36 imaginäre je zwei reelle und 18 imaginäre Flächen $F^{(3)}$ je zwei imaginäre Geradenpaare e enthalten, so zerfallen die 360 4zähligen Correlationen mit Axen in folgende vier Gruppen:

		Kernfläche:	Leitgeraden e:
a)	2 . 36 = 72 reelle Correlationen:	Eine der 36 reellen Flächen $F^{(3)}$,	Ein imaginäres Geradenpaar e,
b)	2 . 72 = 144 imaginäre „ :	Eine der 36 imaginären „ $F^{(3)}$,	Je ein reelles Geradenpaar e,
c)	2 . 36 = 72 „ „ :	Eine der 36 reellen „ $F^{(3)}$,	Ein reelles Geradenpaar e,
d)	2 . 36 = 72 „ „ :	Eine der 18 imaginären „ $F^{(3)}$,	Je ein imaginäres Geradenpaar e.

Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen wiederum (vgl. A) 3) dieses §) die 72 zu a) gehörigen zu je 8 . 3

auf die Tetraeder T_1, T_2, T_3, die zu b) gehörigen 144 Substitutionen zu $8 \cdot 6$ auf T_1 und zu je $8 \cdot 2$ auf die Tetraeder $T_{10} \ldots T_{15}$; endlich die zu c) und d) gehörigen 144 Substitutionen zu je $8 \cdot 2$ auf $T_4 \ldots T_9$ und zu je $8 \cdot 1$ auf $T_{10} \ldots T_{15}$.

§ 14.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 40 Permutationen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$ resultiren.

A) Collineationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die sämmtlichen $16 \cdot 40 = 640$ Substitutionen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$, bei welchen entweder alle Elemente positives oder zwei Elemente negatives Vorzeichen haben, bedeuten dreizählige axiale Collineationen (vgl. § 9 I A unter 3)), deren Reihen- und Büschel-Axe durch je eine Gerade k und k' gebildet wird und bei welchen die beiden festbleibenden Punkte $(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3)$ der letzteren und die beiden festbleibenden Ebenen (E_2, E_3) der ersteren durch bez. zwei Punkte $\mathfrak{k}_0$ und zwei Ebenen $\varkappa_0$ dargestellt sind (vergl. (11) und (12β) in § 3).

Von den vier zu je zweien zusammengehörigen Substitutionen:

$$S = (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}), \quad S^2 = (x_{i_1} x_{i_3} x_{i_2})(x_{i_4} x_{i_6} x_{i_5}) \quad \text{und}$$
$$S = (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_6} x_{i_5}), \quad S^2 = (x_{i_1} x_{i_3} x_{i_2})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$$

stellen die beiden Paare dreizählige axiale Collineationen dar, deren Reihen- und Büschel-Axe mit einander vertauscht ist. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll}
S = [x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_1\, x_2] = [1\,4\,2\,3]_1 & \text{Reihenaxe: } 1 \;\; i \;\; 1 \;\; i \;\; 1 \;\; i \text{ mit Ebenen } \varkappa_0 \begin{cases} 0 \;\; 1 \;\; \alpha^2 \;\; \alpha \\ 0 \;\; 1 \;\; \alpha \;\; \alpha^2 \end{cases} \\
S^2 = [x_5\, x_6\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4] = [1\,3\,4\,2]_1 & \text{Büschelaxe: } 1 \; -i \;\; 1 \; -i \;\; 1 \; -i \text{ mit Punkten } \mathfrak{k}_0 \begin{cases} 0 \;\; 1 \;\; \alpha^2 \;\; \alpha \\ 0 \;\; 1 \;\; \alpha \;\; \alpha^2 \end{cases} \\
S = [x_3\, x_6\, x_5\, x_2\, x_1\, x_4] = [1\,2\,3\,4]_3 & \text{Reihenaxe: } 1 \; -i \;\; 1 \; -i \;\; 1 \; -i \text{ mit Ebenen } \varkappa_0 \{ \pm i\sqrt{3} \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \\
S^2 = [x_5\, x_4\, x_1\, x_6\, x_3\, x_2] = [1\,2\,3\,4]_2 & \text{Büschelaxe: } 1 \;\; i \;\; 1 \;\; i \;\; 1 \;\; i \text{ mit Punkten } \mathfrak{k}_0 \{ \pm i\sqrt{3} \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1.
\end{array}\right\} \quad (83\alpha)$$

Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $\sigma = 1, 1; \alpha, \alpha; \alpha^2, \alpha^2$, denen bez. die beiden Axen und alle Strahlen der beiden Strahlbüschel mit je einem Mittelpunkte $\mathfrak{k}_0$ und einer Ebene $\varkappa_0$ entsprechen; die Wurzeln der biquadratischen Gleichung in τ sind $\tau = 1, 1; \alpha, \alpha^2$. Die Complexe der beiden Gebüsche (vgl. (57γ)):

$$k_1\,(x_1+\alpha\,x_3+\alpha^2\,x_5)+k_2\,(x_2+\alpha\,x_4+\alpha^2\,x_6)+k_3\,(x_1+x_3+x_5)+k_4\,(x_2+x_4+x_6)=0$$
$$k_1\,(x_1+\alpha^2\,x_3+\alpha\,x_5)+k_2\,(x_2+\alpha^2\,x_4+\alpha\,x_6)+k_3\,(x_1+x_3+x_5)+k_4\,(x_2+x_4+x_6)=0,$$

sowie derjenige des Büschels:

$$k_3\,(x_1+x_3+x_5)+k_4\,(x_2+x_4+x_6)=0$$

werden in sich transformirt; zu den ∞^3 in sich transformirten Flächen 2ten Grades (57ε) gehören die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$, je 3 Flächen $F^{(2)}$, je 3 Flächen $F^{(8)}$ u. s. f.

Von den 640 3zähligen axialen Collineationen sind $2.32=64$ solche mit je einem reellen, die übrigen $2.288=576$ solche mit je einem imaginären Axenpaar k, während die festbleibenden Punkte $\mathfrak{k}_0$ und Ebenen $\varkappa_0$ sämmtlich imaginär sind. Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen die ersteren 64 reellen zu 2.16 auf T_1, zu je 1.16 auf T_2, T_3, die anderen 576 imaginären zu 6.16 auf T_1, zu je 3.16 auf T_2, T_3 und zu je 4.16 auf $T_{10}\,..\,T_{15}$, dagegen keine auf die Tetraeder $T_4\,..\,T_9$.

B) Correlationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die sämmtlichen $16.40=640$ Substitutionen $(x_{i_1}\,x_{i_2}\,x_{i_3})\,(x_{i_4}\,x_{i_5}\,x_{i_6})$, bei welchen je eins oder je drei der Elemente x_i negative Vorzeichen haben, bedeuten allgemeine sechszählige Correlationen (vgl. § 9 II B) unter 1) und § 8 III unter 1)). Die Eckpunkte und Seitenflächen eines zu S und S^5 gehörigen Haupttetraeders sind (vgl. (49η)) vier Punkte $\mathfrak{k}_0$ und vier Ebenen $\varkappa_0$; das Kantenpaar K_{14}, K_{23} wird durch zwei Gerade k, k' gebildet, welches die Leitgeraden für die beiden festbleibenden Complexe $C_{(3)}$ und das Axenpaar für die beiden durch S^2 und S^4 dargestellten dreizähligen axialen Collineationen (vgl. A) dieses §) sind, während die beiden anderen Kantenpaare durch 2 Geradenpaare k_0 (49ϑ) gebildet werden. Die Coordinaten der Elemente dieses Tetraeders, die Gleichungen des Complexes Ω'', der festbleibenden Gewinde, der beiden auf die erste Art festbleibender Flächen G_1, G_2, der beiden Kernflächen K_1 und K_2 u. s. f. sind in § 8 III unter 1) (Formeln 49) für das Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} S &= [x_3-x_4\,x_5-x_6\,x_1-x_2]=[\overline{1\;4\;2\;3}]_1=[1\;4\;2\;3]_1\\ S^5 &= [x_5-x_6\,x_1-x_2\,x_3-x_4]=[\overline{1\;3\;4\;2}]_1=[1\;3\;4\;2]_1,\end{aligned}\right\}\;..\;(83\beta)$$

$$\text{wobei}\quad\left.\begin{aligned} S^2 &= [x_5\,x_6\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4]=[1\;3\;4\;2]_1\\ S^4 &= [x_3\,x_4\,x_5\,x_6\,x_1\,x_2]=[1\;4\;2\;3]_1\end{aligned}\right\}\;...\;(83\beta')$$

die beiden ersten in (83α) dargestellten **dreizähligen axialen Collineationen** und $S^3 = [x_1 - x_2\, x_3 - x_4\, x_5 - x_6] = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$ die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ (vgl. (80ζ) in § 11) bedeuten, angegeben worden.

Die bei sämmtlichen 640 Correlationen in sich transformirten Flächen G_1 sind die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$, von denen jede 32mal auftritt, die in sich transformirten Flächen G_2 sind die 320 Flächen $F^{(8)}$ (§ 7 unter 8)), von welchen jede einmal auftritt. Zu den $2 \,.\, 32 = 64$ reellen Correlationen gehören die imaginäre Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ und die 32 reellen Flächen $F^{(8)}$, ebenso die 16 reellen Geradenpaare k, k', während zu den $2 \,.\, 288 = 576$ imaginären Correlationen die 9 reellen Fundamentalflächen $F_2^{(1)} \,.\,.\, F_{10}^{(1)}$, die 288 imaginären Flächen $F^{(8)}$ und die 144 imaginären Geradenpaare k, k' gehören. Bei der Darstellung der Correlationen in tetraedrischen Coordinaten vertheilen sich diese Substitutionen ganz in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie die Substitutionen, welche dreizählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar k, k' bedeuten (vgl. A) am Ende dieses §).

§ 15.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 90 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\, (x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$ resultiren.

A) Collineationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 \,.\, 90 = 720$ derartigen Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente des Paares $x_{i_1}\ x_{i_2}$ **gleiches** Vorzeichen, die vier anderen unter sich permutirten Elemente aber entweder alle positives oder eine gerade Zahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten **vierzählige Collineationen** (vgl. § 9 I B 1) und § 8 C I unter 5)) und zwar solche, für welche die Eckpunkte (Seitenflächen) des Haupttetraeders je zwei Punktpaare $\mathfrak{d}_0$ (zwei Ebenenpaare δ_0), die Kanten K_{12}, K_{34} ein Geradenpaar d, die beiden anderen Kantenpaare zwei Geradenpaare r (vgl. § 4 unter 3)) sind. Die Coordinaten dieser Elemente sind in § 8 C I 5) unter (33γ) und (33δ) für das Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} S\ &= [-x_2\, x_3\, x_4 - x_1\, x_6\, x_5] = [1\ 2\ \ 3\ 4]_6 \\ S^3 &= [-x_4 - x_1\, x_2\, x_3\, x_6\, x_5] = [4\ 2\ {-3}\ 1]_6 \end{aligned}\right\} S^2 = [-x_3\, x_4 - x_1\, x_2\, x_5\, x_6] = [4\ 2\ {-3}\ 1]_1, \quad (84\alpha)$$

in welchem S^2 eine geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar:

$d \ldots 1 \mp i \;\; 1 \;\; \pm i \;\; 0 \;\; 0$ darstellt, angegeben worden; ebenso auch in (33ε) die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes.

Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (28ζ') und (28ζ'') werden:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3+x_4+\mu'(x_5+x_6) &= 0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4+\mu''(x_5-x_6) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84\beta)$$

die Basis derselben ist je ein Strahlennetz mit zwei Leitgeraden r.

Den Flächen des ersten in sich transformirten Flächenbüschels:

$$(28\eta') \ldots Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 = 0,$$

dessen Vierseit die beiden Kantenpaare K_{12}, K_{34} und K_{13}, K_{42} hat, gehört je eine der 60 Flächen $F^{(2)}$, z. B.:

$$F^{(2)} \ldots (F_2^{(1)} + F_3^{(1)}) - i(F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) \equiv (x_1+x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + (x_5-x_6)^2 = 0$$
$$\text{oder } z_1^2 - z_4^2 + 2i z_2 z_3 = 0$$

und je eine der 120 Flächen $F^{(5)}$ (vgl. § 7 unter 5) (21γ) und (21δ): (84γ')

$$F^{(5)} \ldots (F_5^{(1)} + F_9^{(1)}) + i(F_6^{(1)} + F_8^{(1)}) \equiv (-x_1+x_2+x_3+x_4)^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 0$$
$$\text{oder } z_2(z_1-z_4) + i z_3(z_1+z_4) = 0$$

an; ebenso den Flächen des zweiten Flächenbüschels:

$$(28\eta'') \ldots Z_1 Z_3 + \lambda'' Z_2 Z_4 = 0,$$

dessen Vierseit die beiden Kantenpaare K_{12}, K_{34} und K_{14}, K_{23} hat, je eine der 60 Flächen $F^{(2)}$, z. B.:

$$F^{(2)} \ldots (F_2^{(1)} + F_3^{(1)}) + i(F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) \equiv (x_1-x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + (x_5-x_6)^2 = 0$$
$$\text{oder } z_1^2 - z_4^2 - 2i z_2 z_3 = 0$$

und je eine der 120 Flächen $F^{(5)}$: (84γ'')

$$F^{(5)} \ldots (F_5^{(1)}) + F_9^{(1)}) - i(F_6^{(1)} + F_8^{(1)}) \equiv (x_1+x_2-x_3+x_4)^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 0$$
$$\text{oder } z_2(z_1-z_4) - i z_3(z_1+z_4) = 0.$$

Zu den in sich auf die zweite Art transformirten Flächen der beiden Netze (Gewebe) (vgl. (28λ') und (28λ'')) gehören je eine Fläche $F^{(1)}$ und eine der 180 Flächen $F^{(4)}$ (§ 7 unter 4)), im Beispiele zu den Flächen des ersten Netzes die beiden Flächen:

$$\left.\begin{aligned} &F_1^{(1)} \ldots x_1^2+x_3^2+x_5^2 \equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2 = 0 \text{ oder } z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 = 0 \\ &F^{(4)} \ldots (F_2^{(1)} - F_3^{(1)}) + (F_7^{(1)} + F_{10}^{(1)}) \equiv (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + 2x_5^2 \equiv \\ &\qquad (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + 2x_6^2 = 0 \text{ oder } z_2^2 - z_3^2 + 2z_1 z_4 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (84\delta')$$

zu den Flächen des zweiten Netzes die beiden Flächen:

$$\left.\begin{aligned} &F_4^{(1)} \ldots x_1^2+x_3^2+x_6^2 \equiv x_2^2+x_4^2+x_5^2 = 0 \text{ oder } z_1^2-z_2^2-z_3^2+z_4^2 = 0 \\ &F^{(4)} \ldots (F_2^{(1)} - F_3^{(1)}) - (F_7^{(1)} + F_{10}^{(1)}) \equiv (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + 2x_5^2 \equiv \\ &\qquad (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + 2x_6^2 + = 0 \text{ oder } z_2^2 - z_3^2 - 2z_1 z_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (84\delta'')$$

Da einerseits jede der 72 reellen Geraden d 2 reelle und 2 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$, jede der 144 imaginären Geraden d erster Art und ebenso jede der 144 imaginären Geraden d zweiter Art 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$ enthält, andererseits jede der 288 imaginären Geraden r erster Art je einen reellen Punkt und 5 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$, und jede der 192 imaginären Geraden r zweiter Art 6 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$ enthält (vgl. § 4 unter 3)), so folgt, dass

durch jeden der 144 reellen Punkte $\mathfrak{d}_0$ je eine reelle Gerade d und 2 imaginäre Gerade r erster Art,

durch jeden der 144 imaginären Punkte $\mathfrak{d}_0$ je eine reelle Gerade d und 2 imaginäre Gerade r erster Art,

durch jeden der 576 imaginären Punkte $\mathfrak{d}_0$ je eine imaginäre Gerade d und 2 imaginäre Gerade r erster Art

und durch jeden der 576 imaginären Punkte $\mathfrak{d}_0$ je eine imaginäre Gerade d und 2 imaginäre Gerade r zweiter Art

hindurchgehen.

Es giebt also drei Gruppen von Haupttetraedern für die 4zähligen Collineationen:

a) 72 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen) 2 reelle und 2 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$ (Ebenen δ_0), 1 reelles Kantenpaar d, 2 imaginäre Kantenpaare r erster Art;

b) 144 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen) 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$ (Ebenen δ_0), 1 imaginäres Kantenpaar d erster Art, 2 imaginäre Kantenpaare r zweiter Art;

c) 144 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen) 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{d}_0$ (Ebenen δ_0), 1 imaginäres Kantenpaar d zweiter Art, 2 imaginäre Kantenpaare r zweiter Art.

Jedes Haupttetraeder gehört zu zwei Substitutionen S, S^3; die 144 zu a) gehörigen reellen Substitutionen entfallen bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten zu je 8.6 auf die Tetraeder $T_4 \,..\, T_6$; die 288 zu b) gehörigen imaginären Substitutionen zu je 8.6 auf die Tetraeder $T_7 \,..\, T_9$, zu je 8.3 auf $T_{10} \,..\, T_{15}$ und die 288 zu c) gehörigen imaginären Substitutionen zu 8.6 auf T_1, zu je 8.6 auf T_2, T_3 und zu je 8.3 auf $T_{10} \,..\, T_{15}$.

2) Die $8.90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente des Paares x_{i_1}, x_{i_2} entgegengesetztes Vorzeichen, die vier

anderen unter sich permutirten Elemente eine ungerade Zahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten achtzählige Collineationen und zwar auf eine Art uneigentliche (vgl. § 9 I B 3 b) und § 8 I unter 7)). Die Eckpunkte (Seitenflächen) des Haupttetraeders sind je ein Punktpaar $\mathfrak{e}$ (ein Ebenenpaar ε) und ein Punktpaar $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (ein Ebenenpaar $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$), die Kanten K_{12}, K_{34} sind ein Geradenpaar e, die beiden anderen Kantenpaare zwei Geradenpaare q (vgl. § 4 unter 5)). Die Coordinaten dieser Elemente und die Gleichungen des zugehörigen tetraedralen Complexes sind in § 8 I unter 7) (34γ) und (34δ) und unter 8) (35ε) für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} S = [-x_2\, x_3\, x_4\, x_1\, -x_6\, x_5] = [3\ 4\ 1\ 2]_6 & \\ S^3 = [-x_4\, x_1\, -x_2\, -x_3\, x_6\, -x_5] = [-2\ 4\ 1\ 3]_6 & S^2 = [-x_3\, x_4\, x_1\, -x_2\, -x_5\, -x_6] = [-4\ 2\ 3\ 1]_1 \\ S^5 = [x_2\, -x_3\, -x_4\, -x_1\, -x_6\, x_5] = [3\ -4\ -1\ 2]_6 & S^4 = [-x_1\, -x_2\, -x_3\, -x_4\, x_5\, x_6] = [1\ -2\ -3\ 4]_1 \\ S^7 = [x_4\, -x_1\, x_2\, x_3\, x_6\, -x_5] = [2\ 4\ 1\ -3]_6 & S^6 = [x_3\, -x_4\, -x_1\, x_2\, -x_5\, -x_6] = [4\ 2\ 3\ -1]_1 \end{array}\right\} \quad (84\varepsilon)$$

gegeben worden, in welchem S^2 und S^6 zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen (vgl. § 13 A 2)) mit dem Axenpaar $e = (56)$, S^4 eine geschaart-involutorische Collineation mit diesem Axenpaar darstellt, (wobei in der Bezeichnung Z_2, Z_3, Z_4 bez. durch Z_3, Z_4, Z_2 also K_{14}, K_{23} durch K_{12}, K_{34} zu ersetzen sind).

Dass in der That diese achtzählige Collineationen uneigentliche sind, folgt aus den Wurzeln für σ und τ, (64δ), sowie aus den auf das Haupttetraeder bezogenen Transformationsformeln (64α) und (64β) in § 9 I B 3 b). Zu den Flächen des Netzes (Gewebes) (vgl. (28λ') in § 8 I):

$$k\, Z_1^2 + l\, Z_2^2 + 2\, m\, Z_3\, Z_4 = 0,$$

welche auf die zweite Art in sich transformirt werden, gehören die beiden Fundamentalflächen $F_1^{(1)}$ und $F_4^{(1)}$ und die beiden Flächen $F^{(4)}$, deren Gleichungen in (84δ') und (84δ'') angegeben sind.

Jede der 18 reellen Geraden e enthält 4 reelle und zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$, 4 reelle und 8 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$, jede der 12 imaginären Geraden e enthält 6 imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$ und 12 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$. Andererseits enthält jede der 144 imaginären Geraden q erster Art einen imaginären Punkt $\mathfrak{e}$, einen reellen Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$, jede der 288 imaginären Geraden q erster Art einen reellen Punkt $\mathfrak{e}$, einen imaginären Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und jede der 288 imaginären Geraden q zweiter Art einen imaginären Punkt $\mathfrak{e}$ und einen imaginären Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$. Da Analoges für die Ebenen ε und $\iota_0^{(e)}$

gilt, so folgt, dass es drei Gruppen von Haupttetraedern für die 8zähligen Collineationen giebt:

a) 36 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen):

{ 2 reelle Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε)
{ 2 imaginäre „ $\mathfrak{i}_0^{(e)}$(„ $\iota_0^{(e)}$),

1 reelles Kantenpaar e, 4 imaginäre Kanten q erster Art (der ersten Gruppe);

b) 72 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen):

{ 2 imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε)
{ 2 relle „ $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ („ $\iota_0^{(e)}$),

1 reelles Kantenpaar e, 4 imaginäre Kanten q erster Art (der zweiten Gruppe);

c) 72 Haupttetraeder: Eckpunkte (Flächen):

{ 2 imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε)
{ 2 „ „ $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ („ $\iota_0^{(e)}$),

1 imaginäres Kantenpaar e, 4 imaginäre Kanten q zweiter Art.

Dabei gehen durch jeden Punkt $\mathfrak{e}$ 3 Gerade e und 12 Gerade q, durch jeden Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ 1 Gerade e und 2 Gerade q hindurch, so dass jeder Punkt $\mathfrak{e}$ 6mal, jeder Punkt $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ einmal, jede Gerade e 12mal und jede Gerade q einmal auftritt.

Jedes Haupttetraeder gehört zu vier Substitutionen S, S^3, S^5, S^7; die zu a) gehörenden 144 reellen und die zu b) und zu c) bezw. gehörenden 288 imaginären Substitutionen vertheilen sich bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten ganz in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie die vierzähligen Collineationen (vgl. A 1) am Ende dieses §).

B) Correlationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die 8 . 90 = 720 Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente x_{i_1}, x_{i_2} entgegengesetztes Vorzeichen, die vier anderen unter sich permutirten Elemente entweder positives oder eine gerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Axencorrelationen der zweiten Art (vgl. § 9 II A 3) Formeln (70)). Die beiden sich involutorisch entsprechenden Axen dieser Correlation sind je ein Geradenpaar d; die Mittelpunkte und Ebenen der beiden festbleibenden Strahlenbüschel sind

das Punktpaar $\mathfrak{e}$ der einen und das Ebenenpaar ε der anderen Axe. Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Complexe, der in sich auf die zweite Art transformirten Flächen 2ten Grades folgen aus den Formeln (70); von je 4 zusammengehörigen Substitutionen mit demselben Axenpaar entsprechen sich je zwei als S und S^3, während S^2 für beide die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar d darstellt. Z. B. (vgl. (84α)):

Mittelpunkte: Ebenen:
der Strahlbüschel

$$\left.\begin{array}{lll} S = [-x_2\, -x_3\, x_4\, x_1\, x_6\, -x_5] = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_6 = [\underline{1\ 2\ 3\ 4}]_6 & \mathfrak{e}_2^{(1)} \ldots 0\ 1\ 0\ 0 & \varepsilon_3^{(1)} \ldots 0\ 0\ 1\ 0 \\ S^3 = [x_4\, -x_1\, -x_2\, x_3\, -x_6\, x_5] = [\overline{4\ 2\ -3\ 1}]_6 = [\underline{4\ 2\ -3\ 1}]_6 & \mathfrak{e}_2^{(6)} \ldots 1\ 0\ 0\ 1 & \varepsilon_3^{(6)} \ldots 1\ 0\ 0\ -1 \\ S = [-x_2\, -x_3\, x_4\, x_1\, -x_6\, x_5] = [\overline{1\ -2\ -3\ 4}]_6 = [\underline{1\ -2\ -3\ 4}]_6 & \mathfrak{e}_3^{(1)} \ldots 0\ 0\ 1\ 0 & \varepsilon_2^{(1)} \ldots 0\ 1\ 0\ 0 \\ S^3 = [x_4\, -x_1\, -x_2\, x_3\, x_6\, -x_5] = [\overline{4\ -2\ 3\ 1}]_6 = [\underline{4\ -2\ 3\ 1}]_6 & \mathfrak{e}_3^{(6)} \ldots 1\ 0\ 0\ -1 & \varepsilon_2^{(6)} \ldots 1\ 0\ 0\ 1 \\ S^2 = [x_3\, -x_4\, x_1\, -x_2\, -x_5\, -x_6] = [4\ 2\ -3\ 1]_1 . & & \end{array}\right\} (84\zeta)$$

Die Axen sind die beiden Geraden:

$$d \ldots |\mathfrak{e}_2^{(1)}\ \mathfrak{e}_2^{(6)}| = |\varepsilon_2^{(1)}\ \varepsilon_2^{(6)}| \ldots 1\ -i\ 1\ i\ 0\ 0$$
$$d' \ldots |\mathfrak{e}_3^{(1)}\ \mathfrak{e}_3^{(6)}| = |\varepsilon_3^{(1)}\ \varepsilon_3^{(6)}| \ldots 1\ i\ 1\ -i\ 0\ 0;$$

die beiden in sich transformirten linearen Complexe $C_{(4)}$ sind:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0;$$

zu den in sich auf die 2te Art transformirten Flächen gehören $F_1^{(1)}$ und $F_4^{(1)}$ und die beiden Flächen $F^{(4)}$, deren Gleichungen in (84δ') und (84δ'') unter A 1) dieses § angegeben wurden.

Die 720 Substitutionen zerfallen gemäss der Beschaffenheit der Axen d in drei Gruppen:

		Axen:	Mittelpunkte (Ebenen) der Strahlbüschel
a) $4 . 36 = 144$	reelle Substitutionen:	Ein reelles Geradenpaar d,	Zwei reelle Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε),
b) $4 . 72 = 288$	imaginäre „ :	Ein imaginäres „ d der ersten Art,	Ein reeller, ein imaginärer Punkt $\mathfrak{e}$ (Eine reelle, eine imaginäre Ebene ε),
c) $4 . 72 = 288$	„ „ :	Ein imaginäres Geradenpaar d der zweiten Art,	Zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε).

Bei der Darstellung dieser Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten vertheilen sich die Substitutionen dieser drei Gruppen ganz in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie die unter A 1) betrachteten, welche vierzählige Collineationen bedeuteten.

2) Die $8 . 90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente x_{i_1}, x_{i_2} gleiches, die vier anderen unter sich permutirten Elemente

eine ungerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten achtzählige Correlationen (vgl. § 9 II B unter 2b)) und § 8 III unter 4)). Die Elemente eines Haupttetraeders sind im Wesentlichen dieselben, wie für die unter A 2) dieses § betrachteten 8zähligen Collineationen, und in § 7 10) unter (26β), (26γ), ebenso wie die Gleichungen der beiden in sich transformirten Flächen G_1, G_2 nämlich zweier zusammengehörigen Flächen $F^{(10)''}$ unter (26$\delta_1''-\vartheta_1''$) und (26$\delta_2''-\vartheta_2''$) für das Beispiel (vgl. (84ε)):

$$\left.\begin{array}{llll} S\ = [x_2\, x_3\, -x_4\, x_1\, x_6\, x_5] = [\overline{3\ 4\ 1\ 2}]_6 = [\underline{3\ 4\ 1\ 2}]_6 & & \\ S^3 = [-x_4\, -x_1\, -x_2\, x_3\, x_6\, x_5] = [\overline{-2\ 4\ 1\ 3}]_6 = [\underline{-2\ 4\ 1\ 3}]_6 & S^2 = [x_3\, -x_4\, -x_1\, x_2\, x_5\, x_6] = [-4\ 2\ 3\ 1]_1 \\ S^5 = [-x_2\, -x_3\, x_4\, -x_1\, x_6\, x_5] = [\overline{3\ -4\ -1\ 2}]_6 = [\underline{3\ -4\ -1\ 2}]_6 & S^4 = [-x_1\, -x_2\, -x_3\, -x_4\, x_5\, x_6] = [1\ -2\ -3\ 4]_1 \\ S^7 = [x_4\, x_1\, x_2\, -x_3\, x_6\, x_5] = [\overline{2\ 4\ 1\ -3}]_6 = [\underline{2\ 4\ 1\ -3}]_6 & S^6 = [-x_3\, x_4\, x_1\, -x_2\, x_5\, x_6] = [4\ 2\ 3\ -1]_1 \end{array}\right\} \quad (84\eta)$$

angegeben worden. Auch hier bedeuten, wie in (84ε) S^2 und S^6 zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar $e = (5, 6)$, S^4 die geschaart-involutorische Collineation mit diesem Axenpaar.

Die Gleichungen der beiden Complexe Ω_1'' und Ω_2'' sind unter (52γ'), (52γ''), diejenigen der beiden festbleibenden Gewinde $\left\{\begin{array}{l} x_5 - x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{array}\right\}$ unter (52β'), (52β''), ebenso die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen, welche bez. zu S und S^7, zu S^3 und S^5 gehören, unter (52ε'), (52ε'') und die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen zweiten Grades unter (48ϱ') aufgestellt worden; der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen zerfällt in die beiden linearen Complexe (vgl. § 8 III (48μ)):

$$\left.\begin{array}{l} x_5 - i\, x_6 = 0 \\ x_5 + i\, x_6 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84\vartheta)$$

Die 720 achtzähligen Correlationen zerfallen ganz entsprechend, wie die achtzähligen Collineationen (A 2) dieses §), in drei Gruppen von je 144 reellen und zweimal 288 imaginären, ebenso die zugehörigen Haupttetraeder in die drei dort angegebenen Gruppen. Auch die Vertheilung der entsprechenden Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten auf die Fundamentaltetraeder ist vollständig dieselbe, wie für die unter B 1) betrachteten vierzähligen Axencorrelationen.

§ 16.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 144 Permutationen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die $16 \,.\, 144 = 2304$ Substitutionen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5})$, bei welchen das nicht permutirte Element x_{i_6} positives, die fünf anderen unter sich permutirten Elemente entweder sämmtlich positives oder eine gerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten fünfzählige Collineationen (vgl. § 9 I B unter 5) und § 8 I unter 12)). Die Coordinaten der Eckpunkte $\mathfrak{m}$ (Seitenflächen μ), der Kantenpaare, nämlich eines Geradenpaares m und zweier Geradenpaare n des Haupttetraeders sind unter (40γ), (40δ), ebenso die Gleichungen der beiden zugehörigen tetraedralen Complexe unter (40ε'), (40ε'') für das Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} S\;\; &= [x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_2] = [3 \;\; 1 \; -2_i \;\; 4_i]_3 = [\overline{3 \;\; 1 \;\; 2_i \; -4_i}]_3 \\ S^2 &= [x_1\, x_4\, x_5\, x_6\, x_2\, x_3] = [4 \;\; 1_i \;\; 3_i \; -2]_8 = [\overline{-4 \;\; 1_i \;\; 3_i \;\; 2}]_8 \\ S^3 &= [x_1\, x_5\, x_6\, x_2\, x_3\, x_4] = [3 \; -4_i \; -2_i \;\; 1]_6 = [\overline{3 \;\; 4_i \;\; 2_i \;\; 1}]_6 \\ S^4 &= [x_1\, x_6\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5] = [3 \; -2 \;\; 4 \; -1]_{13} = [\overline{3 \; -2 \;\; 4 \; -1}]_{13} \end{aligned}\right\} \quad (85\alpha)$$

angegeben worden.

Dass diese fünfzähligen Collineationen auf eine Art eigentliche sind, folgt aus den Wurzelwerthen für σ und τ (66δ) und aus den auf das Haupttetraeder bezogenen Transformationsformeln (66α), (66β) in § 9 I B unt. 5)).

Das in sich transformirte Büschel von Gewinden (vgl. § 8 I (28ζ')), dessen Basis ein Strahlennetz mit den beiden Leitgeraden m ist, hat die Gleichung: $x_1 + \mu' (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0$; (85$\beta$)

zu den Flächen des Flächenbüschels $Z_1\, Z_4 + \lambda'\, Z_2\, Z_3 = 0$ (vgl. (28λ')), dessen Vierseit durch die 4 Kanten n des Haupttetraeders gebildet wird, gehören die beiden Flächen $F^{(11)}$, deren Gleichungen in § 7 11) unter (27β_1, γ_1) und (27β_2, γ_2) aufgestellt sind.

Es giebt im Ganzen für diese 2304, zu je vier zusammengehörigen Collineationen 576 Haupttetraeder; jede der 192 Geraden m (vgl. § 4 unt. 8b)), welche 12 Punkte $\mathfrak{m}$ als Ikosaederpunkte (Dodekaeder-Ebenen μ) trägt, tritt 6mal, jede der 2304 Geraden n einmal auf. Alle Elemente der Haupttetraeder sind imaginär; die durchweg imaginären 2304 Substitutionen vertheilen sich

bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten auf die Fundamentaltetraeder T_i in der Weise, dass auf die Tetraeder T_2, T_3 und $T_{10} \ldots T_{15}$ je $16 . 9$, auf die Tetraeder $T_4 \ldots T_6$ und $T_7 \ldots T_9$ je $16 . 12$ entfallen.

B) Correlationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die $16 . 144 = 2304$ Substitutionen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5})$, bei welchen das nicht permutirte Element x_{i_6} negatives, die fünf anderen unter sich permutirten Elemente entweder sämmtlich positives oder eine gerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten zehnzählige Correlationen (vgl. § 9 II B unter 4) und § 8 III unter 6)). Die Potenzen S, S^9; S^3, S^7 einer solchen Substitution stellen die zu je zweien zusammengehörigen zehnzähligen Correlationen, die 4 geraden Potenzen S^2, S^8; S^4, S^6 die zu je zweien zusammengehörigen fünfzähligen Collineationen (vgl. unter A) dieses §), deren Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die ersteren dar, endlich bedeutet S^5 eine Nullcorrelation mit dem linearen Complex $x_{i_6} = 0$. Die Coordinaten der Elemente eines Haupttetraeders sind unter (40γ), (40δ), die Gleichungen der beiden in sich transformirten Flächen G_1, G_2, nämlich zweier Flächen $F^{(11)}$ sind in § 7 11) unter (27β_1, γ_1) und (27β_2, γ_2) für das Beispiel angegeben:

$$\left.\begin{aligned} S &= [-x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_2] = [\overline{-1\ \ 3\ \ 4_i\ \ 2_i}]_3 = [\overline{-1\ \ 3\ {-4_i}\ {-2_i}}]_3 \\ S^3 &= [-x_1\, x_5\, x_6\, x_2\, x_3\, x_4] = [\overline{-4_i\ \ 3\ {-1}\ \ 2_i}]_6 = [\overline{4_i\ \ 3\ {-1}\ {-2_i}}]_6 \\ S^7 &= [-x_1\, x_4\, x_5\, x_6\, x_2\, x_3] = [\overline{-3\ \ 2_i\ \ 4_i\ \ 1}]_8 = [\overline{3\ \ 2_i\ \ 4_i\ {-1}}]_8 \\ S^9 &= [-x_1\, x_6\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5] = [\overline{1\ \ 4\ \ 2\ \ 3}]_{13} = [\overline{1\ \ 4\ \ 2\ \ 3}]_{13}; \end{aligned}\right\} \quad (85\gamma)$$

S^2, S^4, S^6, S^8 sind bez. mit S^2, S^4, S, S^3 in (85α) identisch;

$$S^5 = [-x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] = [\overline{2\ {-1}\ \ 4\ {-3}}]_1 = [\overline{2\ {-1}\ \ 4\ {-3}}]_1$$

bedeutet die Nullcorrelation mit dem linearen Complexe $x_1 = 0$.

Die Gleichungen der beiden Complexe Ω_1'' und Ω_2'' sind unter (54ε) und (54ζ), diejenigen der beiden festbleibenden Gewinde unter (54η), ebenso die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen, welche bezw. zu S und S^9, zu S^3 und S^7 gehören unter (54ϑ', ϑ''), die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen 2ten Grades unter (48ϱ) aufgestellt worden; endlich stimmen die Gleichungen der beiden tetraedralen Complexe der Wechselstrahlen mit denjenigen für die 5 zähligen Collineationen (vgl. (40β) und (40ε)) überein.

In Beziehung auf die Elemente der 576 Haupttetraeder, auf die Vertheilung der durchweg imaginären 2304 Substitutionen bei deren Darstellung in tetraedrischen Coordinaten auf die Fundamentaltetraeder T_i gilt genau das am Ende von A) dieses § gesagte.

II. Substitutionen, welche den negativen Permutationen der x_i entsprechen.

§ 17.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 15 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 \cdot 15 = 120$ derartigen Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente x_{i_1}, x_{i_2} gleiches, die übrigen vier nicht permutirten Elemente eine ungerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten geschaart-involutorische Collineationen, deren Axenpaar je eins der 240 Geradenpaare d_0 ist (vgl. § 9 1 A 2), § 3 unter (11) und § 6). Z. B. den 8 aus $(x_4\, x_6)$ hervorgehenden Substitutionen entsprechen bez. folgende geschaart-involutorische Collineationen mit Axenpaaren d_0:

			x_i-Coordinaten:	p_{ik}-Coordinaten:	
$[-x_1\, x_2\, x_3\, x_6\, x_5\, x_4]$	$= [2\ -1\ 4\ 3]_4$	Axenpaar d_0:	$\pm i\sqrt{2}\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1$	$\sqrt{2}\ -1\ 1;\ \sqrt{2}\ 1\ -1$ und $\sqrt{2}\ 1\ -1;\ \sqrt{2}\ 1\ -1$ (recipr. Polare)	(86α)
$[x_1\, -x_2\, -x_3\, x_6\, -x_5\, x_4]$	$= [1\ 2\ 3\ -4]_4$	„ „	$\pm i\sqrt{2}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1$	$\sqrt{2}\ 1\ 1;\ \sqrt{2}\ -1\ -1$ und $\sqrt{2}\ -1\ -1;\ \sqrt{2}\ 1\ 1$	(86α)
$[x_1\, x_2\, -x_3\, x_6\, x_5\, x_4]$	$= [3\ 4\ 1\ -2]_4$	„ „	$0\ 0\ \pm i\sqrt{2}\ 1\ 0\ -1$	$0\ \sqrt{2}+1\ -1;\ 0\ \sqrt{2}-1\ 1$ u. rec. Pol.	(86α)
$[-x_1\, -x_2\, x_3\, x_6\, -x_5\, x_4]$	$= [4\ -3\ 2\ 1]_4$	„ „	$0\ 0\ \pm i\sqrt{2}\ 1\ 0\ 1$	$0\ \sqrt{2}+1\ 1;\ 0\ \sqrt{2}-1\ -1$ „ „	(86α)
$[x_1\, x_2\, x_3\, x_6\, -x_5\, x_4]$	$= [-4\ 3\ 2\ 1]_4$	„ „	$0\ 0\ 0\ 1\ \pm i\sqrt{2}\ -1$	$0\ 1\ \sqrt{2}-1;\ 0\ -1\ \sqrt{2}+1$ „ „	(86α)
$[-x_1\, -x_2\, -x_3\, x_6\, x_5\, x_4]$	$= [3\ 4\ -1\ 2]_4$	„ „	$0\ 0\ 0\ 1\ \pm i\sqrt{2}\ 1$	$0\ 1\ \sqrt{2}+1;\ 0\ -1\ \sqrt{2}-1$ „ „	(86α)
$[x_1\, -x_2\, x_3\, x_6\, x_5\, x_4]$	$= [-2\ 1\ 4\ 3]_4$	„ „	$0\ \pm i\sqrt{2}\ 0\ 1\ 0\ -1$	$i\sqrt{2}\ 1\ -1;\ -i\sqrt{2}\ -1\ 1$ und $-i\sqrt{2}\ 1\ -1;\ i\sqrt{2}\ -1\ 1$	(86α')
$[-x_1\, x_2\, -x_3\, x_6\, -x_5\, x_4]$	$= [1\ 2\ -3\ 4]_4$	„ „	$0\ \pm i\sqrt{2}\ 0\ 1\ 0\ 1$	$i\sqrt{2}\ 1\ 1;\ -i\sqrt{2}\ -1\ -1$ und $-i\sqrt{2}\ 1\ 1;\ i\sqrt{2}\ -1\ -1.$	(86α')

Diese 120 geschaart-involutorischen Collineationen zerfallen in drei Gruppen von a) 36, deren Axenpaare die 36 reellen Geradenpaare d_0 sind, von b) 12, deren Axenpaare die 12 imaginären der Fläche $F_1^{(1)}$, und in c)

72, deren Axenpaare die 72 imaginären den 9 reellen Flächen $F_2^{(1)} \ldots F_{10}^{(1)}$ als Erzeugende angehörigen Geradenpaare d_0 sind. Bei jeder dieser Collineationen gehen 4 der Fundamentalcomplexe (im Beispiel $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$) und 4 der Fundamentalflächen (im Beispiel $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}$, $F_6^{(1)}$, $F_{10}^{(1)}$) in sich über.

Von den in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen entfallen die 36 reellen der Gruppe a) zu je 12 auf die Tetraeder $T_4 \ldots T_6$, die 12 reellen der Gruppe b) zu je 4 auf $T_4 \ldots T_6$ und die 72 imaginären der Gruppe c) zu 24 auf T_1 und zu je 16 auf $T_7 \ldots T_9$.

2) Die $2 \cdot 15 = 30$ Substitutionen, bei welchen die beiden permutirten Elemente x_{i_1}, x_{i_2} entgegengesetztes, die vier anderen nicht permutirten Elemente sämmtlich gleiches Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige geschaarte Collineationen (vgl. § 9 I A 4)), deren Axenpaar je ein Geradenpaar $e = (i, k)$ ist. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S \;\, = [x_1\, x_2\, x_3\, x_6\, x_5 - x_4] = [3\; -4\; 1\; 2]_4 \\ S^3 = [x_1\, x_2\, x_3 - x_6\, x_5\, x_4] = [4\; 3\; 2\; -1]_4 \end{array}\right\}, \text{ Axenpaar: } 0\;0\;0\;1\;0 \pm i \;.\,.\; (46) \\ \qquad S^2 = [x_1\, x_2\, x_3 - x_4\, x_5 - x_6] = [2\; -1\; -4\; 3]_1 , \end{array}\right\} \quad (86\beta)$$

wobei S^2 die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar (46) darstellt.

Die Complexe der Gebüsche (vgl. (58γ))

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + a_5\, x_5 = 0 \,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86\gamma)$$

sowie die beiden speciellen Complexe, deren Leitgerade je eine der beiden Geraden (46) ist, werden in sich transformirt. Zu den ∞^3 Flächen zweiten Grades, welche durch das Axenpaar hindurchgehen und durch die Collineation in sich transformirt werden, gehören die 4 Fundamentalflächen $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}$, $F_6^{(1)}$, $F_{10}^{(1)}$, ferner 12 der 90 Flächen $F^{(3)}$, 8 der 120 Flächen $F^{(5)}$ (vgl. § 7 unter 3), 5)).

Die 30 Substitutionen zerfallen in zwei Gruppen von a) $2 \cdot 6 = 12$ und b) $2 \cdot 9 = 18$; die Axenpaare für die Gruppe a) sind die 6 imaginären, für die Gruppe b) die 9 reellen Axenpaare $e = (i, k)$. Bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten entfallen die 12 reellen Substitutionen a) zu je $2 \cdot 2$ auf die Tetraeder $T_4 \ldots T_6$, die 18 imaginären Substitutionen b) zu $2 \cdot 3$ auf T_1 und zu je $2 \cdot 2$ auf die Tetraeder $T_7 \ldots T_9$.

3) Die $6 \cdot 15 = 90$ Substitutionen $(x_{i_1}\, x_{i_2})$ endlich, bei welchen die

beiden permutirten Elemente entgegengesetztes, die vier anderen Elemente zwei negative Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Collineationen (vgl. § 9 I B 1)) und zwar solche, deren Haupttetraeder für je zwei zusammengehörige Collineationen eins der 15 Fundamentaltetraeder T_i ist (vgl. § 8 I 1)). Z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} S\ = [-x_1\ x_2\ x_3\ x_6\ -x_5\ -x_4] = [-1\ 2\ 3\ 4]_4 \\ S^3 = [-x_1\ x_2\ x_3\ -x_6\ -x_5\ x_4] = [2\ 1\ -4\ 3]_4 \end{array}\right\} T_{15} \text{ mit Kantenpaaren: } (46);\ (15),\ (23) \\ \left\{\begin{array}{l} S\ = [-x_1\ x_2\ -x_3\ -x_6\ x_5\ x_4] = [1\ -2\ 3\ 4]_4 \\ S^3 = [-x_1\ x_2\ -x_3\ x_6\ -x_5\ x_4] = [2\ 1\ 4\ -3]_4 \end{array}\right\} T_{11} \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad (46);\ (13),\ (25) \\ \left\{\begin{array}{l} S\ = [x_1\ x_2\ -x_3\ -x_6\ -x_5\ x_4] = [-3\ 4\ 1\ 2]_4 \\ S^3 = [x_1\ x_2\ -x_3\ x_6\ -x_5\ -x_4] = [4\ 3\ -2\ 1]_4 \end{array}\right\} T_7 \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad (46);\ (12),\ (35) \\ \qquad S^2 = [x_1\ x_2\ x_3\ -x_4\ x_5\ -x_6] = [2\ -1\ -4\ 3]_1, \end{array}\right\} \quad (86\delta)$$

wobei S^2 wiederum die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar (46) bedeutet. Der zu den beiden ersten Substitutionen gehörige tetraedrale Complex (vgl. (29γ)) hat die Gleichung:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_5^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86\varepsilon).$$

Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (vgl. § 8 C I (28ζ′), (28ζ″)) werden:

$$x_2 + \mu' x_3 = 0 \text{ und } x_1 + \mu'' x_5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86\zeta).$$

Zu den Flächen des ersten in sich transformirten Flächenbüschels (28η′) $Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 = 0$, dessen Vierseit aus den Geradenpaaren (46) und (15) besteht, gehören die beiden Fundamentalflächen $F^{(1)}_1$ und $F^{(1)}_{10}$ und die beiden Flächen $F^{(3)}$:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(1)}_1 - i F^{(1)}_{10} \equiv 2\,x_4^2 + 2\,x_6^2 + (x_2 - x_3)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2\,i\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0 \\ F^{(1)}_1 + i F^{(1)}_{10} \equiv 2\,x_4^2 + 2\,x_6^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 2\,i\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0; \end{array}\right\} (86\eta')$$

entsprechend gehören zu den Flächen des zweiten in sich transformirten Flächenbüschels (28η″) $Z_1 Z_3 + \lambda'' Z_4 Z_2 = 0$, dessen Vierseit aus den Geradenpaaren (46) und (23) besteht, die beiden Fundamentalflächen $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_6$ und die beiden Flächen $F^{(3)}$:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(1)}_2 + F^{(1)}_6 \equiv 2\,x_4^2 + 2\,x_6^2 + (x_1 - x_5)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 2\,(z_1 z_3 - z_4 z_2) = 0 \\ F^{(1)}_2 - F^{(1)}_6 \equiv 2\,x_4^2 + 2\,x_6^2 + (x_1 + x_5)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2\,(z_1 z_3 - z_4 z_2) = 0. \end{array}\right\} (86\eta'')$$

Zu den in sich auf die zweite Art transformirten Flächen der beiden Netze (Gewebe) (vgl. (28λ′) (28λ″)) gehören je vier der 60 Flächen $F^{(2)}$ (§ 7, 2)), nämlich zu dem ersten Netze (28λ′) die vier Flächen:

$$\left.\begin{aligned}(F_2^{(1)} - F_5^{(1)}) \mp i(F_9 + F_{10}) \equiv z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2z_1 z_2 \mp 2iz_1 z_3 \mp 2iz_1 z_4 \\ + 2z_3 z_4 \mp 2iz_4 z_2 \mp 2iz_2 z_3 \end{aligned}\right\} = 0 \qquad \left.\begin{aligned}(F_2^{(1)} + F_5^{(1)}) \mp i(F_9 - F_{10}) \equiv z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 2z_1 z_2 \mp 2iz_1 z_3 \mp 2iz_1 z_4 \\ - 2z_3 z_4 \mp 2iz_4 z_2 \mp 2iz_2 z_3 \end{aligned}\right\} = 0, \quad (86\vartheta')$$

welche das Fundamentaltetraeder T_{13} als Polartetraeder gemein haben, zu dem zweiten Netze (28λ'') die vier Flächen:

$$\left.\begin{aligned}(F_3^{(1)} - F_4^{(1)}) \mp i(F_5 + F_8) \equiv z_1^2 - z_2^2 \mp 2iz_3 z_4 = 0 \\ (F_3^{(1)} + F_4^{(1)}) \mp i(F_5 - F_8) \equiv z_3^2 - z_4^2 \mp 2iz_1 z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (86\vartheta'')$$

welche das Polartetraeder T_7 gemein haben.

Die vier Flächen $F^{(2)}$, welche das Tetraeder T_{15} als Polartetraeder gemein haben, nämlich:

$$(F_4^{(1)} - F_7^{(1)}) \mp i(F_8 + F_9) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86\iota')$$

$$(F_4^{(1)} + F_7^{(1)}) \mp i(F_8 - F_9) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86\iota'')$$

gehören zu den beiden Gebüschen sich involutorisch entsprechender Flächen (28μ') und (28μ'').

Die 90 zu je zweien zusammengehörigen vierzähligen Collineationen zerfallen in drei Gruppen: a) 36 Collineationen, für welche die 9 imaginären Fundamentaltetraeder $T_7 .. T_{15}$ die Haupttetraeder sind; jedes dieser Tetraeder tritt zweimal auf, wobei das Kantenpaar K_{12}, K_{34} durch ein reelles Geradenpaar e gebildet wird; b) 18 Collineationen, für welche zu je zweien eins der 9 Tetraeder $T_7 .. T_{15}$ Haupttetraeder u. das Kantenpaar K_{12}, K_{34} ein imaginäres Geradenpaar e ist; c) 36 Collineationen, für welche die 6 reellen Fundamentaltetraeder $T_1 .. T_6$ die Haupttetraeder sind; jedes dieser Tetraeder tritt dreimal auf. Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen die 36 reellen Substitutionen der Gruppe a) zu je $2 . 6$ auf die Tetraeder $T_4 .. T_6$, von den 18 imaginären Substitutionen der Gruppe b) $2 . 3$ auf T_1 und je $2 . 2$ auf $T_7 .. T_9$, von den 36 imaginären Substitutionen der Gruppe c) endlich $2 . 6$ auf T_1 und je $2 . 4$ auf $T_7 .. T_9$.

B) Correlationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 . 15 = 120$ Substitutionen $(x_{i_1}\, x_{i_2})$, bei welchen die beiden permutirten Elemente x_{i_1}, x_{i_2} entgegengesetztes, die übrigen vier nicht permutirten Elemente eine ungerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Correlationen mit zusammenfallender

Kernfläche (vgl. § 9 II A) unter 4a)). Die Gleichungen des Complexes Ω', der Kernfläche $F^{(1)}_{10}$, des festbleibenden Netzes von Complexen und des linearen Complexes, der beiden festbleibenden speciellen linearen Complexe und ihrer Leitgeraden (46) sind in den Formeln (42α)..(42γ) (§ 8 II 1)) für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} S\ = [x_1\, x_2\, -x_3\, x_6\, x_5\, -x_4] = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_4 = [\underline{-1\ 2\ 3\ 4}]_4 \\ S^3 = [x_1\, x_2\, -x_3\, -x_6\, x_5\, x_4] = \lfloor \overline{2\ 1\ -4\ 3}]_4 = [\underline{2\ 1\ -4\ 3}]_4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} S^2 = [x_1\, x_2\, x_3\, -x_4\, x_5\, -x_6] \\ \quad = [2\ -1\ -4\ 3]_1 \end{array}\right\} \quad (86\varkappa)$$

angegeben worden; S^2 stellt die geschaart involutorische Collineation mit dem Axenpaar (46) dar. Die Flächen aller Büschel, deren Vierseit durch dies Geradenpaar (46) und je zwei Gerade des anderen Systems der Kernfläche $F^{(1)}_{10}$ gebildet wird, sind involutorisch zugeordnet, so dass ausser $F^{(1)}_{10}$ noch eine Fläche jedes Büschels in sich transformirt wird z. B.:

für das Büschel durch (46) und das Paar (15) die Kernfläche $F^{(1)}_{10}$ u. $F^{(1)}_{1}$,
” ” ” ” ” ” (25) ” ” ” ” $F^{(1)}_{2}$,
” ” ” ” ” ” (12) ” ” ” ” $F^{(1)}_{6}$,
” ” ” ” ” ” $d_0 : 1 \pm i\sqrt{2}\ 0\ 0\ 1\ 0$ ” ” ” $F^{(1)}_{2} + F^{(1)}_{6}$ } vgl. (86η'')
” ” ” ” ” ” $d_0 : 1 \pm i\sqrt{2}\ 0\ 0\ -1\ 0$ ” ” ” $F^{(1)}_{2} - F^{(1)}_{6}$ }

u. s. w. Diese 120 zu je zweien zusammengehörigen Correlationen zerfallen in drei Gruppen von a) $2 \,.\, 18 = 36$, für welche die 9 reellen Flächen $F^{(1)}_{2} .. F^{(1)}_{10}$, deren jede zweimal auftritt, die Kernflächen, die 6 imaginären Geradenpaare e, deren jedes dreimal auftritt, die Leitgeraden sind, von b) $2 \,.\, 6 = 12$, deren Kernfläche die imaginäre Fläche $F^{(1)}_{1}$, deren Leitgerade eins der 6 imaginären Geradenpaare e ist und von c) $2 \,.\, 36 = 72$, für welche die 9 reellen Flächen $F^{(1)}_{2} .. F^{(1)}_{10}$, deren jede viermal auftritt, die Kernflächen, die 9 reellen Geradenpaare e die Leitgeraden sind. Die in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen dieser drei Gruppen vertheilen sich ganz in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie die unter A 1) dieses § betrachteten Substitutionen, welche geschaart-involutorische Collineationen bedeuteten.

2) Die $2 \,.\, 15 = 30$ Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente gleiches, die vier nicht vertauschten Elemente sämmtlich gleiches Vorzeichen haben, bedeuten Nullcorrelationen (vgl. § 9 II A unter 2)), deren zugehörige lineare Complexe je einer der 30 Complexe $C_{(2)} \cdot\cdot\, x_{i_1} \pm x_{i_2} = 0$ ist (vgl. § 6 (14β)).

Zugehöriger linearer Complex:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Z. B. } S=[x_1\,x_2\,x_3\,x_6\,x_5\,x_4] = [\overline{1\;2\;-3\;4}]_4 = [\underline{1\;2\;-3\;4}]_4 \;\ldots\; & x_4-x_6=0 \\ S=[x_1\,x_2\,x_3\,-x_6\,x_5\,-x_4] = [\overline{-2\;1\;4\;3}]_4 = [\underline{-2\;1\;4\;3}]_4 \;\ldots\; & x_4+x_6=0. \end{array}\right\} \quad (86\lambda)$$

Durch diese beiden Correlationen werden bez. alle Complexe der beiden „Gewebe“:

$$a_1\,x_1+a_2\,x_2+a_3\,x_3+a_5\,x_5+a_4\,(x_4\pm x_6)=0,$$

zu welchen bez. der Complex: $x_4-x_6=0$ und x_4+x_6 in Involution ist, in sich transformirt. Zu den durch eine solche Correlation in sich transformirten Flächen 2ten Grades gehören 4 Flächen $F^{(1)}$, für das Beispiel $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_6$, $F^{(1)}_{10}$, welche durch das Geradenpaar (46), dessen Gerade in Bezug auf das Nullsystem conjugirte Polaren sind, hindurchgehen, ferner 3 . 4 Flächen $F^{(2)}$, welche zu je 4 eins der 3 Tetraeder T_7, T_{11}, T_{15} mit den in (86δ) angegebenen Kantenpaaren gemein haben; weiterhin 2 . 6+2 . 3 = 18 Flächen $F^{(3)}$, von denen die 6 ersten Paare je ein Vierseit mit den Kantenpaaren (46), (12); (46), (35); (46), (13); (46), (25); (46), (15); (46), (23), die 3 anderen Paare je ein Vierseit mit den Kantenpaaren (Complexgeraden) (12), (35); (13), (25); (15), (23) gemein haben; ferner 24 Flächen $F^{(4)}$ (§ 7, 4)), z. B.:

$$x_1^2+(x_2\pm x_3)^2+(x_4\pm x_6)^2=0, \qquad \text{u. s. f.}$$

Die 30 Substitutionen zerfallen in 2 Gruppen von a) 2 . 6 = 12 und b) 2 . 9 = 18; für die Nullsysteme der Gruppe a) sind je ein imaginäres, für diejenigen der Gruppe b) je ein reelles Geradenpaar e conjugirte Polare. Die Vertheilung der in Tetraedercoordinaten dargestellten Substitutionen der beiden Gruppen auf die Fundamentaltetraeder T_i ist genau dieselbe wie für die unter A 2) betrachteten Substitutionen, welche vierzählige geschaarte Collineationen bedeuteten.

3) Die 6 . 15 = 90 Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente gleiches, die vier nicht vertauschten Elemente zwei negative Vorzeichen haben, bedeuten Polarcorrelationen (vgl. § 9 II A) unter 1)), deren Basisfläche je eine der 90 Flächen $F^{(3)}$ (§ 7 3)) ist. Z. B.:

Basisfläche der Polarcorrelation:

$$\left.\begin{array}{ll} S=[x_1\,x_2\,-x_3\,x_6\,-x_5\,x_4] = [\overline{2\;-1\;4\;3}]_4 = [\underline{2\;-1\;4\;3}]_4 \;\ldots\; & F_9+F_7 \equiv 2\,x_1^2+2\,x_2^2+(x_4+x_6)^2=0 \\ S=[-x_1\,-x_2\,x_3\,x_6\,x_5\,x_4] = [\overline{1\;2\;3\;-4}]_4 = [\underline{1\;2\;3\;-4}]_4 \;\ldots\; & F_9-F_7 \equiv 2\,x_1^2+2\,x_2^2+(x_4-x_6)^2=0. \end{array}\right\} \quad (86\mu)$$

Die beiden Complex-Netze, welche durch eine solche Polarcorrelation in sich übergehen, sind für das erste Beispiel:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 (x_4 + x_6) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (86\nu') \\ a_3 x_3 + a_5 x_5 + a_4 (x_4 - x_6) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (86\nu''). \end{cases}$$

Zu den in sich auf die erste Art transformirten Flächen gehören die 4 Flächen $F^{(1)}$: $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_6$, $F^{(1)}_{10}$, ferner die 4 Flächen $F^{(2)}$, welche das Tetraeder T_7 als Polartetraeder gemein haben, die $2 . 3 + 2 . 2$ Flächen $F^{(3)}$, von denen die drei ersten Paare je ein Vierseit mit den Kantenpaaren (12), (35); (13), (25); (15), (23), die beiden anderen Paare je ein Vierseit mit den Kantenpaaren (12), (46); (35), (46) gemein haben; fernerhin 16 Flächen $F^{(4)}$, z. B. $2 x_1^2 + (x_3 \pm x_5)^2 + (x_4 \pm x_6)^2 = 0$ u. s. f. Zu den auf die zweite Art in sich transformirten Flächen gehören die 8 Flächen $F^{(4)}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2 x_4^2 + (x_1 \pm x_3)^2 + (x_2 \pm x_5)^2 \equiv 2 x_6^2 + (x_1 \mp x_3)^2 + (x_2 \mp x_5)^2 = 0 \\ 2 x_4^2 + (x_1 \pm x_5)^2 + (x_2 \pm x_3)^2 \equiv 2 x_6^2 + (x_1 \mp x_5)^2 + (x_2 \mp x_3)^2 = 0 \end{array}\right\} (86\xi) \text{ u. s. f.}$$

Die 90 Polarcorrelationen zerfallen in drei Gruppen von: a) 36 Polarcorrelationen mit den 36 reellen Basisflächen $F^{(3)}$, welche zu je zweien durch ein je zweien Flächen $F^{(1)}_2 \ldots F^{(1)}_{10}$ gemeinsames Vierseit mit einem reellen und einem imaginären Geradenpaar e hindurchgehen, von b) 18 Correlationen mit den 18 imaginären Basisflächen $F^{(3)}$, welche durch ein je zweien Flächen $F^{(1)}_1$ und $F^{(1)}_2 \ldots F^{(1)}_{10}$ gemeinsames Vierseit mit zwei imaginären Geradenpaaren e, und von c) 36 Correlationen mit den 36 imaginären Basisflächen $F^{(3)}$, welche durch ein je zweien Flächen $F^{(1)}_2 \ldots F^{(1)}_{10}$ gemeinsames Vierseit mit zwei reellen Geradenpaaren e hindurchgehen. Die in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen dieser drei Gruppen vertheilen sich auf die Fundamentaltetraeder in derselben Weise, wie die unter A 3) betrachteten Substitutionen, welche vierzählige Collineationen bedeuteten.

§ 18.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 15 Permutationen $(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})(x_{i_5} x_{i_6})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $4 . 15 = 60$ derartigen Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_i jedes der drei Paare entgegengesetztes Vorzeichen haben, bedeuten centrisch-involutorische Collineationen (vgl. § 9 I A unter 5)), für welche die Centren je ein Eckpunkt, die Ebenen

die gegenüberliegende Seitenfläche eines der 15 Fundamentaltetraeder T_i sind. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{lll} & \text{Centrum:} & \text{Ebene:} \\ & \text{der Homologie} & \\ S = [-x_2\ x_1\ -x_4\ x_3\ -x_6\ x_5] = [-1\ 2\ 3\ 4]_1 & \ldots\ldots\ \mathfrak{e}_1 & \ldots\ldots\ \varepsilon_1 \\ S = [-x_2\ x_1\ x_4\ -x_3\ x_6\ -x_5] = [1\ -2\ 3\ 4]_1 & \ldots\ldots\ \mathfrak{e}_2 & \ldots\ldots\ \varepsilon_2 \\ S = [x_2\ -x_1\ -x_4\ x_3\ x_6\ -x_5] = [1\ 2\ -3\ 4]_1 & \ldots\ldots\ \mathfrak{e}_3 & \ldots\ldots\ \varepsilon_3 \\ S = [x_2\ -x_1\ x_4\ -x_3\ -x_6\ x_5] = [1\ 2\ 3\ -4]_1 & \ldots\ldots\ \mathfrak{e}_4 & \ldots\ldots\ \varepsilon_4. \end{array}\right\} \quad (87\alpha)$$

Zu den ∞^6 in sich auf die zweite Art transformirten Flächen gehören für das erste Beispiel die vier Flächen $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_3$, $F^{(1)}_4$, die vier Flächen $F^{(2)}$, welche das Tetraeder T_1 als Polartetraeder gemein haben, die $2.6 = 12$ $F^{(3)}$, deren Gleichungen sich aus denjenigen je zweier Flächen $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_3$, $F^{(1)}_4$ linear zusammensetzen, ferner 12 Flächen $F^{(4)}$ z. B.:

$$2x_1^2 + (x_3 \pm x_4)^2 + (x_5 \pm x_6)^2 \equiv 2x_2^2 + (x_3 \mp x_4)^2 + (x_5 \mp x_6)^2 = 0 \qquad \text{u. s. f.}$$

Die 60 Transformationen zerfallen in zwei Gruppen von a) 24, für welche die Centren und Ebenen der centrischen Collineation je ein Eckpunkt und je eine Seitenfläche der 6 reellen Fundamentaltetraeder $T_1 .. T_6$ sind und von b) 36, für welche die Centren und Ebenen durch die Eckpunkte und Seitenflächen der 9 imaginären Tetraeder $T_7 .. T_{15}$ repräsentirt sind. Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen die 24 reellen, zur Gruppe a) gehörigen, zu 4.4 auf T_1 und zu je 1.4 auf T_2 und T_3, die 36 imaginären zur Gruppe b) gehörigen zu 3.4 auf T_1 und zu je 1.4 auf $T_{10} .. T_{15}$.

2) Die $12.15 = 180$ Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente eines Paares entgegengesetztes, die vertauschten Elemente jedes der beiden anderen Paare aber unter sich gleiches Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Collineationen (vergl. § 9 I B unter 1)) und zwar solche, deren Haupttetraeder zu Eckpunkten (Seitenflächen) je zwei Punktpaare $\mathfrak{e}$ (Ebenenpaare ε) haben, welche zwei verschiedenen Fundamentaltetraedern angehören und deren Kantenpaare je ein Geradenpaar e und zwei Geradenpaare d sind (vgl. § 8 C I unter 3)). Die Coordinaten der Elemente eines solchen Haupttetraeders sind in (31γ) und (31δ) für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} S\ = [-x_2\ x_1\ -x_4\ -x_3\ x_6\ x_5] = [-2\ 1\ 4\ 3]_1 \\ S^3 = [x_2\ -x_1\ -x_4\ -x_3\ x_6\ x_5] = [2\ -1\ 4\ 3]_1 \end{array}\right\} S^2 = [-x_1\ -x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6] = [-1\ -2\ 3\ 4]_1 \Big\} \quad (87\beta)$$

(S^2 bedeutet die geschaarte Involution mit Axenpaar (12)) angegeben, ebenso die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes in (31ε)).

Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (vgl. § 8 C I (28ζ'), (28ζ'')) werden:

$$(x_3-x_4)+\mu'(x_5+x_6)=0 \text{ und } (x_3+x_4)+\mu''(x_5-x_6)=0 \quad \ldots (87\gamma)$$

Zu den Flächen des ersten in sich transformirten Flächenbüschels (28η'), dessen Vierseit das Geradenpaar (12) und das Kantenpaar K_{13}, K_{42}, nämlich ein Geradenpaar d zu Kanten hat, gehören die beiden Flächen $F^{(3)}$:

$$\left.\begin{array}{l} F_6^{(1)}-iF_9^{(1)}\equiv 2x_1^2+2x_2^2+(x_3+x_4)^2=0 \text{ oder } z_1z_3-iz_4z_2=0 \\ F_7^{(1)}-iF_{10}^{(1)}\equiv 2x_1^2+2x_2^2+(x_5-x_6)^2=0 \text{ oder } z_1z_4-iz_2z_3=0, \end{array}\right\} \ldots (87\delta')$$

zu den Flächen des zweiten Flächenbüschels (28η''), dessen Vierseit das Geradenpaar (12) und das zweite Geradenpaar d zu Kanten hat, gehören die beiden Flächen $F^{(3)}$:

$$\left.\begin{array}{l} F_6^{(1)}+iF_9^{(1)}\equiv 2x_1^2+2x_2^2+(x_3-x_4)^2=0 \text{ oder } z_1z_3+iz_4z_2=0 \\ F_7^{(1)}+iF_{10}^{(1)}\equiv 2x_1^2+2x_2^2+(x_5+x_6)^2=0 \text{ oder } z_1z_4+iz_2z_3=0 \end{array}\right\} \ldots (87\delta'')$$

Den auf die zweite Art in sich transformirten Flächen der beiden Netze (Gewebe) (28λ') und (28λ'') gehören je 2 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ und je vier Flächen $F^{(2)}$ an; nämlich dem ersten Netze:

$$F_1^{(1)},\ F_2^{(1)} \text{ und } (x_1\pm x_2)^2+(x_3\pm x_6)^2+(x_4\pm x_5)^2\equiv(x_1\mp x_2)^2+(x_3\mp x_6)^2+(x_4\mp x_5)^2=0 \quad \ldots (87\varepsilon')$$

dem zweiten Netze:

$$F_3^{(1)},\ F_4^{(1)} \text{ und } (x_1\pm x_2)^2+(x_3\pm x_5)^2+(x_4\pm x_6)^2\equiv(x_1\mp x_2)^2+(x_3\mp x_5)^2+(x_4\mp x_6)^2=0 \quad \ldots (87\varepsilon'')$$

Die 180 vierzähligen Collineationen zerfallen in drei Gruppen: a) von 72 Collineationen: die Haupttetraeder sind die 36 Tetraeder mit je einem reellen und einem imaginären Punktpaar 𝔢 (Ebenenpaar ε), welche je einem reellen und einem imaginären Fundamentaltetraeder mit einem gemeinsamen reellen Kantenpaar e angehören; die Kantenpaare eines solchen Haupttetraeders sind ein reelles Geradenpaar e und zwei imaginäre Geradenpaare d erster Art; b) von 36 Collineationen: die Haupttetraeder sind die 18 Tetraeder mit je zwei reellen Punktpaaren 𝔢 (Ebenenpaaren ε), welche je zweien reellen Fundamentaltetraedern mit einem gemeinsamen reellen Geradenpaar e angehören; die Kantenpaare eines solchen Haupttetraeders sind ein reelles Geradenpaar e und zwei reelle Geradenpaare d; c) von 72 Collineationen: die Haupttetraeder sind die 36 Tetraeder mit je zwei ima-

ginären Punktpaaren c (Ebenenpaaren ε), welche je zweien imaginären Fundamentaltetraedern mit einem gemeinsamen imaginären Geradenpaare e angehören; die Kantenpaare eines solchen Haupttetraeders sind ein imaginäres Geradenpaar e und zwei imaginäre Geradenpaare d der zweiten Art.

Bei der Darstellung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entfallen die 72 Substitutionen der Gruppe a) zu 4.12 auf T_1 und zu je 1.12 auf T_2 und T_3, die 36 imaginären Substitutionen der Gruppe b) zu 1.12 auf T_1 und zu je 1.4 auf $T_{10} \dots T_{15}$ und die 72 imaginären Substitutionen der Gruppe c) zu 2.12 auf T_1 und zu je 1.8 auf $T_{10} \dots T_{15}$.

B) Correlationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die 4.15 = 60 Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_i jedes der drei Paare gleiches Vorzeichen haben, bedeuten Polarcorrelationen (vgl. § 9 II A) unter 1)), deren Basisfläche je eine der 60 Flächen $F^{(2)}$ (§ 7 2)) ist. Z. B.:

Basisfläche der Polarcorrelation:

$$S = [x_2\, x_1\, x_4\, x_3\, x_6\, x_5] = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1 = [\underline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1 \quad (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0$$

$$\text{oder } -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \quad \dots \quad (87\zeta)$$

$$S = [x_2\, x_1\, x_5\, x_6\, x_3\, x_4] = [\overline{2\ 1\ -3_i\ 4_i}]_1 = [\underline{2\ 1\ 3_i\ -4_i}]_1 \quad (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0$$

$$\text{oder } z_3^2 - z_4^2 + 2\, i\, z_1 z_2 = 0 \quad \dots \quad (87\zeta')$$

Die beiden durch eine solche Polarcorrelation in sich übergehenden Netze sind für das erste Beispiel (87ζ):

$$a_1(x_1 - x_2) + a_3(x_3 - x_4) + a_5(x_5 - x_6) = 0 \quad \dots\dots \quad (87\eta')$$

$$a_1(x_1 + x_2) + a_3(x_3 + x_4) + a_5(x_5 + x_6) = 0 \quad \dots\dots \quad (87\eta'')$$

Zu den auf die erste Art in sich transformirten Flächen gehören die 3 Flächen $F^{(2)}$, welche mit der Basisfläche (87ζ) das Tetraeder T_1 als Polartetraeder gemein haben, sowie weitere 4.6 Flächen $F^{(2)}$, welche bezw. die Tetraeder T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 als Polartetraeder gemein haben, ferner die 6 Flächen $F^{(3)}$: $F^{(1)}_5 \pm iF^{(1)}_8$, $F^{(1)}_6 \pm iF^{(1)}_9$, $F^{(1)}_7 \pm iF^{(1)}_{10}$ u. s. w.; zu den auf die zweite Art in sich transformirten Flächen gehören die 4 Fundamentalflächen: $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_3$, $F^{(1)}_4$, ferner die 6 Flächen $F^{(4)}$ (§ 7, 4)):

$$\left.\begin{aligned}
2x_1^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 &\equiv 2x_2^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 = 0 \\
2x_1^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_6)^2 &\equiv 2x_2^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 = 0 \\
2x_3^2 + (x_1 + x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 &\equiv 2x_4^2 + (x_1 - x_5)^2 + (x_2 + x_6)^2 = 0 \\
2x_3^2 + (x_1 - x_5)^2 + (x_2 + x_6)^2 &\equiv 2x_4^2 + (x_1 + x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 = 0 \\
2x_5^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 &\equiv 2x_6^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 = 0 \\
2x_5^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 &\equiv 2x_6^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (87\vartheta) \text{ u. s. f.}$$

Die 60 Polarcorrelationen zerfallen in die beiden Gruppen von a) 24 mit reellen Basisflächen $F^{(2)}$ und b) von 36 mit imaginären Basisflächen $F^{(2)}$; die Vertheilung der Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten auf die Fundamentaltetraeder ist dieselbe wie für die 60 Substitutionen unter A 1) dieses §, welche centrisch-involutorische Collineationen bedeuteten.

2) Die $12 \cdot 15 = 180$ Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente eines Paares gleiches, die vertauschten Elemente jedes der beiden anderen Paare entgegengesetztes Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Axencorrelationen und zwar der zweiten Art (vgl. § 9 II A 3), Formeln (70)). Die beiden sich involutorisch entsprechenden Axen sind, wie für die in § 13 unter B 2) betrachteten vierzähligen Axencorrelationen der ersten Art, je ein Geradenpaar e; die Mittelpunkte und Ebenen der festbleibenden Strahlbüschel je ein Punktpaar $\mathfrak{e}$ der einen und je ein Ebenenpaar ε der anderen Axe. Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Complexe, der in sich auf die zweite Art transformirten Flächen 2ten Grades sind aus den Formeln (70) zu entnehmen. Von den 4 zusammengehörigen Substitutionen, deren Axenpaar und Haupttetraeder dasselbe ist, entsprechen sich je zwei als S und S^3, während S^2 für beide die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar e darstellt. Z. B.:

$$\begin{array}{llll} & & \text{Mittelpunkte} & \text{Ebenen} \\ & & \multicolumn{2}{c}{\text{der Strahlenbüschel:}} \\ S = [x_2\, x_1\, x_4\, {-x_3}\, {-x_6}\, x_5] = [-2\ 1\ 4\ 3]_1 = [-2\ 1\ 4\ 3]_1 & \Big\} & \mathfrak{e}_3 \ldots 0\,0\,1\,0 & \varepsilon_3 \ldots 0\,0\,1\,0 \\ S^3 = [x_2\, x_1\, {-x_4}\, x_3\, x_6\, {-x_5}] = [2\ {-1}\ 4\ 3]_1 = [2\ {-1}\ 4\ 3]_1 & & \mathfrak{e}_4 \ldots 0\,0\,0\,1 & \varepsilon_4 \ldots 0\,0\,0\,1 \\ S = [x_2\, x_1\, {-x_4}\, x_3\, {-x_6}\, x_5] = [2\ 1\ {-4}\ 3]_1 = [2\ 1\ {-4}\ 3]_1 & \Big\} & \mathfrak{e}_1 \ldots 1\,0\,0\,0 & \varepsilon_1 \ldots 1\,0\,0\,0 \\ S^3 = [x_2\, x_1\, x_4\, {-x_3}\, x_6\, {-x_5}] = [2\ 1\ 4\ {-3}]_1 = [2\ 1\ 4\ {-3}]_1 & & \mathfrak{e}_2 \ldots 0\,1\,0\,0 & \varepsilon_2 \ldots 0\,1\,0\,0 \\ \qquad S^2 = [x_1\, x_2\, {-x_3}\, {-x_4}\, {-x_5}\, {-x_6}] = [1\ 2\ {-3}\ {-4}]_1. & & & \end{array} \quad (87\iota)$$

Die Axen sind: (12) $1\ \pm i\ 0\ 0\ 0\ 0$, die in sich transformirten Complexe: $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$; zu den auf die zweite Art in sich transformirten Flächen gehören die 4 Fundamentalflächen $F^{(1)}$: $F^{(1)}_1$, $F^{(1)}_2$, $F^{(1)}_3$, $F^{(1)}_4$ und 6 Flächen $F^{(4)}$, z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x_1^2 + (x_3+x_5)^2 + (x_4+x_6)^2 \equiv 2\,x_2^2 + (x_3-x_5)^2 + (x_4-x_6)^2 = 0 \\ 2\,x_1^2 + (x_3-x_5)^2 + (x_4-x_6)^2 \equiv 2\,x_2^2 + (x_3+x_5)^2 + (x_4+x_6)^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (87\varkappa) \text{ u. s. f.}$$

Die 180 vierzähligen Axencorrelationen zerfallen in drei Gruppen von a) 72 Correlationen, für welche die Mittelpunkte und Ebenen der Strahl-

büschel je eins der beiden reellen Punkt- und Ebenenpaare der 9 reellen Geradenpaare e sind, von b) 36 Correlationen, für welche je ein imaginäres Punkt- und Ebenenpaar der reellen Geradenpaare e und endlich von c) 72 Correlationen, für welche je eins der drei imaginären Punktpaare $\mathfrak{e}$ und Ebenenpaare ε der 6 imaginären Geradenpaare e, als Mittelpunkte und Ebenen der Strahlbüschel auftreten. Die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen dieser drei Gruppen a), b), c) auf die Fundamentaltetraeder T_i ist dieselbe, wie diejenige der 180 Substitutionen (A 2) dieses §), welche vierzählige Collineationen bedeuteten.

§ 19.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 90 Permutationen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 \cdot 90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden nicht vertauschten Elemente x_{i_5}, x_{i_6} entgegengesetztes, die vier anderen unter sich vertauschten Elemente gleiches Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Collineationen (vgl. § 9 I B 1)), deren Haupttetraeder zu Eckpunkten (Seitenflächen) je 4 Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) (vgl. § 2 und § 3 Formel (11)) haben, während die Kanten K_{12}, K_{34} durch ein Geradenpaar d, die beiden anderen Kantenpaare durch 2 Geradenpaare s (vgl. § 4 6) unter (13η)) gebildet werden. Die Coordinaten dieser Elemente und die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes sind in § 8 C I unter 4), Formeln (32γ) bis (32ε) für das Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} S\ = [x_2\, x_3\, x_4\, x_1\, -x_5\, x_6] = [1\ 2_i\ -3_i\ -4]_6 & S^2 = [x_3\, x_4\, x_1\, x_2\, x_5\, x_6] = [-1\ 3\ 2\ 4]_1 \\ S^3 = [x_4\, x_1\, x_2\, x_3\, -x_5\, x_6] = [1\ 3_i\ -2_i\ \ 4]_6 & \text{(geschaarte Involution mit Axenpaar } d) \end{array}\right\} \quad (88\alpha)$$

angegeben worden.

Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (28ζ'), (28ζ'') werden:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \mu' x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \mu'' x_5 = 0 \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (88\beta)$$

Zu den Flächen der beiden in sich transformirten Büschel, deren Vierseit aus den beiden Geraden d und dem ersten bez. zweiten Geraden-

paar s besteht, gehört je eine der 180 Flächen $F^{(4)}$ und je eine der 120 Flächen $F^{(5)}$, nämlich zu dem ersten Büschel $Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 = 0$ gehören:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(4)} \ldots F^{(1)}_2 + F^{(1)}_3 + F^{(1)}_7 + F^{(1)}_{10} \ldots (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + 2x_5^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } z_2^2 - z_3^2 - 2 z_1 z_4 = 0 \\ F^{(5)} \ldots F^{(1)}_5 + F^{(1)}_6 + i(F^{(1)}_8 - F^{(1)}_9) \ldots (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } z_1(z_2+z_3) - i z_4(z_2-z_3) = 0; \end{array}\right\} (88\gamma')$$

zu dem zweiten Büschel $Z_1 Z_3 + \lambda'' Z_2 Z_4 = 0$ gehören:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(4)} \ldots F^{(1)}_2 - F^{(1)}_3 + F^{(1)}_7 + F^{(1)}_{10} \ldots (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + 2x_5^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } z_2^2 - z_3^2 + 2 z_1 z_4 = 0 \\ F^{(5)} \ldots F^{(1)}_5 + F^{(1)}_6 - i(F^{(1)}_8 - F^{(1)}_9) \ldots (x_1-x_2+x_3-x_4)^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } z_1(z_2+z_3) + i z_4(z_2-z_3) = 0. \end{array}\right\} (88\gamma'')$$

Den beiden Netzen (Geweben) (vgl. (28λ'), (28λ'')), deren Flächen auf die zweite Art in sich transformirt werden, gehört je eine der 60 Flächen $F^{(2)}$ und je eine der 90 Flächen $F^{(3)}$ an, nämlich dem ersten Netze:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(2)} \ldots F^{(1)}_2 + F^{(1)}_3 + i(F^{(1)}_7 - F^{(1)}_{10}) \ldots (x_1-x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + (x_5-x_6)^2 \equiv \\ \qquad \equiv (x_1+x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + (x_5+x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 - z_4^2 - 2 i z_2 z_3 = 0 \\ F^{(3)} \ldots F^{(1)}_1 - i F^{(1)}_4 \ldots 2x_1^2 + 2x_3^2 + (x_5+x_6)^2 \equiv 2x_2^2 + 2x_4^2 + (x_5-x_6)^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } (z_1^2+z_4^2) + i(z_2^2+z_3^2) = 0, \end{array}\right\} (88\delta')$$

dem zweiten Netze:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(2)} \ldots F^{(1)}_2 + F^{(1)}_3 - i(F^{(1)}_7 - F^{(1)}_{10}) \ldots (x_1+x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + (x_5-x_6)^2 \equiv \\ \qquad \equiv (x_1-x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + (x_5+x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 - z_4^2 + 2 i z_2 z_3 = 0 \\ F^{(3)} \ldots F^{(1)}_1 + i F^{(1)}_4 \ldots 2x_1^2 + 2x_3^2 + (x_5-x_6)^2 \equiv 2x_2^2 + 2x_4^2 + (x_5+x_6)^2 = 0 \\ \qquad\text{oder } (z_1^2+z_4^2) - i(z_2^2+z_3^2) = 0. \end{array}\right\} (88\delta'')$$

Die 720 Collineationen zerfallen in drei Gruppen von a) 144, für welche die Kantenpaare K_{12}, K_{34} der 72 Haupttetraeder durch die reellen Geradenpaare d, in b) von 288 und in c) von 288 Collineationen, für welche die Kantenpaare K_{12}, K_{34} der 144 Haupttetraeder bez. durch die imaginären Geraden d der ersten und der zweiten Art gebildet werden; die Punkte $\mathfrak{k}$ (Ebenen $\varkappa$) und die Kantenpaare s sind durchweg imaginär. Bei der Darstellung der durchweg imaginären Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten vertheilen sich die Substitutionen der drei Gruppen a), b) und c) so auf die sämmtlichen Fundamentaltetraeder, dass $8 \cdot 6$ auf T_1, je $8 \cdot 9$ auf T_2, T_3 und $T_{10} \ldots T_{15}$ und je $8 \cdot 2$ auf $T_4 \ldots T_6$ und $T_7 \ldots T_9$ entfallen.

2) Die $8 \cdot 90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden nicht vertauschten Elemente x_{i_5}, x_{i_6} gleiches, die vier anderen unter sich ver-

tauschten Elemente eine ungerade Zahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten achtzählige Collineationen und zwar auf eine Art eigentliche (vgl. § 9 I B 3a) und § 8 I unter 6)). Die Coordinaten der Eckpunkte (Seitenflächen) eines Haupttetraeders, nämlich je eines Punktpaares $\mathfrak{e}$ (eines Ebenenpaares ε) und eines Punktpaares $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (eines Ebenenpaares $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$), der Kanten K_{14}, K_{23} (eines Geradenpaares e) und der beiden anderen Kantenpaare (zweier Geradenpaare q) sind in § 8 I 6) unter (34γ), (34δ), ebenso wie die Gleichungen des zugehörigen tetraedralen Complexes Ω unter (34ε) für das Beispiel aufgestellt worden:

$$\left.\begin{array}{llll} S = [-x_2\ x_3\ x_4\ x_1\ x_5\ x_6] = [3\ 4_i\ 1_i\ 2]_6 & & & \\ S^3 = [-x_4\ x_1\ -x_2\ -x_3\ x_5\ x_6] = [2\ 4_i\ 1_i\ -3]_6 & & S^2 = [-x_3\ x_4\ x_1\ -x_2\ x_5\ x_6] & = [4\ 2\ 3\ -1]_1 \\ S^5 = [x_2\ -x_3\ -x_4\ -x_1\ x_5\ x_6] = [3\ -4_i\ -1_i\ 2]_6 & & S^4 = [-x_1\ -x_2\ -x_3\ -x_4\ x_5\ x_6] & = [1\ -2\ -3\ 4]_1 \\ S^7 = [x_4\ -x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6] = [-2\ 4_i\ 1_i\ 3]_6 & & S^6 = [x_3\ -x_4\ -x_1\ x_2\ x_5\ x_6] & = [-4\ 2\ 3\ 1]_1. \end{array}\right\} \quad (88\varepsilon)$$

Hierbei bedeuten S^2 und S^6 zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen (vgl. § 13 A 2)) mit dem Axenpaare $e = (56)$, S^4 eine geschaart-involutorische Collineation mit diesem Axenpaar. Man vergleiche hiezu die Formeln (84ε) in § 15 A 2) für die uneigentlichen achtzähligen Collineationen $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\, (x_5\, x_6)$, deren Haupttetraeder (abgesehen von der Bezeichnung der Ecken) genau mit demjenigen der hier betrachteten eigentlichen achtzähligen Collineationen übereinstimmt.

Die Gleichung des in sich transformirten Büschels von Gewinden (28ζ') wird für das gewählte Beispiel:

$$x_5 + \mu' x_6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88\zeta)$$

Zu den Flächen des in sich transformirten Flächenbüschels (28η'):

$$Z_1\, Z_4 + \lambda'\, Z_2\, Z_3 = 0$$

gehören die beiden Flächen:

$$\left.\begin{array}{l} z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 + 2 z_2 z_3 = 0 \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2 z_2 z_3 = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88\eta)$$

welche (vergl. (52ε'), (52ε'')) bei den in § 15 B 2) betrachteten achtzähligen Correlationen mit demselben Haupttetraeder als Kernflächen auftraten.

Auch diese 720 Collineationen zerfallen in drei Gruppen von a) 144, von b) 288 und c) 288 Collineationen, denen die a) 36, b) 72, c) 72 Haupttetraeder in derselben Weise zugeordnet sind, wie es bei den § 15 A 2) betrachteten achtzähligen Collineationen der Fall war. Die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten, durchweg imaginären Substitutionen

der drei Gruppen auf die Fundamentaltetraeder ist der unter A 1) angegebenen entsprechend.

B) Correlationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 \cdot 90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden nicht vertauschten Elemente x_{i_5}, x_{i_6} gleiches, die vier anderen unter sich vertauschten Elemente eine gerade Anzahl (einschliesslich Null) negativer Vorzeichen haben, bedeuten vierzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche (vgl. § 9 II A) unter 4a)). Die Gleichungen des Complexes Ω', der Kernfläche $F^{(5)}$, des festbleibenden Netzes von Complexen und des linearen Complexes, der beiden festbleibenden speciellen linearen Complexe und ihrer Leitgeraden (d) sind in den Formeln (44γ) (§ 8 II unter 3)) für das Beispiel aufgestellt worden:

$$\left.\begin{array}{l} S\ = [-x_2\, x_3 - x_4\, x_1\, x_5\, x_6] = [1\ 2_i\ {-3_i}\ {-4}]_6 = [1\ {-2_i}\ 3_i\ {-4}]_6 \\ S^3 = [x_4 - x_1\, x_2\, - x_3\, x_5\, x_6] = [1\ {-3_i}\ 2_i\ 4]_6 = [1\ 3_i\ {-2_i}\ 4]_6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S^2 = [x_3\, x_4\, x_1\, x_2 - x_5 - x_6] \\ \quad = [-1\ 3\ 2\ 4]_1 . \end{array} \quad (88\vartheta)$$

S^2 stellt eine involutorisch-geschaarte Collineation mit einem Axenpaar d dar, welches die Leitgeraden der beiden speciellen Complexe bildet. Die Flächen aller Büschel, deren Vierseit durch dies Geradenpaar und je zwei Gerade des anderen Systems der Kernfläche:

$$F^{(5)} \ldots z_1(z_2 - z_3) + i\, z_4(z_2 + z_3) = 0 \text{ oder } (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + 4\, x_5{}^2 + 4\, x_6{}^2 = 0 \ldots (88\iota)$$

gebildet wird, sind involutorisch zugeordnet, so dass ausser $F^{(5)}$ noch eine Fläche jedes Büschels in sich transformirt wird z. B.:

für das Büschel durch das Geradenpaar d und das Paar (56)

$$F^{(5)} \ldots z_1 (z_2 - z_3) - i\, z_4 (z_2 + z_3) = 0,$$

für je eins der beiden Büschel durch das Geradenpaar d u. ein Geradenpaar s je eine Fläche

$$\left\{\begin{array}{ll} & F^{(4)} \ldots (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + 2\, x_5{}^2 = 0 \\ \text{und} & F^{(4)} \ldots (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + 2\, x_5{}^2 = 0, \end{array}\right.$$

für je eins der beiden Büschel durch das Geradenpaar d u. ein Geradenpaar r je eine Fläche

$$\left\{\begin{array}{ll} & F^{(2)} \ldots (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0 \\ \text{und} & F^{(2)} \ldots (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0 \quad \text{u. s. f.} \end{array}\right. \quad (88\varkappa)$$

Diese 720 Correlationen zerfallen entsprechend der Beschaffenheit der Leitgeraden d ebenso wie die 720 vierzähligen Collineationen unter A 1) in drei Gruppen von 144 und 2 mal 288 Correlationen; die Vertheilung der durchweg imaginären, in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Sub-

stitutionen auf die Fundamentaltetraeder ist die bereits unter A 1) dieses § angegebene.

2) Die $8 \,.\, 90 = 720$ Substitutionen, bei welchen die beiden nicht vertauschten Elemente x_{i_5}, x_{i_6} entgegengesetztes, die vier anderen unter sich vertauschten Elemente eine ungerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, bedeuten achtzählige Correlationen (vgl. § 9 II B unter 2a) und § 8 III unter 3)). Die Elemente eines Haupttetraeders sind dieselben, wie für die achtzähligen Collineationen (A 2) dieses §) und wie für die achtzähligen Correlationen, welche in § 15 unter B 2) betrachtet wurden (vgl. (26β), (26γ)); die Gleichungen der beiden in sich transformirten Flächen G_1, G_2, nämlich zweier zusammengehöriger Flächen $F^{(10)'}$ sind unter (26δ_1' .. ϑ_1') und (26δ_2' .. ϑ_2') für das Beispiel angegeben worden:

$$\left.\begin{array}{ll} S\;\, = (x_2\, x_3\, -x_4\, x_1\, -x_5\, x_6] = [\overline{3\;\; 4_i\;\; 1_i\;\; 2}]_6 = [\overline{3\; -4_i\; -1_i\; 2}]_6 & \\ S^3 = (x_4\, x_1\, x_2\, -x_3\, x_5\, -x_6] = [\overline{-2\;\; 4_i\;\; 1_i\;\; 3}]_6 = [\overline{-2 -4_i -1_i 3}]_6 & S^2 = [x_3\, -x_4\, -x_1\, x_2\, x_5\, x_6] = [-4\;2\;3\;1]_1 \\ S^5 = (x_2\, x_3\, -x_4\, x_1\, x_5\, -x_6] = [\overline{3\; -4_i\; -1_i\; 2}]_6 = [\overline{3\;\; 4_i\;\; 1_i\;\; 2}]_6 & S^4 = [x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, -x_5\, -x_6] = [1 -2 -3\; 4]_1 \\ S^7 = (x_4\, x_1\, x_2\, -x_3\, -x_5\, x_6] = [\overline{-2 -4_i -1_i 3}]_6 = [\overline{-2\;\; 4_i\;\; 1_i\;\; 3}]_6 & S^6 = [-x_3\, x_4\, x_1\, -x_2\, x_5\, x_6] = [4\;2\;3\; -1]_1 \end{array}\right\} \quad (88\lambda)$$

(vgl. (84η) in § 15). S^2 und S^6 bedeuten auch hier zwei zusammengehörige vierzählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar $e = (56)$, S^4 die geschaart-involutorische Collineation mit diesem Axenpaar.

Die Gleichungen der beiden Complexe Ω_1'' und Ω_2'' sind unter (51γ'), (51γ''), diejenigen der beiden festbleibenden Gewinde $\left\{\begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array}\right\}$ unter (51δ), die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen, welche bez. zu S und S^7, zu S^3 und S^5 gehören, unter (51ζ'), (51ζ''), endlich die Gleichung des Systems der sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen zweiten Grades unter (48ϱ') aufgestellt worden; auch hier zerfällt der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen (vgl. § 8 III (48μ)) in die beiden speciellen linearen Complexe:

$$\left.\begin{array}{l} x_5 - i\, x_6 = 0 \\ x_5 + i\, x_6 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88\mu)$$

Auch diese 720 achtzähligen, durchweg imaginären Correlationen zerfallen in drei Gruppen von je 144 und zweimal 288, entsprechend der Beschaffenheit der zugehörigen Haupttetraeder (vgl. unter A 2) dieses § und unter A 2) und B 2) des § 15). Die Vertheilung der entsprechenden in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen der drei Gruppen auf

die Fundamentaltetraeder ist dieselbe, wie sie unter A 1) und 2) und unter B 1) angegeben wurde.

§ 20.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 120 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})\,(x_{i_4}\, x_{i_5})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die $8 \cdot 120 = 960$ derartigen Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_{i_4}, x_{i_5} gleiches Vorzeichen haben, während die Gesammtzahl der negativen Vorzeichen ungerade ist, bedeuten sechszählige, auf zwei Arten eigentliche Collineationen (vgl. § 9 I B unter 2a)). Die Eckpunkte (Seitenflächen) eines Haupttetraeders dieser Collineationen sind 4 Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_{0} = \mathfrak{i}^{(k)}_{0}$ (4 Ebenen $(^{(d)}_{0} = \iota^{(k)}_{0})$ (vgl. § 8 C I unter 10)), die Kantenpaare bez. ein Geradenpaar k_0, d_0 und l, deren Coordinaten unter (38γ) und (38δ) nebst der Gleichung des tetraedralen Complexes unter (38ε) für das folgende Beispiel $(x_1\, x_3\, x_5)\,(x_2\, x_4)$ angegeben sind:

$$\left.\begin{array}{ll} S = [-x_3\, x_4\, x_5\, x_2\, -x_1\, -x_6] = [-1\;4\;2\;3]_4 & S^2 = [-x_5\, x_2\, -x_1\, x_4\, x_3\, x_6] = [2\;-3\;-1\;4]_3 \\ S^5 = [-x_5\, x_4\, -x_1\, x_2\, x_3\, -x_6] = [3\;1\;-2\;4]_5 & S^4 = [-x_3\, x_2\, x_5\, x_4\, -x_1\, x_6] = [2\;4\;-3\;-1]_2 \\ \multicolumn{2}{c}{S^3 = [x_1\, x_4\, x_3\, x_2\, x_5\, -x_6] = [-4\;3\;2\;1]_6.} \end{array}\right\} \quad (89\alpha)$$

Hierbei bedeuten S^2 und S^4 dreizählige geschaarte Collineationen mit dem Axenpaar k_0 (vgl. § 12 A 1)), S^3 eine geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaar d_0 (vgl. § 17 A 1)).

Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Büschel von Gewinden (vgl. (28ζ'), (28ζ'') werden:

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - x_3 - x_5) + \mu'\,(x_2 + x_4) = 0 \\ (x_2 - x_4) \qquad + \mu''\, x_6 \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89\beta)$$

Zu den Flächen des ersten in sich transformirten Flächenbüschels (28η'), dessen Vierseit aus den Geradenpaaren k_0 und d_0 besteht, gehören: die Fundamentalfläche $F^{(1)}_{1}$ und eine der 480 Flächen $F^{(7)}$ (§ 7 7)):

$$2\,(-x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3\,(x_2 - x_4)^2 + 6\,x_6^2 = 0 \quad \ldots \quad (89\gamma)$$

(vgl. (23β) .. (23ε)); zu den Flächen des zweiten in sich transformirten Flächenbüschels (28η''), dessen Vierseit aus den Geradenpaaren k_0 und l besteht, gehören:

eine der 240 Flächen $F^{(6)}$ (§ 7 6)):

$$(-x_1 + x_3 + x_5)^2 + 3\,x_2^2 + 3\,x_4^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (89\delta')$$

und eine der 240 Flächen $F^{(7)}$ (§ 7 7)):

$$2(-x_1+x_3+x_5)^2+3(x_2+x_4)^2+6x_6^2=0 \quad . \; . \; . \; (89\delta'').$$

Die 8 . 120 = 960 6zähligen Collineationen zerfallen in **drei** Gruppen. Da jedes der 80 imaginären Geradenpaare k_0 6 mal, jedes der 72 reellen und der 168 imaginären Geradenpaare d_0 4 mal und jedes der 48 reellen und der 432 imaginären Geradenpaare l einmal als Kantenpaar auftritt, so entstehen drei Gruppen von Haupttetraedern:

a) 48 Haupttetraeder mit einem imaginären Kantenpaar k_0, einem imaginären d_0 und einem reellen l, b) 144 Haupttetraeder mit einem imaginären Kantenpaar k_0, einem reellen d_0 und einem imaginären l, c) 288 Haupttetraeder mit je einem imaginären Kantenpaare k_0, d_0, l, während sämmtliche 1920 Eckpunkte $\mathfrak{h}_0^{(d)}=\mathfrak{i}_0^{(k)}$ (Seitenflächen $\binom{(d)}{0}=\iota_0^{(k)}$) imaginär sind. Die 96 reellen Substitutionen, welche der ersten Gruppe a) entsprechen, entfallen bei ihrer Darstellung in tetraedrischen Coordinaten zu je 4 . 8 auf die Tetraeder $T_4 \,..\, T_6$, die 288+576 imaginären Substitutionen der beiden Gruppen b) und c) zu je 8 . 6 auf die Tetraeder T_2, T_3, zu je 8 . 8 auf $T_4 \,..\, T_6$, zu je 8 . 12 auf $T_7 \,..\, T_9$ und zu je 8 . 6 auf $T_{10} \,..\, T_{15}$.

2) Die 8 . 120 = 960 Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_{i_4}, x_{i_5} **entgegengesetztes** Vorzeichen haben, während die Gesammtzahl der negativen Vorzeichen **ungerade** ist, bedeuten **zwölfzählige Collineationen** und zwar auf **eine Art eigentliche** (vgl. § 9 I B unter 4)). Das Haupttetraeder für vier zusammengehörige Substitutionen S, S^{11}, S^5, S^7 ist dasselbe wie für die beiden Substitutionen S^2, S^{10}, welche zwei zusammengehörige, auf zwei Arten eigentliche, sechszählige Collineationen bedeuten (vgl. § 12 A 2)); die Eckpunkte (Seitenflächen) sind vier Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)}=\mathfrak{f}_0^{(k)}$ (4 Ebenen $\binom{(e)}{0}=\varphi_0^{(k)}$), die Kantenpaare je ein Geradenpaar k_0, e und h (vgl. (36γ) und (36δ) in § 8 I 8)). Für das folgende Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}
S\;\;=[-x_3\; x_4\; -x_5\; -x_2\; x_1\; x_6]=[1\;4\;-2\;3]_4 \\
S^5=[x_5\; x_4\; -x_1\; -x_2\; -x_3\; x_6]=[4\;2\;-1\;3]_5 \\
S^7=[-x_3\; -x_4\; -x_5\; x_2\; x_1\; x_6]=[3\;2\;4\;-1]_4 \\
S^{11}=[x_5\; -x_4\; -x_1\; x_2\; -x_3\; x_6]=[3\;1\;2\;-4]_5
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
S^2=[x_5\; -x_2\; -x_1\; -x_4\; -x_3\; x_6]=[1\;-4\;-2\;3]_3 \\
S^{10}=[-x_3\; -x_2\; -x_5\; -x_4\; x_1\; x_6]=[4\;2\;1\;3]_2
\end{array}\right. \\
\}\; S^6=[x_1\; -x_2\; x_3\; -x_4\; x_5\; x_6]=[4\;-3\;2\;-1]_1
\end{array} \\
\left\{\begin{array}{l}
S^3=[x_1\; -x_4\; x_3\; x_2\; x_5\; x_6]=[3\;4\;-1\;2]_6 \\
S^9=[x_1\; x_4\; x_3\; -x_2\; x_5\; x_6]=[2\;1\;4\;-3]_6
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
S^4=[-x_3\; x_2\; -x_5\; x_4\; x_1\; x_6]=[3\;-1\;2\;-4]_2 \\
S^8=[x_5\; x_2\; -x_1\; x_4\; -x_3\; x_6]=[3\;2\;-4\;-1]_3
\end{array}\right.
\end{array}\right\} (89\varepsilon)$$

erhält man für die Coordinaten der Elemente des Haupttetraeders die in § 8 III 5) in den Formeln (53ϑ) und (53ι) angegebenen Werthe.

S^3, S^9 bedeuten zwei zusammengehörige vierzählige, S^4 und S^8 zwei zusammengehörige dreizählige geschaarte Collineationen mit bezw. den Axenpaaren e und k_0 (vergl. § 17 A 2) und § 12 A 1)) und S^6 bedeutet die geschaart-involutorische Collineation mit dem Axenpaare e.

Die Gleichung des tetraedralen Complexes (vgl. § 8 I unter 9) (37β)) wird:

$$\Omega_w \; . \; . \; . \; -x_1 x_3 - x_3 x_5 + x_5 x_1 + x_6^2 = 0, \qquad (89\zeta)$$

diejenige des in sich transformirten Büschels von Gewinden (28ζ')

$$(x_1 - x_3 + x_5) + \mu' x_6 = 0 \qquad (89\eta).$$

Zu den Flächen des in sich transformirten Büschels, dessen Vierseit durch die beiden Geradenpaare k_0 und e gebildet wird (vgl. (28η')), gehören: die Fundamentalfläche $F^{(1)}$, eine der 240 Flächen

$$F^{(6)} \; . \; . \; . \; (x_1 - x_3 + x_5)^2 + 3(x_2^2 + x_4^2) = 0$$

und zwei der 120 Flächen $F^{(5)} \; . \; . \; . \; \begin{cases} (x_1 - x_3 + x_5 + x_6)^2 + 4(x_2^2 + x_4^2) = 0 \\ (x_1 - x_3 + x_5 - x_6)^2 + 4(x_2^2 + x_4^2) = 0 \end{cases}$ $\qquad (89\vartheta)$

(vgl. § 7 unter 6) und 5)).

Die 8 . 120 = 960 zwölfzähligen Collineationen zerfallen ebenfalls der Beschaffenheit der Haupttetraeder entsprechend in drei Gruppen. Da jedes der 80 imaginären Geradenpaare k_0 3 mal, jedes der 9 reellen und der 6 imaginären Geradenpaare e 16 mal und jedes der 24 reellen und der 216 imaginären Geradenpaare h einmal als Kantenpaar auftritt, so ergeben sich folgende drei Gruppen von Haupttetraedern: a) 24 Haupttetraeder mit einem imaginären Kantenpaar k_0, einem imaginären e und einem reellen h, b) 72 Haupttetraeder mit einem imaginären Kantenpaar k_0, einem reellen e und einem imaginären h, c) 144 Haupttetraeder mit je einem imaginären Kantenpaar k_0, e, h, während die 240 Eckpunkte $\mathfrak{h}^{(e)}_{0} = \mathfrak{f}^{(k)}_{0}$ (Seitenflächen $({}^{(e)}_{0} = \varphi^{(k)}_{0})$, deren jeder viermal auftritt, durchweg imaginär sind. Die der ersten Gruppe a) entsprechenden 96 reellen Substitutionen, sowie die den beiden Gruppen b) und c) entsprechenden 288 + 576 imaginären Substitutionen vertheilen sich bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten genau in derselben Weise auf die Fundamentaltetraeder, wie die unter A 1) dieses § betrachteten Substitutionen, welche sechszählige Collineationen bedeuten.

B) Correlationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

1) Die 8 . 120 = 960 Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_{i_4}, x_{i_5} gleiches Vorzeichen haben, während die Ge-

sammtzahl der negativen Vorzeichen gerade (einschliesslich Null) ist, bedeuten sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche (vgl. § 9 II A 4) unter b) β)). Die Gleichungen des Complexes Ω', der Kernfläche $F^{(7)}$, des festbleibenden Netzes von Complexen und des linearen Complexes, der beiden festbleibenden speciellen linearen Complexe und ihrer Leitgeraden k_0 sind in den Formeln (47γ) (§ 8 II 6)) für das Beispiel aufgestellt worden:

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} S = [x_3\, x_4\, -x_5\, x_2\, x_1\, -x_6] = [\underline{-1\ 4\ 3\ 2}]_4 = [\underline{-1\ 4\ 2\ 3}]_4 \\ S^5 = [x_5\, x_4\, x_1\, x_2\, -x_3\, -x_6] = [\overline{3\ 1\ -2\ 4}]_5 = [\underline{3\ 1\ -2\ 4}]_5 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} S^2 = [-x_5\, x_2\, -x_1\, x_4\, x_3\, x_6] = [2\ -3\ -1\ 4]_3 \\ S^4 = [-x_3\, x_2\, x_5\, x_4\, -x_1\, x_6] = [2\ 4\ -3\ -1]_2 \end{array} \\ \multicolumn{2}{c}{S^3 = [x_1\, -x_4\, x_3\, -x_2\, x_5\, x_6] = [-4\ 3\ 2\ 1]_6;} \end{array}\right\} \quad (89\iota)$$

S^2 und S^4 bedeuten (vgl. (89α) unter A 1) dieses §) dreizählige geschaarte Collineationen mit dem Axenpaar k_0, S^3 eine Nullcorrelation, deren zugehöriger Complex $x_2 + x_4 = 0$ ist (vgl. § 17 B 2)).

Ausser der Kernfläche $F^{(7)} \ldots 2(-x_1+x_3+x_5)^2 + 3(x_2-x_4)^2 + 6x_6^2 = 0$ wird noch je eine Fläche der Büschel, deren Vierseit durch das Geradenpaar k_0 und je zwei Gerade des anderen Systems der Kernfläche gebildet wird, in sich transformirt; z. B. für

$$\left.\begin{array}{l} \text{das Büschel durch das Geradenpaar } k_0 \text{ und ein Geradenpaar } d_0\text{:} \\ \qquad F^{(1)} \ldots x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0, \\ \text{das Büschel durch das Geradenpaar } k_0 \text{ und ein Geradenpaar } l\text{:} \\ \qquad F^{(6)} \ldots (-x_1+x_3+x_5)^2 + 3x_2^2 + 3x_4^2 = 0, \\ \text{das Büschel durch das Geradenpaar } k_0 \text{ und ein Geradenpaar } h\text{:} \\ \qquad F^{(7)} \ldots 2(-x_1+x_3+x_5)^2 + 3(x_2+x_4)^2 + 6x_6^2 = 0. \end{array}\right| \quad (89\varkappa)$$

Auch diese $8 \,.\, 120 = 960$ Correlationen zerfallen entsprechend der Beschaffenheit der Kernflächen $F^{(7)}$ resp. der sie erzeugenden Geraden in drei Gruppen. Jede der Flächen $F^{(7)}$ enthält eins der 80 imaginären Geradenpaare k_0 als Geradenpaar des einen Systems, so dass durch jedes Geradenpaar k_0 6 Flächen $F^{(7)}$ hindurchgehen; zu den erzeugenden Geraden des zweiten Systems gehört je eins der 36 reellen und der 84 imaginären Geradenpaare d_0, so dass durch jedes Geradenpaar d_0 4 Flächen $F^{(7)}$ hindurchgehen, ferner je eins der 24 reellen und der 216 imaginären Geradenpaare h, so dass durch jedes solches Geradenpaar 2 Flächen $F^{(7)}$ hindurchgehen, und je eins der 48 reellen und der 432 imaginären Geradenpaare l, durch deren jedes eine Fläche $F^{(7)}$ hindurchgeht. Es giebt also folgende

drei Gruppen von Kernflächen $F^{(7)}$: a) 48 reelle Kernflächen mit je einem reellen Geradenpaar l, h und einem imaginären Geradenpaar d_0, b) 144 imaginäre Kernflächen mit je einem imaginären Geradenpaar l, h und einem reellen Geradenpaar d_0, c) 288 imaginäre Kernflächen $F^{(7)}$ mit je einem imaginären Geradenpaar l, h, d_0. Zu jeder Kernfläche gehören zwei sechszählige Correlationen. Die 96 reellen Substitutionen, welche der Gruppe a) entsprechen und die 288 und 576 imaginären Substitutionen, welche bezw. den Gruppen b) und c) entsprechen, vertheilen sich bei ihrer Darstellung in tetraedrischen Coordinaten genau ebenso auf die Fundamentaltetraeder, wie die unter A 1) dieses § betrachteten, welche sechszählige Collineationen bedeuteten.

2) Die 8 . 120 = 960 Substitutionen, bei welchen die beiden vertauschten Elemente x_{i_4}, x_{i_5} entgegengesetztes Vorzeichen haben, während die Gesammtzahl der negativen Vorzeichen eine gerade Zahl ist, bedeuten zwölfzählige Correlationen (vgl. § 9 II B unter 3)). Das Haupttetraeder für vier zusammengehörige Substitutionen S, S^{11}, S^5, S^7 ist dasselbe, wie für die entsprechenden Substitutionen A 2) dieses §, welche zwölfzählige Collineationen bedeuten; die Potenzen S^2, S^{10} bedeuten auch hier zwei zusammengehörige, auf 2 Arten eigentliche, sechszählige Collineationen mit demselben Haupttetraeder und die Bedeutung der Potenzen S^4, S^8 und der Potenz S^6 ist genau dieselbe, wie sie unter A 2) angegeben wurde.

Die Gleichungen des Complexes Ω'', der beiden in sich transformirten Flächen G_1, G_2 nämlich einer Fundamentalfläche und einer der 240 Flächen $F^{(6)}$ sind unter (53ζ) und (53κ′, κ″) in § 8 III unter 5) für das Beispiel aufgestellt worden (vgl. auch (89ϑ)):

$$\left.\begin{aligned} S\; &= [x_3\; x_4\; x_5\; -x_2\; -x_1\; x_6] = [\overline{1\;4\;-2\;3}]_4 = [\underline{1\;4\;-2\;3}]_4 \\ S^5 &= [-x_5\; x_4\; x_1\; -x_2\; x_3\; x_6] = [\overline{4\;2\;-1\;3}]_5 = [\underline{4\;2\;-1\;3}]_5 \\ S^7 &= [x_3\; -x_4\; x_5\; x_2\; -x_1\; x_6] = [\overline{3\;2\;4\;-1}]_4 = [\underline{3\;2\;4\;-1}]_4 \\ S^{11} &= [-x_5\; -x_4\; x_1\; x_2\; x_3\; x_6] = [\overline{3\;1\;2\;-4}]_5 = [\underline{3\;1\;2\;-4}]_5 \end{aligned}\right\} \quad (89\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} S^3 &= [x_1\; x_4\; x_3\; -x_2\; x_5\; -x_6] = [\overline{3\;4\;-1\;2}]_6 = [\underline{3\;4\;-1\;2}]_6 \\ S^9 &= [x_1\; -x_4\; x_3\; x_2\; x_5\; -x_6] = [\overline{2\;1\;4\;-3}]_6 = [\underline{2\;1\;4\;-3}]_6. \end{aligned}\right\} \quad (89\lambda')$$

Die geraden Potenzen von S sind genau mit den in (89ε) gegebenen übereinstimmend; die beiden Potenzen S^3, S^9 bedeuten die vierzähligen

Correlationen (x_{i_4}, x_{i_5}) mit zusammenfallender Kernfläche, welche in § 17 unter B 1) betrachtet wurden.

Die Gleichungen der beiden festbleibenden Gewinde $C_{(1)}$ und $C_{(3)}$ sind in § 8 III 5) unter (53η'), (53η''), diejenigen der beiden Kernflächen unter (53λ'), (53λ'') und diejenige des tetraedralen Complexes der Wechselstrahlen unter (53$\varkappa$) angegeben worden.

Die Anordnung dieser 960 zwölfzähligen Correlationen in drei Gruppen von a) 4.24, b) 4.72, c) 4.144, der Beschaffenheit der Haupttetraeder entsprechend und die Vertheilung der zugehörigen 96 reellen, 288 und 576 imaginären, in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutioneu auf die Fundamentaltetraeder ist genau dieselbe, wie für die zwölfzähligen Collineationen, welche unter A 2) dieses § betrachtet wurden.

§ 21.

Collineationen und Correlationen, welche aus den 120 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$ hervorgehen.

A) Collineationen, den negativen Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die 16 . 120 = 1920 derartigen, mit einer ungeraden Anzahl negativer Vorzeichen versehenen Substitutionen bedeuten zu je zweien zusammengehörige 6zählige, auf eine Art uneigentliche Collineationen (vgl. § 9 I B unter 2b)). Die Eckpunkte (Seitenflächen) eines Haupttetraeders sind je ein Punkt $\mathfrak{c}$ und ein Punkt $\mathfrak{d}$ (je eine Ebene ε und eine Ebene δ), und je ein Punktpaar $\mathfrak{k}_0$ (ein Ebenenpaar $\varkappa_0$), die Kanten sind je ein Geradenpaar k, k' und zwei Geradenpaare p', p''. Die Coordinaten dieser Elemente sind in § 8 I 1)) unter (39γ) und (39δ) und die Gleichung des zugehörigen tetraedralen Complexes unter (39ε) für das folgende Beispiel aufgestellt worden:

$$\left.\begin{array}{ll} S\;=[x_6\,-x_5\,x_2\,-x_1\,x_4\,-x_3]=[-1\;3\;4\;2]_1 & S^2=[x_3\,x_4\,x_5\,x_6\,x_1\,x_2]=[1\;4\;2\;3]_1 \\ S^5=[x_4\,-x_3\,x_6\,-x_5\,x_2\,-x_1]=[-1\;4\;2\;3]_1 & S^4=[x_5\,x_6\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4]=[1\;3\;4\;2]_1 \\ \multicolumn{2}{c}{S^3=[-x_2\,x_1\,-x_4\,x_3\,-x_6\,x_5]_1=[-1\;2\;3\;4]_1.} \end{array}\right\}\quad(90\alpha)$$

S^2 und S^4 bedeuten dreizählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar k, k' (vergl. (83α) in § 14 unter A), S^3 die centrisch-involutorische Collineation mit Centrum $\mathfrak{c}_1$ und Homologieebene ε_1 (vgl. (87α) in § 18 unter A 1)).

Dass diese sechszähligen Collineationen auf eine Art uneigentlich sind, folgt aus den Wurzelwerthen für σ und τ (vgl. (62δ)) und aus den auf das Haupttetraeder bezogenen Transformationsformeln (62α), (62β) in § 9 I B unter 2b).

Zu den Flächen des Netzes (Gewebes) (vgl. (28λ') in § 8 I):

$$k\, Z_1^2 + l\, Z_2^2 + 2\, m\, Z_3\, Z_4 = 0,$$

welche auf die zweite Art in sich transformirt werden, gehört die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$, die Fläche $F_1^{(2)}$ (vgl. (18β) . . (18ε) in § 7 unter 2)) und die Fläche $F^{(9)}$, deren Gleichungen unter (25β) . . (25η) in § 7 unter 9) angegeben sind.

Die 1920 sechszähligen Collineationen zerfallen entsprechend der Beschaffenheit der Haupttetraeder in drei Gruppen:

a) Die 96 Haupttetraeder der ersten Gruppe haben zu Eckpunkten (Flächen) je einen reellen Punkt $\mathfrak{e}$ (eine reelle Fläche ε), einen reellen Punkt $\mathfrak{d}$ (eine reelle Fläche δ) und zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{k}_0$ (zwei imaginäre Ebenen $\varkappa_0$); das Kantenpaar k ist reell, die beiden Kantenpaare p', p'' imaginär der ersten Art.

b) Die 288 Haupttetraeder der zweiten Gruppe haben einen reellen Eckpunkt $\mathfrak{e}$, einen imaginären Eckpunkt $\mathfrak{d}$, zwei imaginäre Eckpunkte $\mathfrak{k}_0$ (analoges gilt für die Flächen); die Kantenpaare k und p' sind imaginär der ersten, das Kantenpaar p'' ist imaginär der zweiten Art.

c) Die 576 Haupttetraeder der dritten Gruppe haben durchweg imaginäre Elemente; das Kantenpaar k ist imaginär der ersten, die beiden Kantenpaare p', p'' imaginär der zweiten Art.

Jeder Punkt $\mathfrak{e}$ tritt 16 mal, jeder Punkt $\mathfrak{k}_0$ 3 mal, jeder Punkt $\mathfrak{d}$ 1 mal als Eckpunkt auf, jedes Geradenpaar k tritt 6 mal, jedes Geradenpaar p' und p'' einmal als Kantenpaar eines Haupttetraeders auf.

Jedes Haupttetraeder gehört zu zwei Substitutionen S, S^5; die 192 der Gruppe a) zugehörigen reellen Substitutionen entfallen bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten zu 16 . 2 auf das Tetraeder T_1, zu je 16 . 5 auf die Tetraeder T_2, T_3; die 576 zu b) gehörigen imaginären und die 1152 zu c) gehörigen imaginären Substitutionen bez. zu 16 . 6 auf T_1, zu je 16 . 3 auf T_2, T_3, zu je 16 . 8 auf T_4 . . T_6 und zu je 16 . 8 auf die Tetraeder T_7 . . T_{15}.

B) Correlationen, den positiven Vorzeichencombinationen entsprechend.

Die 16 . 120 = 1920 mit einer geraden Anzahl (einschliesslich Null) negativer Vorzeichen versehenen Substitutionen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$ bedeuten zu je zweien zusammengehörige allgemeine sechszählige Correlationen (vgl. § 9 II B unter 1)). Die Eckpunkte (Seitenflächen) eines Haupttetraeders sind je ein Punktpaar $\mathfrak{p}$ (ein Ebenenpaar π) (vgl. § 4 unter 7) Formeln (13ι) und § 8 III Formeln (50ζ)) und ein Punktpaar $\mathfrak{k}_0$ (ein Ebenenpaar $\varkappa_0$); das Kantenpaar K_{14}, K_{23} wird durch zwei Gerade k, k' gebildet, welche die Leitgeraden für die beiden festbleibenden Complexe $C_{(6)}$ und das Axenpaar für die beiden den Potenzen S^2 und S^4 entsprechenden dreizähligen axialen Collineationen sind, während die beiden anderen Kantenpaare durch 2 Geradenpaare t (vergl. § 4 unter 7)) gebildet werden. Die Coordinaten dieser Elemente des Haupttetraeders, die Gleichungen der Complexe Ω'', der festbleibenden Gewinde, der beiden auf die erste Art in sich transformirten Flächen G_1, G_2, nämlich einer Fläche $F^{(2)}$ und einer Fläche $F^{(9)}$, der Kernflächen K_1, K_2 sind in § 8 III unter 2) in den Formeln (50δ) bis (50ι) für das folgende Beispiel aufgestellt worden:

$$\left.\begin{aligned} S\ &= [x_6\, x_5\, x_2\, x_1\, x_4\, x_3] = [\overline{-1\ 3\ 4\ 2}]_1 = [\underline{-1\ 3\ 4\ 2}]_1 \\ S^5 &= [x_4\, x_3\, x_6\, x_5\, x_2\, x_1] = [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_1 = [\underline{-1\ 4\ 2\ 3}]_1 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (90\beta)$$

$$\text{wobei } S^2 = [x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_1\, x_2] = [1\ 4\ 2\ 3]_1$$
$$S^4 = [x_5\, x_6\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4] = [1\ 3\ 4\ 2]_1$$

die beiden auch unter A 1) in (90α) auftretenden dreizähligen axialen Collineationen bedeuten, während

$$S^3 = [x_2\, x_1\, x_4\, x_3\, x_6\, x_5] = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1 = [\underline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1$$

die Polarcorrelation mit der Basisfläche $F^{(2)}_1 \ldots -z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 = 0$ (vgl. § 18 unter B 1)) darstellt.

Der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen zerfällt in die beiden speciellen linearen Complexe, deren Leitgerade je eine Gerade k, k' ist.

Die 2 . 960 = 1920 sechszähligen Correlationen zerfallen ebenfalls entsprechend der Beschaffenheit der Haupttetraeder in drei Gruppen.

a) Die 96 Haupttetraeder der ersten Gruppe haben zu Eckpunkten ein reelles Punktpaar $\mathfrak{p}$ und ein imaginäres Punktpaar $\mathfrak{k}_0$ (analoges gilt für die Flächen π und die Ebenen $\varkappa_0$); das Kantenpaar k ist reell, die beiden Kantenpaare t sind imaginär der ersten Art.

b) c) Die 288 Haupttetraeder der zweiten und die 576 Haupttetraeder der dritten Gruppe haben zu Eckpunkten je ein imaginäres Punktpaar $\mathfrak{p}$ und ein imaginäres Punktpaar $\mathfrak{k}_0$; das Kantenpaar k ist imaginär der ersten Art. Für die Gruppe b) ist aber das eine Kantenpaar t imaginär der ersten, das zweite imaginär der zweiten Art; für die Gruppe c) dagegen sind beide Kantenpaare t imaginär der zweiten Art (vgl. § 4 unter 7)).

Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ tritt einmal, jeder Punkt $\mathfrak{k}_0$ dreimal als Eckpunkt auf, jedes Geradenpaar k tritt sechsmal, jedes Geradenpaar t viermal als Kantenpaar eines Haupttetraeders auf.

Die Vertheilung der 192 der Gruppe a) zugehörigen reellen und der 576 und 1152 bez. der Gruppe b) und c) zugehörigen imaginären Substitutionen bei der Darstellung in tetraedrischen Coordinaten auf die Fundamentaltetraeder T_i ist genau dieselbe, wie für die Substitutionen, welche sechszählige Collineationen bedeuten (vgl. A am Ende dieses §).

§ 22.
Recapitulation und Zusammenstellung der Resultate.

Die in den vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Resultate sind in den folgenden Tabellen A), B), C) nochmals übersichtlich zusammengestellt. Die Tabellen A) und B) enthalten in leicht verständlicher Anordnung bez. die sämmtlichen Collineationen und Correlationen nebst Angabe der charakteristischen geometrischen Elemente. Dabei bedeuten die den vorgesetzten Nummern zugefügten einfachen und doppelten Klammern, dass die betreffenden Substitutionen bez. in die Klasse der positiven oder der negativen Permutationen der x_i gehören; die einzelnen Summanden der Anzahlen beziehen sich auf die im Vorhergehenden unterschiedenen Gruppen derselben und die fett gedruckten Summanden entsprechen den für die nachfolgenden Untersuchungen in Betracht kommenden reellen, in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen.

In der Tabelle C) ist in übersichtlicher Anordnung die Vertheilung der in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen gegeben, wobei die den reellen Substitutionen entsprechenden Zahlen ebenfalls fett gedruckt sind; die ersten Summanden entsprechen (vergl. § 10) den Permu-

tationen der Coordinaten für die Ecken und Flächen der Fundamentaltetraeder T_i, die zweiten Summanden (deren Gesammtzahl die dreifache der ersteren ist) denjenigen Substitutionen, bei welchen je zwei Colonnen der Substitutionsdeterminante mit dem Factor i multiplicirt sind.

A) Collineationen.

	Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Substitution	Vgl.
I	Identität	1)	**1**	(x_{i_1})	§ 11 A 1)

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Axenpaar	Substitution	Vgl.
II Geschaart-involutorische Collineationen	1)	**9+6** = 15	1 Geradenpaar e	(x_{i_1})	§ 11 A 2)
	2)	**36**+72+72 = 180	„ „ d	$(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4})$	§ 13 A 1)
	3))	**36+12**+72 = 120	„ „ d_0	$(x_{i_1} x_{i_2})$	§ 17 A 1))
III a) Dreizählige geschaarte Collineationen	1)	**16**+48+96 = 160	„ „ k_0	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$	§ 12 A 1)
III b)) Vierzählige geschaarte Collineationen	2))	**12**+18 = 30	„ „ e	$(x_{i_1} x_{i_2})$	§ 17 A 2))
IV a) Dreizählige axiale Collineationen	1)	**64**+576 = 640	„ „ k, k'	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) (x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	§ 14 A 1)
IV b) Vierzählige axiale Collineationen	1)	**36**+72+72 = 180	„ „ e	$(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4})$	§ 13 A 2)

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Centrum	Homologie-Ebene	Substitution	Vgl.
V) Centrisch-involutorische Collineationen	1))	**24**+36 = 60	1 Punkt $\mathfrak{e}$	1 Ebene ε	$(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4}) (x_{i_5} x_{i_6})$	§ 18 A 1))

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Haupttetraeder			Substitution	Vgl.
			Eckpunkte	Flächen	Kanten		
VI Vierzählige allgemeine (auf 2 Arten eigentliche, auf 2 Arten uneigentliche) Collineationen.	1))	**36**+18+36 = 90	4 Punkte $\mathfrak{e}$	4 Ebenen ε	3 Geradenp. e	$(x_{i_1}\, x_{i_2})$	§ 17 A 3))
	2)	**72**+144+72+72 = 360	4 Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$	4 Ebenen $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$	1 Geradenpaar e 2 Geradenp. d_0	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})$	§ 13 A 3)
	3))	**72**+36+72 = 180	2 Punktpaare $\mathfrak{e}$ von zwei Tetraedern T_i	2 Ebenenpaare ε von zwei Tetraedern T_i	1 Geradenpaar e 2 Geradenp. d	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})\,(x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 18 A 2))
	4))	144+288+288 = 720	4 Punkte $\mathfrak{f}$	4 Ebenen $\varkappa$	1 Geradenpaar d 2 Geradenp. s	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4})$	§ 19 A 1))
	5)	**144**+288+288 = 720	4 Punkte $\mathfrak{d}_0$	4 Ebenen δ_0	1 Geradenpaar d 2 Geradenp. r	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 15 A 1)

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Haupttetraeder			Substitution	Vgl.
			Eckpunkte	Flächen	Kanten		
VII a) Sechszählige, auf 2 Arten eigentliche Collineationen	1)	**48**+144+288 = 480	4 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(k)}$	4 Ebenen $\zeta_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$	1 Geradenp. k_0 1 Geradenpaar e 1 „ h	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})$	§ 12 A 2)
	2))	**96**+288+576 = 960	4 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(d)} = \mathfrak{i}_0^{(k)}$	4 Ebenen $\zeta_0^{(d)} = \iota_0^{(k)}$	1 Geradenp. k_0 1 Geradenpaar d 1 „ l	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})\,(x_{i_4}\, x_{i_5})$	§ 20 A 1))
VII b) Sechszählige, auf eine Art uneigentliche Collineationen	1))	**192**+576+1152 = 1920	1 Punkt $\mathfrak{e}$ 1 „ $\mathfrak{d}$ 2 Punkte $\mathfrak{k}_0$	1 Ebene ε 1 „ δ 2 Ebenen $\varkappa_0$	1 Geradenpaar k 1 „ p' 1 „ p''	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 21 A))
VIII a) Achtzählige, auf eine Art eigentliche Collineationen	1))	144+288+288 = 720	2 Punkte $\mathfrak{e}$ 2 „ $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$	2 Ebenen ε 2 „ $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$	1 Geradenpaar e 2 Geradenp. q	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4})$	§ 19 A 2))
VIII b) Achtzählige, auf eine Art uneigentliche Collineationen	1)	**144**+288+288 = 720	wie für VIII a))			$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 15 A 2)
IX Zwölfzählige, auf eine Art eigentliche Collineationen	1))	**96**+288+576 = 960	wie für VII a) 1)			$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})\,(x_{i_4}\, x_{i_5})$	§ 20 A 2))
X Fünfzählige, auf eine Art uneigentliche Collineationen	1)	2304	4 Punkte $\mathfrak{m}$	4 Ebenen μ	1 Geradenp. m 2 Geradenp. n	$(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5})$	§ 16 A)

B) Correlationen.

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Zugehöriger linearer Complex	Substitution	Vgl.
I. Null-Correlationen	1)	**6**	Fundamental-Complex $C_{(1)} \dots x_{i_1} = 0$	(x_{i_1})	§ 11 B 1)
	2))	**12**+18 = 30	$C_{(2)} \dots x_{i_1} \pm x_{i_2} = 0$	$(x_{i_1}\, x_{i_2})$	§ 17 B 2))

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Basis-flächen	Substitution	Vgl.
II. Polar-Correlationen	1)	**1+9 = 10**	$F^{(1)}$	(x_{i_1})	§ 11 B 2)
	2)	**36**+72+72 = 180	$F^{(4)}$	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})$	§ 13 B 1)
	3))	**36**+18+36 = 90	$F^{(3)}$	$(x_{i_1}\, x_{i_2})$	§ 17 B 3))
	4))	**24**+36 = 60	$F^{(2)}$	$(x_{i_1}\, x_{i_2})(x_{i_3}\, x_{i_4})(x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 18 B 1))

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Axen	Festbleibende Strahlbüschel: Mittelpkt	Festbleibende Strahlbüschel: Ebene	Substitution	Vgl.
IIIa) Vierzählige Axen-Correlationen erster Art	1)	**36**+72+72 = 180	1 Geraden-paar e	1 Punkt-paar $\mathfrak{e}$	1 Ebenen-paar ε	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4})$	§ 13 B 2)
IIIb) Vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art	1))	**72**+36+72 = 180	1 Geraden-paar e	1 Punkt-paar $\mathfrak{e}$	1 Ebenen-paar ε	$(x_{i_1}\, x_{i_2})(x_{i_3}\, x_{i_4})(x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 13 B 2))
	2)	**144**+288+288 = 720	1 Geraden-paar d	1 Punkt-paar $\mathfrak{e}$	1 Ebenen-paar ε	$(x_{i_1}\, x_{i_2})\,(x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$	§ 15 B 1)

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Kernfläche	Leitgeraden der beiden festbleibenden speciellen linearen Complexe	Substitution	Vgl.
IV Vierzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche	1)	**72**+144+72+72 = 360	$F^{(3)}$	1 Geradenpaar e	$(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})$	§ 13 B 3)
	2))	**36**+**12**+72 = 120	$F^{(1)}$	1 Geradenpaar e	$(x_{i_1} x_{i_2})$	§ 17 B 1))
	3))	144+288+288 = 720	$F^{(5)}$	1 Geradenpaar d	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$	§ 19 B 1))
Va) Sechszählige Correlationen mit z. K., S^3 eine Polarcorrelation	1)	**16**+48+96 = 160	$F^{(1)}$	1 Geradenpaar k_0	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$	§ 12 B 1)
Vb) Sechszählige Correlationen mit z. K., S^3 eine Nullcorrelation	1)	**48**+144+288 = 480	$F^{(6)}$	1 Geradenpaar k_0	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$	§ 12 B 2)
	2))	**96**+288+576 = 960	$F^{(7)}$	1 Geradenpaar k_0	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5})$	§ 20 B 1))

Beschaffenheit	Nummer	Anzahl	Haupttetraeder			Substitution	Vgl.
			Eckpunkte	Flächen	Kanten		
VI Sechszählige allgemeine Correlationen	1)	**64**+576 = 640	4 Punkte $\mathfrak{k}_0$	4 Ebenen $\varkappa_0$	1 Geradenpaar k, k' 2 Geradenpaare k_0	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	§ 14 B)
	2))	**192**+576+1152 = 1920	1 Punktpaar $\mathfrak{p}$ 1 Punktpaar $\mathfrak{k}_0$	1 Ebenenpaar π 1 Ebenenpaar $\varkappa_0$	1 Geradenpaar k, k' 2 Geradenpaare t	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	§ 21 B))
VIIa) Achtzählige allgemeine Correlationen; festbleibende Complexe: $x_{i_5} = 0$, $x_{i_6} = 0$	1))	144+288+288 = 720	1 Punktpaar $\mathfrak{e}$ 1 Punktpaar $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$	1 Ebenenpaar ε 1 Ebenenpr. $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$	1 Geradenpaar e 2 Geradenpaare q	$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$	§ 19 B) 2))
VIIb) Achtzählige allgemeine Correlationen; festbleibende Complexe: $x_{i_1} - x_{i_2} = 0$; $x_{i_1} + x_{i_2} = 0$.	1)	**144**+288+288 = 720	wie für VII a) und für VIII a), b) (unter A)			$(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	§ 15 B 2)
VIII Zwölfzählige allgemeine Correlationen	1))	**96**+288+576 = 960	wie für VII a) 1) (unter A) und für IX „ „			$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5})$	§ 20 B 2))
IX Zehnzählige allgemeine Correlationen	1)	2304	wie für X (unter A)			$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$	§ 16 B)

C.

Substitution	Von den Substitutionen entfallen auf die Fundamentaltetraeder T_i je:					Summe
	T_1	T_2, T_3	$T_{10} .. T_{15}$	$T_4 .. T_6$	$T_7 .. T_9$	
1) (x_{i_1})	**1**+0	0+0	0+0	0+0	0+0	1
2) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$	0+0	**2**+0	2+0	0+4	0+4	40
3) $(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4})$	**3**+6	**3**+0	3+0	0+2	0+2	45
4) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) (x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	**2**+6	**1**+3	1+3	0+0	0+0	40
5) $(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	0+6	0+6	0+6	**6**+0	6+0	90
6) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$	0+0	0+9	0+9	0+12	0+12	144
7)) $(x_{i_1} x_{i_2})$	0+3	0+0	0+0	**2**+0	2+0	15
8)) $(x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4}) (x_{i_5} x_{i_6})$	**4**+3	**1**+0	1+0	0+0	0+0	15
9)) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$	0+6	0+9	0+9	0+2	0+2	90
10)) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) (x_{i_4} x_{i_5})$	0+0	0+6	0+6	**4**+8	4+8	120
11)) $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$	**2**+6	**5**+3	5+3	0+8	0+8	120.

§ 23.

Ueber einige der wichtigsten Transformationsgruppen, welche als Untergruppen in der Hauptgruppe enthalten sind.

Die sämmtlichen linearen Transformationen, welche durch die 720 Permutationen der 6 Liniencoordinaten x_i bei gleichzeitiger Anwendung der 32 Vorzeichencombinationen resultiren, nämlich die 720 . 32 = 23040 Substitutionen, welche 11520 Collineationen und ebensoviele Correlationen bedeuten, bilden eine Gruppe, wobei die 11520 Collineationen eine invariante (ausgezeichnete) Untergruppe darstellen, während die 11520 Correlationen für sich keine Gruppe bilden.

Von den zahlreichen Untergruppen der Hauptgruppe wollen wir hier nur einige der wichtigsten aufführen, insbesondere die für die nachfolgende Anwendung auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes in Betracht kommenden. Die geometrische Bedeutung der Substitution irgend einer Untergruppe ist aus den in den §§ 11 bis 21 gewonnenen Resultaten sofort zu entnehmen.

I) Zunächst sei diejenige Gruppe hervorgehoben, welche durch die 720, durchweg mit positiven Vorzeichen versehenen Permutationen der x_i

gebildet wird. Die den 360 positiven (negativen) Permutationen entsprechenden Substitutionen bedeuten Collineationen (Correlationen), die durch die 360 Collineationen bestimmte Gruppe $G_{360}^{(c)}$ ist eine invariante Untergruppe der Hauptgruppe G_{720}.[1]) Der obere Index c soll ausdrücken, dass die Transformationen einer Gruppe nur aus Collineationen bestehen. Die gesammten Transformationen der Gruppe G_{720} sind folgende:

A) Collineationen ($G_{360}^{(c)}$).

1) **1** identische Transformation (x_{i_1}) (vgl. § 22 A I),
2) **9**+18+18 = 45 geschaart involutorische Collineationen $(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})$, (vgl. § 22 A II 2)),
3) **4**+12+24 = 40 dreizählige geschaarte „ $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$, (vgl. § 22 A III a)),
4) **4**+12+24 = 40 dreizählige axiale „ $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$, (vgl. § 22 A IV a)),
5) **18**+36+36 = 90 vierzählige allgemeine „ $(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$, (vgl. § 22 A VI 5)),
6) 144 fünfzählige „ „ $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$ (vgl. § 22 A X).

B) Correlationen.

1) **6**+9 = 15 Nullcorrelationen $(x_{i_1} x_{i_2})$, Complexe $x_{i_1} - x_{i_2} = 0$, (vgl. § 22 B I 2))),
2) **6**+9 = 15 Polarcorrelationen $(x_{i_1} x_{i_2})(x_{i_3} x_{i_4})(x_{i_5} x_{i_6})$, Kernflächen $F^{(1)}$, (vgl. § 22 B II 4))),
3) 18+36+36 = 90 vierzählige Correlationen mit zusammenf. Kernfläche $F^{(5)}$ $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$ (vgl. § 22 B IV 3))),
4) **12**+36+72 = 120 sechszählige Correlationen mit zusammenf. Kernfläche $F^{(7)}$ $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})(x_{i_4} x_{i_5})$, (vgl. § 22 B V b 2))),
5) **12**+36+72 = 120 sechszählige allgemeine Correlationen $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6})$, (vgl. § 22 B VI 2))).

. . (G_{720})

Die fetten Zahlen bedeuten wiederum Transformationen, welche reellen Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten entsprechen; dieselben bilden

[1]) Vgl. auch für die folgenden Betrachtungen z. B. Cayley: On the substitution groups for six letters. Quarterly journal. Vol. XXV. 1891. p. 78 ff.

für sich eine Gruppe G_{72}, von welcher die Gruppe der 36 Collineationen $G_{36}^{(c)}$ eine invariante Untergruppe bildet. Die Transformationen von G_{72} lassen die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ in Ruhe; die Gruppe G_{72} ist auch als Untergruppe in den unter II) zu betrachtenden Gruppen G_{1152} und G_{2304} enthalten, durch deren Transformationen bezw. die Figur der drei desmischen Tetraeder $T_1 \,..\, T_3$ und der beiden conjugirten desmischen Systeme $T_1 \,..\, T_3$ und $T_4 \,..\, T_6$ in sich selbst übergeführt wird. Die durchweg reellen Transformationen der Gruppe G_{72} sind folgende:

$$\ldots (G_{72})$$

A) Collineationen ($G_{36_1}^{(c)}$)

1) Die identische Transformation $(x_{i_1}) = [1\ 2\ 3\ 4]_1$;

2) 3 . 3 = 9 geschaart involutorische Collineationen (Axenpaar d):

$$\left.\begin{array}{lll} (x_1\, x_3)(x_2\, x_4) = [-1\ 3\ 2\ 4]_1 & (x_1\, x_3)(x_6\, x_2) = [-1\ 2\ 4\ 3]_2 & (x_1\, x_3)(x_4\, x_6) = [-1\ 4\ 3\ 2]_3 \\ (x_3\, x_5)(x_4\, x_6) = [-1\ 2\ 4\ 3]_1, & (x_3\, x_5)(x_2\, x_4) = [-1\ 4\ 3\ 2]_2, & (x_3\, x_5)(x_6\, x_2) = [-1\ 3\ 2\ 4]_3 \\ (x_5\, x_1)(x_6\, x_2) = [-1\ 4\ 3\ 2]_1 & (x_5\, x_1)(x_4\, x_6) = [-1\ 3\ 4\ 2]_2 & (x_5\, x_1)(x_2\, x_4) = [-1\ 2\ 4\ 3]_3 \end{array}\right\} \text{vgl. (§ 13 A 1))}$$

3) 2 . 2 = 4 dreizählige geschaarte Collineationen (Axenpaar k_0):

$$\left.\begin{array}{ll} S\ = (x_1\, x_3\, x_5) = [1\ 3\ 4\ 2]_2 & S = (x_2\, x_4\, x_6) = [1\ 3\ 4\ 2]_3 \\ S^2 = (x_1\, x_5\, x_3) = [1\ 4\ 2\ 3]_3, & S^2 = (x_2\, x_6\, x_4) = [1\ 4\ 2\ 3]_2 \end{array}\right\} \text{(vgl. § 12 A 1));}$$

4) 2 . 2 = 4 dreizählige axiale Collineationen
(Reihen- und Büschelaxe k, k'):

$$\left.\begin{array}{ll} S\ = (x_1\, x_3\, x_5)(x_2\, x_4\, x_6) = [1\ 4\ 2\ 3]_1 & S\ = (x_1\, x_3\, x_5)(x_2\, x_6\, x_4) = [1\ 2\ 3\ 4]_3 \\ S^2 = (x_1\, x_5\, x_3)(x_2\, x_6\, x_4) = [1\ 3\ 4\ 2]_1, & S^2 = (x_1\, x_5\, x_3)(x_2\, x_4\, x_6) = [1\ 2\ 3\ 4]_2 \end{array}\right\} \text{(vgl. § 14 A Formeln (83}\alpha\text{));}$$

5) 2 . 9 = 18 vierzählige Collineationen
(Haupttetraeder: Eckpunkte $\mathfrak{d}_0$, Ebenen δ_0):

$$\begin{array}{l} S = (x_1\, x_4)(x_2\, x_3\, x_6\, x_5) = [1\ {-4}\ {-2}\ 3]_4 \\ S^3 = (x_1\, x_4)(x_2\, x_5\, x_6\, x_3) = [1\ {-3}\ {-2}\ 4]_5 \end{array} \quad S^2 = (x_2\, x_6)(x_3\, x_5) = [-1\ 3\ 2\ 4]_3 \quad \text{vgl. (§ 15 A 1))}$$

analog: $S = (x_1\, x_2)(x_3\, x_4\, x_5\, x_6)$; $S = (x_1\, x_6)(x_2\, x_3\, x_4\, x_5)$;
$S^3 = (x_1\, x_2)(x_3\, x_6\, x_5\, x_4)$; $S^3 = (x_1\, x_6)(x_2\, x_5\, x_4\, x_3)$;
$S = (x_3\, x_2)(x_1\, x_4\, x_5\, x_6)$; $S = (x_3\, x_4)(x_1\, x_2\, x_5\, x_6)$; $S = (x_3\, x_6)(x_1\, x_2\, x_5\, x_4)$;
$S^3 = (x_3\, x_2)(x_1\, x_6\, x_5\, x_4)$; $S^3 = (x_3\, x_4)(x_1\, x_6\, x_5\, x_2)$; $S^3 = (x_3\, x_6)\, x_1\, x_4\, x_5\, x_2)$;
$S = (x_5\, x_2)(x_1\, x_4\, x_3\, x_6)$; $S = (x_5\, x_4)(x_1\, x_2\, x_3\, x_6)$; $S = (x_5\, x_6)(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$;
$S^3 = (x_5\, x_2)(x_1\, x_6\, x_3\, x_4)$; $S^3 = (x_5\, x_4)(x_1\, x_6\, x_3\, x_2)$; $S^3 = (x_5\, x_6)(x_1\, x_4\, x_3\, x_2)$.

B) Correlationen.

1) 6 Nullcorrelationen: Zugehöriger linearer Complex: $x_{i_1} - x_{i_2} = 0$.

$(x_1\, x_3) = [1\ 2\ {-3}\ 4]_4 = [\underline{1\ 2\ {-3}\ 4}]_4$, Complex: $x_1 - x_3 = 0$,
$(x_2\, x_4) = [1\ {-2}\ {-3}\ 4]_5 = [\underline{1\ {-2}\ {-3}\ 4}]_5$, „ $x_2 - x_4 = 0$,

analog: $(x_3\, x_5)$, $(x_5\, x_1)$, $(x_4\, x_6)$, $(x_6\, x_2)$. (vgl. § 17 B 2)).

2) 6 Polarcorrelationen: Kernfläche $F^{(2)}$ (vgl. § 18 B 1)).

$$(x_1\,x_2)\,(x_3\,x_4)\,(x_5\,x_6) = [-1\ 2\ 3\ 4]_1 = [-1\ 2\ 3\ 4]_1\,.\,F^{(2)}\,.\,.\,(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2+(x_5-x_6)^2 \equiv$$
$$\equiv -z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2+z_4{}^2 = 0;$$

analog: $(x_1\,x_4)\,(x_3\,x_6)\,(x_5\,x_2)$, $(x_1\,x_6)\,(x_3\,x_2)\,(x_5\,x_4)$, $(x_1\,x_2)\,(x_3\,x_6)\,(x_5\,x_4)$, $(x_1\,x_4)\,(x_3\,x_2)\,(x_5\,x_6)$, $(x_1\,x_6)\,(x_3\,x_4)\,(x_5\,x_2)$.

3) $2\,.\,6 = 12$ sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F^{(7)}$ (vgl. § 20 B 1)).

$$\begin{matrix} S \ = (x_1\,x_3\,x_5)\,(x_2\,x_4) = [-1\ 3\ 4\ 2]_4 = [-1\ 3\ 4\ 2]_4 \\ S^5 = (x_1\,x_5\,x_3)\,(x_2\,x_4) = [1\ 4\ -2\ 3]_6 = [1\ 4\ -2\ 3]_6 \end{matrix},\ \begin{matrix} S^2 = (x_1\,x_5\,x_3) \\ S^4 = (x_1\,x_3\,x_5) \end{matrix},\ S^3 = (x_2\,x_4); \qquad \ldots (G_{72})$$

analog:

$$S \ = (x_1\,x_3\,x_5)\,(x_4\,x_6),\ (x_1\,x_3\,x_5)\,(x_6\,x_2),\ (x_2\,x_4\,x_6)\,(x_1\,x_3),\ (x_2\,x_4\,x_6)\,(x_3\,x_5),\ (x_2\,x_4\,x_6)\,(x_5\,x_1);$$
$$S^5 = (x_1\,x_5\,x_3)\,(x_4\,x_6),\ (x_1\,x_5\,x_3)\,(x_6\,x_2),\ (x_2\,x_6\,x_4)\,(x_1\,x_3),\ (x_2\,x_6\,x_4)\,(x_3\,x_5),\ (x_2\,x_6\,x_4)\,(x_5\,x_1).$$

4) $2\,.\,6 = 12$ sechszählige allgemeine Correlationen (vgl. § 21 B).

$$\begin{matrix} S \ = (x_1\,x_4\,x_5\,x_2\,x_3\,x_6) = [-1\ 4\ 2\ 3]_1 = [-1\ 4\ 2\ 3]_1 \\ S^5 = (x_1\,x_6\,x_3\,x_2\,x_5\,x_4) = [-1\ 3\ 4\ 2]_1 = [-1\ 3\ 4\ 2]_1 \end{matrix},\ \begin{matrix} S^2 = (x_1\,x_5\,x_3)(x_4\,x_2\,x_6) \\ S^4 = (x_1\,x_5\,x_3)(x_2\,x_4\,x_6) \end{matrix},\ \left\{\begin{matrix} S^3 = (x_1\,x_2) \\ (x_3\,x_4)\,(x_5\,x_6); \end{matrix}\right.$$

analog:

$$S \ = (x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6),\ (x_1\,x_2\,x_5\,x_6\,x_3\,x_4),\ (x_1\,x_4\,x_3\,x_2\,x_5\,x_6),\ (x_1\,x_2\,x_3\,x_6\,x_5\,x_4),\ (x_1\,x_2\,x_5\,x_4\,x_3\,x_6);$$
$$S^5 = (x_1\,x_6\,x_5\,x_4\,x_3\,x_2),\ (x_1\,x_4\,x_3\,x_6\,x_5\,x_2),\ (x_1\,x_6\,x_5\,x_2\,x_3\,x_4),\ (x_1\,x_4\,x_5\,x_6\,x_3\,x_2),\ (x_1\,x_6\,x_3\,x_4\,x_5\,x_2).$$

In der Gruppe G_{72} ist ausser der Untergruppe $G^{(c)}_{36_1}$ noch eine zweite Untergruppe G_{36_2} enthalten, deren Transformationen durch die in (G_{72}) unter A) 1), 2), 3), 4) aufgeführten $1+9+4+4 = 18$ Collineationen und durch die unter B) 1) und 3) aufgeführten $6+12 = 18$ Correlationen gebildet werden.[1]

Ferner enthält die Gruppe G_{36_1} eine Untergruppe G_{18_1},[2] welche aus den in (G_{72}) unter A) 1), 3), 4) aufgeführten $1+4+4 = 9$ Collineationen und von den unter B) 2) und 4) aufgeführten Correlationen aus bez. 3 und 6 besteht; die Gruppe G_{36_2} enthält zwei Untergruppen G_{18_2} und G_{18_3}, und zwar besteht G_{18_2}[3] aus den unter A) 1), 2), 3), 4) aufgeführten $1+9+4+4 = 18$ Collineationen, dagegen G_{18_3}[4] aus den $1+4+4 = 9$ Collineationen (A) 1), 3), 4)) und aus 3 der unter B) 2), sowie aus 6 der unter B) 3) aufgeführten Correlationen.

Eine gemeinsame Untergruppe von G_{18_1}, G_{18_2}, G_{18_3} ist endlich die Gruppe $G^{(c)}_9$, welche die $1+4+4 = 9$ Collineationen A) 1), 3), 4)) enthält.

[1] Diese Gruppe G_{36_2} wird von Cayley a. a. O. durch (a b c) all (d e f) all bezeichnet.

[2] Bei Cayley durch (a d . b e . c f) } (a b c) cyc. (d e f) cyc. { bezeichnet.

[3] Bei Cayley durch } (a b c) all (d e f) all { pos. bezeichnet.

[4] Bei Cayley: (a b c) all (d e f) cyc.

[5] Bei Cayley: (a b c) cyc. (d e f) cyc.

Aus der Hauptgruppe G_{720} ergeben sich 10 zu einander conjugirte Gruppen G_{72} (bez. $G_{36}^{(c)}$); bei der Transformation einer jeden bleibt eine der 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}$ in Ruhe. Je zwei dieser Gruppen z. B. $G_{720}^{(1)}$ und $G_{720}^{(2)}$ (welche bez. zu $F_1^{(1)}$ und $F_2^{(1)}$ gehören) haben (als Durchschnitt) eine Gruppe G_8 gemein, deren Substitutionen sind:

$$\text{A)} \left| \begin{array}{l} S \;\; = (x_1\,x_2)\,(x_3\,x_4\,x_5\,x_6) \\ S^2 = (x_3\,x_5)\,(x_4\,x_6) \\ S^3 = (x_1\,x_2)\,(x_3\,x_6\,x_5\,x_4) \\ S^4 = 1 \end{array} \right. \qquad \text{B)} \left| \begin{array}{l} (x_3\,x_5) \\ (x_4\,x_6), \\ (x_1\,x_2)\,(x_3\,x_4)\,(x_5\,x_6) \\ (x_1\,x_2)\,(x_3\,x_6)\,(x_4\,x_5). \end{array} \right.$$

Die 4 Collineationen A) stellen eine vollständige vierzählige Collineation (§ 15 A) 1)) dar und bilden eine Gruppe $G_4^{(c)}$; die Correlationen B) bedeuten 2 Nullcorrelationen (§ 17 B) 2)) und 2 Polarcorrelationen (§ 18 B) 1)).

Auf weitere Untergruppen der Hauptgruppen G_{720}, z. B. auf die algebraisch wichtige und interessante Untergruppe G_{120}[1]) soll hier nicht eingegangen werden, ebensowenig auf diejenigen Gruppen, welche dadurch resultiren, dass von den 6 Elementen x_i nur 5 oder 4 u. s. w. permutirt werden.

II) Von besonderer Wichtigkeit in geometrischer Beziehung sind die in der Hauptgruppe G_{23040} enthaltenen Gruppen von 2304 Substitutionen, welche 1152 Collineationen und ebensoviele Correlationen bedeuten und wobei die ersteren eine invariante Untergruppe $G_{1152}^{(c)}$ bilden, nebst zahlreichen in diesen enthaltenen Untergruppen. Durch die Transformationen einer solchen Gruppe G_{2304} (bez. $G_{1152}^{(c)}$) geht eine der 10 Fundamentalflächen $F_i^{(1)}$ in sich über, während die beiden Systeme von je 3 desmischen Tetraedern, welche in Beziehung auf eine solche Fläche sich selbst conjugirt sind,[2]) in der allgemeinsten Weise vertauscht werden. Diese Gruppen nebst mehreren der in ihnen enthaltenen Untergruppen sind von verschiedenen Gesichtspunkten aus mit Rücksicht auf bestimmte Anwendungen bereits betrachtet worden.[3]) Wir werden im Folgenden sehen, wie aus einigen derselben

1) Vgl. Cayley a. a. O. S. 82 ff. Serret Algebra II. S. 250 ff.

2) Vgl. A_1 § 5.

3) Vgl. E. Study: Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen. Ber. der K. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 9. Mai 1892; ebenso E. Study: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Leipzig 1893. I. und II. Abschnitt.

sich in einfacher Weise die Darstellung der einfachen und doppelten Drehungen, sowie der einfachen und dreifachen Spiegelungen ergiebt, durch welche gewisse regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes mit sich selbst zur Deckung gebracht werden.

Mit Rücksicht auf diese Anwendungen sollen die durchweg reellen Substitutionen von $G^{(1)}_{2304}$ (bez. $G^{(1)c}_{1152}$) für die Fläche $F^{(1)}_1$ in der nachfolgenden Zusammenstellung nochmals übersichtlich aufgeführt werden. Jede der angegebenen Permutationen der x_i ist bez. mit den 16 positiven und den 16 negativen Vorzeichencombinationen zu versehen; die Columne T_i giebt an, auf welches der 6 Fundamentaltetraeder $T_1 \,.\,. \, T_6$ die in tetraedrischen Coordinaten dargestellten Substitutionen entfallen. Die Anordnung der Reihenfolge der Substitutionen ist hierbei mit Rücksicht auf eine bequeme Uebersicht der wichtigsten hier in Betracht zu ziehenden Untergruppen geschehen.[1])

[1]) Vgl. auch die Abhandlung von Julius Feder: Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen. Math. Ann. 47 Band. S. 375—407. Es werden hier dieselben Resultate, wenn auch in anderer Anordnung erhalten.

Nummer	Substitutionen	T_i	Collineationen	Vgl.	Vorzeichen-combinat.	Correlationen	Vgl.	Vorzeichen-combinat.
1)	(x_{i_1})	T_1	1α) 1 Identität, 1β) 9 (hyperbolisch) geschaarte Involutionen mit reellem Axenpaar e, 1γ) 6 (elliptisch) geschaarte Involutionen mit imaginärem Axenpaar e.	§ 11 A) 1) und 2)	+	$1\alpha'$) 1 Polarcorrelation (imagin. Kernfläche $F_1^{(1)}$), $1\beta'$) 9 Polarcorrelationen (9 reelle Kernflächen $F_2^{(1)} .. F_{10}^{(1)}$), $1\gamma'$) 6 Nullcorrelationen (Fundamentalcomplexe).	§ 11 B) 1) und 2)	—
2 a) 2 b) 2 c)	$(x_1 x_3 x_5)(x_2 x_4 x_6)$. . . $(x_1 x_5 x_3)(x_2 x_6 x_4)$. . . $(x_1 x_5 x_3)(x_2 x_4 x_6)$. . . $(x_1 x_3 x_5)(x_2 x_6 x_4)$. . .	T_1 T_1 T_2 T_3	2) $2 . 32 = 64$ 3zählige axiale Collineationen mit Reihenaxe (Büschelaxe) k' (k) bez. k (k').	§ 14 A)	+	2) $2 . 32 = 64$ 6zählige allgemeine Correlationen, Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders $\mathfrak{k}_0$ ($\varkappa_0$).	§ 14 B)	—
3 a)	$(x_1 x_3)(x_2 x_4)$, $(x_3 x_5)(x_4 x_6)$, $(x_5 x_1)(x_6 x_2)$	T_1	3α) $3 . 12 = 36$ (hyperbolisch) geschaarte Involutionen mit reellem Axenpaar d,	§ 13 A) 1)	+	$3\alpha'$) $3 . 12 = 36$ Polarcorrelationen: Kernflächen 36 reelle Flächen $F^{(4)}$.	§ 13 B) 1)	—
3 b)	$(x_3 x_5)(x_2 x_4)$, $(x_5 x_1)(x_4 x_6)$, $(x_1 x_3)(x_6 x_2)$	T_2	3β) $3 . 12 = 36$ 4zählige axiale Collineationen mit Axenpaar e,	2)		$3\beta'$) $3 . 12 = 36$ 4zählige Axencorrelationen erster Art mit reellem Axenpaar e,	2)	
3 c)	$(x_5 x_1)(x_2 x_4)$, $(x_1 x_3)(x_4 x_6)$, $(x_3 x_5)(x_6 x_2)$	T_3	3γ) $3 . 24 = 72$ 4zählige allgemeine Collineation., Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ ($\iota_0^{(e)}$).	3)		$3\gamma'$) $3 . 24 = 72$ 4zählige Correlationen mit zusammenfallender reellen Kernfläche $F^{(3)}$.	3)	
4)	$(x_1 x_3 x_5)$ $(x_1 x_5 x_3)$ $(x_2 x_4 x_6)$ $(x_2 x_6 x_4)$	T_2 T_3 T_3 T_2	4α) 16 3zählige geschaarte Collineationen mit imaginärem Axenpaar k_0, 4β) 48 6zählige allgemeine (auf 2 Arten eigentliche) Collineation., Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders $\mathfrak{h}_0^{(e)}$ ($\eta_0^{(e)}$).	§ 12 A) 1) 2)	+	$4\alpha'$) 16 6zählige Correlationen mit z. K. (S^3 eine Polarcorrelation), Kernfläche $F^{(1)}$, $4\beta'$) 48 6zählige Correlationen mit z. K. (S^3 eine Nullcorrelation), Kernflächen 24 reelle Flächen $F^{(6)}$.	§ 12 B) 1) 2)	—
5 a)	$(x_1 x_2)$ $(x_3 x_4 x_5 x_6)$ } $(x_1 x_2)$ $(x_3 x_6 x_5 x_4)$ } . . $(x_1 x_4)$ $(x_2 x_3 x_6 x_5)$ } $(x_1 x_4)$ $(x_2 x_5 x_6 x_3)$ } . . $(x_1 x_6)$ $(x_2 x_3 x_4 x_5)$ } $(x_1 x_4)$ $(x_2 x_5 x_4 x_3)$ } . .	T_4, T_4 T_4, T_5 T_4, T_6	5α) 144 4zählige allgemeine Collineationen; Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders $\mathfrak{d}_0$ (δ_0),	§ 15 A) 1)	+	$5\alpha'$) 144 4zählige Axencorrelationen zweiter Art mit reellem Axenpaar d,	§ 15 B) 1)	—
5 b)	$(x_3 x_2)$ $(x_1 x_4 x_5 x_6)$ } $(x_3 x_2)$ $(x_1 x_6 x_5 x_4)$ } . . $(x_3 x_4)$ $(x_1 x_2 x_5 x_6)$ } $(x_3 x_4)$ $(x_1 x_6 x_5 x_2)$ } . . $(x_3 x_6)$ $(x_1 x_2 x_5 x_4)$ } $(x_3 x_6)$ $(x_1 x_4 x_5 x_2)$ } . .	T_5, T_4 T_5, T_5 T_5, T_6	5β) 144 8zählige allgemeine auf eine Art uneigentliche Collineationen; Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders: 2 Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε), 2 Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ (Ebenen $\iota_0^{(e)}$).	2)		$5\beta'$) 144 8zählige allgemeine Correlationen (festbleibende Complexe $x_{i_1} - x_{i_2} = 0$ und $x_{i_1} + x_{i_2} = 0$); Haupttetraeder i. Wesentlich. dasselbe wie für 5 β).	2)	
5 c)	$(x_5 x_2)$ $(x_1 x_4 x_3 x_6)$ } $(x_5 x_2)$ $(x_1 x_6 x_3 x_4)$ } . . $(x_5 x_4)$ $(x_1 x_2 x_3 x_6)$ } $(x_5 x_4)$ $(x_1 x_6 x_3 x_2)$ } . . $(x_5 x_6)$ $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ } $(x_5 x_6)$ $(x_1 x_4 x_3 x_2)$ } . .	T_6, T_4 T_6, T_5 T_6, T_6						

$(G_{2304}^{(1)})$

Nummer	Substitutionen	T_i	Collineationen	Vgl.	Vorzeichen-combinat.	Correlationen	Vgl.	Vorzeichen-combinat.
6a) 6b) 6c) 6d)	$(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6)$ $(x_1 x_4)(x_3 x_6)(x_5 x_2)$ $(x_1 x_6)(x_3 x_2)(x_5 x_4)$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_2)(x_3 x_6)(x_5 x_4)\\(x_1 x_6)(x_3 x_4)(x_5 x_2)\\(x_1 x_4)(x_3 x_2)(x_5 x_6)\end{array}\right\}$	T_1 T_3 T_2 T_1	6α) 6 . 4 = 24 centrische Involutionen; Centrum (Homologieebene) je ein Eckpunkt (Seitenfläche) der 6 Tetraeder $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$; 6β) 6 . 12 = 72 4zählige allgemeine Collineationen; Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders 2 Punkt- (2 Ebenen-) Paare von 2 Tetraedern T_i.	§ 18 A)) 1)) 2))	—	6α') 6 . 4 = 24 Polarcorrelationen, Kernflächen 24 reelle Flächen $F^{(2)}$; 6β') 6 . 12 = 72 4zählige Axen-Correlationen zweiter Art mit Axenpaar e.	§ 18 B)) 1)) 2))	+
7a) 7b) 7c) 7d)	$\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_4 x_5 x_2 x_3 x_6)\\(x_1 x_6 x_3 x_2 x_5 x_4)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6)\\(x_1 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_2 x_5 x_6 x_3 x_4)\\(x_1 x_4 x_3 x_6 x_5 x_2)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_2 x_3 x_6 x_5 x_4)\\(x_1 x_4 x_5 x_6 x_3 x_2)\\(x_1 x_4 x_3 x_2 x_5 x_6)\\(x_1 x_6 x_5 x_2 x_3 x_4)\\(x_1 x_6 x_3 x_4 x_5 x_2)\\(x_1 x_2 x_5 x_4 x_3 x_6)\end{array}\right\}$	T_1, T_1 T_2, T_2 T_3, T_3 T_2, T_3	7) 12 . 16 = 192 6zählige (auf eine Art uneigentliche) Collineationen; Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders je 1 Punkt $\mathfrak{e}$, 1 Punkt $\mathfrak{d}$, 2 Punkte $\mathfrak{k}_0$ (je 1 Ebene ε, 1 Ebene δ, 2 Ebenen $\varkappa_0$).	§ 21 A))	—	7') 12 . 16 = 192 6zählige allgemeine Correlationen; Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders je 1 Punktpaar $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}_0$ (je ein Ebenenpaar π und $\varkappa_0$).	§ 21 B))	+
8a) 8b) 8c)	$(x_3 x_5), (x_4 x_6)$. . . $(x_5 x_1), (x_6 x_2)$. . . $(x_1 x_3), (x_2 x_4)$. . .	T_4, T_4 T_5, T_5 T_6, T_6	8α) 3 . 12 = 36 geschaarte Involutionen mit reellem Axenpaar d_0, 8β) 3 . 4 = 12 geschaarte Involutionen mit imaginärem Axenpaar d_0, 8γ) 3 . 4 = 12 4zählige geschaarte Collineationen mit imaginärem Axenpaar e, 8δ) 3 . 12 = 36 4zählige allgemeine Collineationen, Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders Punkte $\mathfrak{e}$ (Ebenen ε) v. T_i.	§ 17 A)) 1)) 2)) 3))	—	8α') 3 . 12 = 36 Polarcorrelationen, Kernflächen 36 reelle Flächen $F^{(3)}$. 8β') 3 . 4 = 12 Nullcorrelationen, Complexe $x_{i_1} \pm x_{i_2} = 0$, 8γ') 3 . 4 = 12 4zählige Correlationen mit z. K. $F^{(1)}$, 8δ') 3 . 12 = 36 4zählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F^{(1)}_2 \ldots F^{(1)}_{10}$.	§ 17 B)) 1)) 2)) 3))	+
9a) 9b) 9c)	$\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_3 x_5)(x_2 x_4)\\(x_1 x_5 x_3)(x_2 x_4)\\(x_2 x_4 x_6)(x_3 x_5)\\(x_2 x_6 x_4)(x_3 x_5)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_3 x_5)(x_4 x_6)\\(x_1 x_5 x_3)(x_4 x_6)\\(x_2 x_4 x_6)(x_5 x_1)\\(x_2 x_6 x_4)(x_5 x_1)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}(x_1 x_3 x_5)(x_6 x_2)\\(x_1 x_5 x_3)(x_6 x_2)\\(x_2 x_4 x_6)(x_1 x_3)\\(x_2 x_6 x_4)(x_1 x_3)\end{array}\right\}$	T_4, T_5 T_4, T_5 T_5, T_6 T_5, T_6 T_6, T_4 T_6, T_4	9α) 8 . 12 = 96 6zählige (auf 2 Arten eigentliche) Collineationen, Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders) 4 Punkte $\mathfrak{h}^{(d)}_0$ (Ebenen $\binom{(d)}{0}$), 9β) 8 . 12 = 96 12zählige allgemeine Collineationen, Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders 4 Punkte $\mathfrak{h}^{(e)}_0$ (Ebenen $\binom{(e)}{0}$).	§ 20 A)) 1)) 2))	—	9α') 8 . 12 = 96 6zählige Correlationen mit z. K. (S^3 eine Nullcorrelation), Kernflächen 48 reelle Flächen $F^{(7)}$, 9β') 8 . 12 = 96 12zählige allgemeine Correlationen, Eckpunkte (Flächen) des Haupttetraeders wie für 9β).	§ 20 B)) 1)) 2))	+

$(G^{(1)}_{2304})$

Durch die Transformationen der Gruppe $G_{2304}^{(1)}$ (bez. der invarianten Untergruppe $G_{1152}^{(1)c}$) werden die Tetraeder T_1, T_2, T_3 und T_4, T_5, T_6 der beiden conjugirten desmischen Systeme auf die allgemeinste Weise vertauscht (d. h. in sich oder in einander übergeführt). Die durch die 6 Tetraeder bestimmte sog. **harmonische** Configuration:

$(24_3^9,\ 18_4^4,\ 24_9^3)$ oder in vollständiger Bezeichnung[1]):

$(24_{3+4+6}^9,\ 18_4^4+32_3^3+72_2^2,\ 24_9^{3+4+6})$,

deren 24 Punkte (Ebenen) die 24 Eckpunkte $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_{24}$ (Flächen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{24}$) der 6 Tetraeder $T_1 \ldots T_6$, deren Configurationsgerade die 18 reellen Kanten e, die 32 reellen Geraden k, k' und die 72 reellen Geraden d sind, wird durch die Transformationen dieser Gruppe in sich selbst übergeführt.

Die in $G_{2304}^{(1)}$ unter 1)..4) und 6)..7) aufgeführten Substitutionen constituiren eine Untergruppe $G_{1152}^{(1)}$ (bez. $G_{576}^{(1)c}$), durch deren Transformationen die drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 des desmischen Systems in sich und in einander übergeführt werden; d. h. die entsprechende **Reye**'sche Configuration:

$(12_4^6,\ 16_3^3,\ 12_6^4)$ oder in vollständiger Bezeichnung:

$(12_{4+3}^6,\ 16_3^3+18_2^2,\ 12_6^{4+3})$

geht durch diese Transformation in sich über.

Eine Untergruppe $G_{576}^{(1)}$ (bez. $G_{288}^{(1)c}$) dieser enthält die Hälfte der Substitutionen, nämlich:

1), 2a), 2b), 2c), 4) und 6a), 6b), 6c), 7a), 7b), 7c).

Dieselbe ist für die im zweiten递ttheil anzustellenden Betrachtungen von Wichtigkeit; sie kann als hemigonische Gruppe von $G_{1152}^{(1)}$ (bez. $G_{576}^{(1)c}$), als tetartogonische von $G_{2304}^{(1)}$ (bez. $G_{1152}^{(1)c}$) bezeichnet werden.

Ferner erhalten wir drei conjugirte Untergruppen $G_{384}^{(1)}$ (bez. $G_{192}^{(1)c}$), bei deren Transformationen bez. T_1 oder T_2 oder T_3 als Ganzes in Ruhe bleibt; die Substitutionen derselben sind

für T_1 die in $G_{2304}^{(1)}$ unter 1), 2a), 3a); 6a), 6d), 7a),
„ T_2 „ „ „ „ 1), 2a), 3b); 6b), 6d), 7b),
„ T_3 „ „ „ „ 1), 2a), 3c); 6c), 6d), 7c)

aufgeführten.

[1]) Vgl. E. Hess: Ueber gewisse räumliche Configurationen. Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg. Mai 1892.

Eine invariante Untergruppe (der Durchschnitt) dieser drei Gruppen, nämlich $G_{192}^{(1)}$ (bez. $G_{96}^{(1)c}$), enthält die Substitutionen unter 1), 2a); 6d); durch die Transformationen dieser Untergruppe geht jedes der 3 Tetraeder T_1, T_2, T_3 einzeln in sich über.

Endlich ist in allen vorhergehenden Gruppen eine invariante Untergruppe $G_{32}^{(1)}$ (bez. $G_{16}^{(1)c}$) enthalten, welche die Substitutionen unter 1) umfasst; dieselben bedeuten ausser der Identität $9+6=15$ geschaarte Involutionen, sowie 6 Null- und 10 Polar-Correlationen. Bei den Transformationen dieser Gruppe bleiben alle 6 Tetraeder $T_1 .. T_6$ einzeln in Ruhe. Untergruppen dieser Gruppe sind schliesslich drei Gruppen G_8 (bez. $G_4^{(c)}$), bei deren Transformationen bez. die Ecken von T_1, von T_2, von T_3 einzeln in Ruhe bleiben.[1])

III) Die unter II) betrachteten Untergruppen ergeben sich natürlich ebenso aus jeder der 9 übrigen Hauptgruppen $G_{2304}^{(k)}$ (bez. $G_{1152}^{(k)c}$), bei deren Transformationen die Fundamentalflächen $F_k^{(1)}$ ($k = 2, 3 \ldots 10$) in Ruhe bleiben. Der Durchschnitt aller dieser 10 conjugirten Hauptgruppen ist die unter II) zuletzt betrachtete Untergruppe $G_{32}^{(1)}$ (bez. $G_{16}^{(1)c}$).

Der Durchschnitt zweier der 10 conjugirten Hauptgruppen, z. B. von $G_{2304}^{(1)}$ ($G_{1152}^{(1)c}$) und von $G_{2304}^{(2)}$ ($G_{1152}^{(2)c}$) ist eine Gruppe G_{256} (bez. $G_{128}^{(c)}$),[2]) deren Substitutionen aus folgenden 8 Permutationen resultiren:

$G_{128}^{(c)}$:

1) (x_1)	(T_1)	6a) $(x_1\,x_2)(x_3\,x_4)(x_5\,x_6)$. . .	(T_1)	. . (G_{256})
3a) $(x_3\,x_5)(x_4\,x_6)$	(T_1)	6d) $(x_1\,x_2)(x_3\,x_6)(x_5\,x_4)$. . .	(T_1)	
5a) $(x_1\,x_2)(x_3\,x_4\,x_5\,x_6)$. .	$(T_4,\ T_4)$	8a) $(x_3\,x_5), (x_4\,x_6)$	$(T_4,\ T_4)$	
$(x_1\,x_2)(x_3\,x_6\,x_5\,x_4)$. .				

Durch die Transformationen dieser Gruppe gehen die beiden Tetraeder T_1 und T_4 in sich und in einander über; die durch dieselben bestimmte Configuration:
$$(8^5_{1+2+2},\ 2^4_4 + 8^2_2 + 8^2_2,\ 8^{1+2+2}_5),$$
deren Configurationsgeraden 2 Gerade e, 8 Gerade d_0 und 8 Gerade d sind, wird durch die Transformationen in sich übergeführt.

Solcher Gruppen G_{256} (bez. $G_{128}^{(c)}$) giebt es im Ganzen $\binom{10}{2} = 45$; je drei derselben, z. B. die zu den drei Tetraederpaaren T_1, T_4; T_1, T_5; T_1, T_6 (den Flächenpaaren $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}$; $F_1^{(1)}$, $F_3^{(1)}$; $F_1^{(1)}$, $F_4^{(1)}$) gehörigen haben eine Unter-

[1]) Vgl. § 11 A) 3) und E. Study: Sphär. Trigonometrie u. s. w. § 8.

[2]) Vgl. E. Study: a. a. O. unter III.

gruppe G_{64} (bez. $G_{32}^{(c)}$) gemein, deren Substitutionen die in G_{256} unter 1) und 6a) aufgeführten sind. Auch bilden die in G_{256} unter 1), 3a), 6a), 6d) für sich eine Untergruppe G_{128} (bez. $G_{64}^{(c)}$), durch deren Transformationen, ebenso wie bei der vorhergehenden, das Tetraeder T_1 in sich übergeht.

IV) Auf die Aufstellung und geometrische Deutung weiterer Untergruppen, wie z. B. der den sämmtlichen in den §§ 11 bis 21 betrachteten cyclischen Permutationsgruppen entsprechenden, soll hier nicht näher eingegangen werden, da dieselbe sich aus den obigen Resultaten und Aufstellungen ohne Schwierigkeit entnehmen lässt. Es möge nur noch kurz die geometrische Bedeutung der erzeugenden Substitutionen, aus welchen sich diejenigen der Hauptgruppe zusammensetzen lassen, hervorgehoben werden.

Betrachten wir die allgemeinste Collineationsgruppe $G_{11520}^{(c)}$ und die ausgezeichnete Untergruppe $G_{5760}^{(c)}$ derselben, von welcher die Gruppe $G_{16}^{(c)}$ wiederum eine ausgezeichnete Untergruppe darstellt.[1]). Die Substitutionen von $G_{5760}^{(c)}$ ergeben sich durch Combination der Untergruppe $G_{360}^{(c)}$, welche den positiven Permutationen der x_i entspricht, mit der Untergruppe $G_{16}^{(c)}$. Die Permutationen von $G_{360}^{(c)}$ lassen sich aber vollständig durch die beiden drei- und fünfzähligen cyclischen Permutationen:[1])

$$S' = (x_1\, x_2\, x_3) = [2\ 4\ {-1}\ {-3}]_9$$
$$T' = (x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6) = [3\ {-1}\ {-2_i}\ 4_i]_3$$

erzeugen, von denen die erstere eine dreizählige geschaarte (vgl. § 12 A 1)), die andere eine fünfzählige allgemeine Collineation (vgl. § 16 A) bedeutet. Die übrigen Substitutionen von $G_{11520}^{(c)}$, welche den negativen Permutationen der x_i mit den negativen Vorzeichencombinationen entsprechen, resultiren, wenn die Substitutionen von $G_{5760}^{(c)}$ noch mit der einen Substitution U in allen Combinationen verbunden wird:

$$U = [-x_2\, x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] = [1\ 2\ {-3_i}\ {-4_i}]_1,$$

welche eine vierzählige geschaarte Collineation mit Axenpaar e bedeutet (vgl. § 17 A 2))).

Ebenso leicht lässt sich die geometrische Bedeutung der vier anderen von Maschke[1]) angegebenen erzeugenden Substitutionen:

[1]) Vgl. H. Maschke a. a. O. Die Gesammtzahl der Substitutionen der Haupt- und Untergruppen ist bei Maschke aus einem bereits erwähnten Grunde die vierfache der im Texte angegebenen.

$(A) \quad . \ . \ . \ . \quad [x_3\, x_2\, x_1 - x_4 - x_5 - x_6] = [2\ 4\ 1\ 3]_6$
$(B) = U \quad . \ . \quad [-x_2\, x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] \quad = [1\ 2\ -3_i\ -4_i]_1$
$(C) \quad . \ . \ . \ . \quad [x_6 - x_5\, x_4 - x_3\, x_2 - x_1] = [1\ 4\ 3\ 2]_1$
$(D) \quad . \ . \ . \ . \quad [x_2 - x_1 - x_4\, x_3\, x_6 - x_5] = [1\ 2\ -3\ 4]_1$

feststellen. (*A*) bedeutet eine geschaart-involutorische Collineation mit Axenpaar d_0 (vgl. § 17 A 1))), (*B*) ist mit *U* identisch und (*C*) und (*D*) bedeuten zwei centrisch-involutorische Collineationen mit bez. $\mathfrak{e}_{17}$ (ε_{17}) und $\mathfrak{e}_3$ (ε_3) als Centrum (Homologieebene). (Vgl. § 18 A 1))).

§ 24.
Uebertragung einer Raumfigur auf den dreidimensionalen sphärischen Raum (die Hypersphäre).

Entsprechend der durch Centralprojection erhaltenen Abbildung einer ebenen Figur auf eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt das Projectionscentrum ist, lässt sich auch die Centralprojection einer Figur des dreidimensionalen (ebenen) Raumes auf einen dreidimensionalen sphärischen Raum (eine sog. Hypersphäre) betrachten, welcher das Projectionscentrum zum Mittelpunkt hat. Hierbei entspricht jedem Punkte des ebenen Raumes ein Punkt und dessen Gegenpunkt, jeder Geraden ein Hauptkreis und jeder Ebene eine Haupt- (Diametral-) Kugel des sphärischen Raumes. Aus einer bestimmten räumlichen Configuration entsteht demnach eine entsprechende Configuration von Punkten, Hauptkreisen und Hauptkugeln des dreidimensionalen sphärischen Raumes; z. B. aus einem ebenflächigen Tetraeder ein sphärisches Tetraeder (und dessen Gegenfigur), dessen vier Hauptkugeln den sphärischen Raum in 16 Tetraeder zertheilen, von welchen je 8 in jedem der 8 Punkte zusammenstossen. Sind speciell diese vier Hauptkugeln zu einander senkrecht, so resultirt das durch 16 congruente reguläre Tetraeder (deren Seitenflächen Kugeloktanten sind) gebildete reguläre sphärische „Zellgewebe", welchem das reguläre (linear begrenzte) Sechszehnzell des vierdimensionalen Raumes ein-, das reguläre Achtzell umgeschrieben ist.[1]) Die Mittelpunkte dieser 16 regulären Tetraeder liefern durch Haupt-

[1]) Vgl. z. B. V. Schlegel: „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde." Nova Acta der ksl. Leop.-Carol. Akademie. Bd. XLIV Nr. 4, sowie des Verf. Abhandlungen: „Beiträge zur Theorie der mehrf. perspectiven Dreiecke und Tetraeder". Math. Ann. Bd. 28 S. 252 ff. und „Ueber reguläre Polytope höherer Art." Marburger Ber. 1885 Nr. 3 Mai.

kugeln verbunden ein zweites reguläres Zellgewebe; dasselbe wird von 8 regulären Hexaedern begrenzt, deren Mittelpunkte die Eckpunkte der Tetraeder sind. Diesem, dem ersteren „conjugirten", Gewebe ist das reguläre Achtzell ein-, das reguläre Sechszehnzell des vierdimensionalen Raumes umgeschrieben.

Der Verein dieser beiden Gewebe ergiebt ein drittes reguläres Gewebe, dessen Eckpunkte die $8+16=24$ Eckpunkte der beiden und dessen Grenzpolyeder 24 reguläre Oktaeder sind. Diesem regulären Gewebe ist das reguläre Vierundzwanzigzell des vierdimensionalen Raumes sowohl ein- als umgeschrieben, da die Mittelpunkte der 24 Oktaeder ein dem ersteren conjugirtes congruentes reguläres Gewebe bestimmen.

Die soeben beschriebenen Gebilde des dreidimensionalen sphärischen Raumes und die ihnen zugehörigen des vierdimensionalen (ebenen) Raumes kommen für die folgenden Untersuchungen hinsichtlich der Transformationen, durch welche diese Gebilde in sich übergeführt werden, in Betracht. Der Verein der beiden ersten einander conjugirten Gewebe oder ein diesem collinear verwandtes Gebilde lässt sich als durch Centralprojection der Figur eines Systems dreier desmischen Tetraeder, nämlich der drei Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3 (vgl. § 10, (79ε)) auf einen concentrischen sphärischen Raum entstanden ansehen. Ebenso entsteht der Verein der beiden einander conjugirten Gewebe, deren jedem ein reguläres Vierundzwanzigzell des vierdimensionalen Raumes ein- und umgeschrieben ist, durch Centralprojection der vollständigen Figur der drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 eines desmischen Systems und der drei Tetraeder T_4, T_5, T_6 des conjugirten desmischen Systems auf einen concentrischen sphärischen Raum.

Die Regeln für die Uebertragung der Eigenschaften der ursprünglichen Figuren auf die angegebenen Centralprojectionen, sowie für die analytische Formulirung derselben sollen im Folgenden kurz entwickelt und sodann mit Benutzung der in den früheren Paragraphen gewonnenen Resultate auf die genannten Gebilde angewendet werden.

§ 25.

Uebertragung einer ebenen Figur auf eine Kugelfläche durch Centralprojection. Collineationen und Correlationen der regulären Oktaeder-Hexaeder-Gruppe.

Zunächst möge der Analogie wegen und zum Zwecke eines besseren Verständnisses kurz die Centralprojection derjenigen ebenen Figur auf eine concentrische Kugelfläche betrachtet werden, welche die regulären sphärischen Netze der Oktaeder-Hexaeder-Gruppe liefert.

Es werde die Figur eines vollständigen ebenen Vierecks

mit den Eckpunkten C_1, C_2, C_3, C_4,

„ „ Seitenpaaren $b_1, b_4; b_2, b_5; b_3, b_6$;

„ „ Diagonalpunkten A_1, A_2, A_3 und den Diagonalen a_1, a_2, a_3;

„ „ Schnittpunktpaaren $B_1, B_4; B_2, B_5; B_3, B_6$

der Seiten mit den Diagonalen von einem ausserhalb der Ebene liegenden Punkte O aus auf eine concentrische Kugelfläche projicirt. Alsdann entsprechen jedem der 3 Punkte A, der 4 Punkte C, der 6 Punkte B je 2 (als Gegenpunkte zusammengehörige) Punkte, jeder der 3 Geraden a, der 6 Geraden b je ein Hauptkreis der Kugelfläche. Diese $3 + 6$ Hauptkreise bedingen eine Eintheilung der Kugelfläche in 48 sphärische Dreiecke mit je einem Eckpunkte A, B, C; in der Figur dieses sphärischen „harmonischen Hexakisoktaedernetzes“[1]) treten die bekannten harmonischen Beziehungen in der Figur eines ebenen vollständigen Vierecks entsprechend auf. Ebenso entsprechen den 24 Collineationen und den 24 Correlationen, durch welche die ebene Figur in sich übergeht, bezw. 2 . 24 Collineationen und 2 . 24 Correlationen, durch welche die sphärische Figur in sich oder in die polarreciproke übergeht; diese Transformationen lassen sich endlich auf die im weiteren Sinne gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder übertragen, welche einem im Allgemeinen durch 2 . 24 homologe Punkte bestimmten sphärischen gleicheckigen Netze bez. ein- oder umgeschrieben sind. Durch collineare (bez. reciproke) Transformation lassen sich die Netze des harmonischen Hexakisoktaeders in die speciellen regulären überführen, denen

[1]) Vgl. E. Hess: Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Seite 420 ff.

die im engeren Sinne gleicheckigen und gleichflächigen (speciell regulären) Polyeder der Hexaeder-Oktaedergruppe bez. ein- oder umgeschrieben sind.

Sind x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der betrachteten ebenen Figur (oder z_1, z_2, z_3 die homogenen Coordinaten desselben z. B. in Beziehung auf das Dreieck $A_1\ A_2\ A_3$) und liegt der Mittelpunkt O der Projectionskugel im Abstande gleich der Längeneinheit von der Ebene, so dass die Kugel die Ebene im Punkte O', dem Anfangspunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems berührt, so sind die Coordinaten $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ des projicirten Punktes M (und des Gegenpunktes M') in Beziehung auf ein rechtwinkliges System mit dem Anfangspunkte O, der $\mathfrak{Z}_3$-Axe OO' und den bez. zur $O'X$ und $O'Y$ parallelen $\mathfrak{Z}_1$- und $\mathfrak{Z}_2$-Axen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 &= \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\\ \mathfrak{z}_2 &= \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\\ \mathfrak{z}_3 &= \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\end{aligned}\right\}\ (91\alpha)\qquad \text{oder bei Benutzung homogener Coordinaten } z_1,\ z_2,\ z_3 \qquad \left.\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 &= \pm\frac{z_1}{\sqrt{z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2}}\\ \mathfrak{z}_2 &= \pm\frac{z_2}{\sqrt{z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2}}\\ \mathfrak{z}_3 &= \pm\frac{z_3}{\sqrt{z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2}}\end{aligned}\right\}\ (91\beta)$$

wo das obere und untere Vorzeichen immer für alle drei Coordinaten $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ gleichzeitig zu nehmen ist. Werden zur Vereinfachung die homogenen Coordinaten z_1, z_2, z_3 eines Punktes der Ebene mit $\frac{1}{\sqrt{z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2}}$ multiplicirt, so dass die Quadratsumme $= 1$ ist, so wird einfach

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 &= \pm z_1\\ \mathfrak{z}_2 &= \pm z_2\\ \mathfrak{z}_3 &= \pm z_3\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (91\gamma),$$

wobei $\mathfrak{z}_1 = \cos(OM,\ O\mathfrak{Z}_1)$, $\mathfrak{z}_2 = \cos(OM,\ O\mathfrak{Z}_2)$, $\mathfrak{z}_3 = \cos(OM,\ O\mathfrak{Z}_3)$ ist, und die Transformationsformeln für die sphärische Figur sind — abgesehen vom doppelten Vorzeichen — denjenigen für die ebene Figur entsprechend.

Um die aus der oben betrachteten Figur durch centrale Projection entstehende sphärische Figur des harmonischen Hexakisoktaeder-Netzes in die specielle reguläre überzuführen, kann man, statt die collineare Transformation der sphärischen Figur auszuführen, auch einfach von der speciellen regulären e b e n e n Figur ausgehen, bei welcher die Eckpunkte C_1, C_2, C_3, C_4 des Vierecks denjenigen eines Quadrats von der Seite 1 entsprechen und der Mittelpunkt dieses Quadrats (der Punkt A_3) der Berührungspunkt der

Projectionskugel ist, während $A_1\,A_2$ die unendlich ferne Gerade der Ebene ist und die 6 Punkte B die Mittelpunkte der Seiten des Quadrates und die unendlich fernen Punkte der Diagonalen desselben sind. Die Coordinaten der Punkte A, C, B der Kugelfläche sind alsdann:

$$\left.\begin{array}{lll|llll|llll}
A_1 \ldots & \pm 1 \;\; 0 \;\; 0 & & C_1 \ldots\ldots & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & B_1 \ldots\ldots & 0 & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
A_2 \ldots & 0 \;\; \pm 1 \;\; 0 & & C_2 \ldots\ldots & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & B_2 \ldots\ldots & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
A_3 \ldots & 0 \;\; 0 \;\; \pm 1 & & C_3 \ldots\ldots & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & B_3 \ldots\ldots & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
 & & & C_4 \ldots\ldots & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & B_4 \ldots\ldots & 0 & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & & & & & & & B_5 \ldots\ldots & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & & & & & & & B_6 \ldots\ldots & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\,.
\end{array}\right\} \;\ldots (91\delta)$$

Die 24 Collineationen, welche die ebene Figur in sich überführen, werden, wenn wiederum z_1, z_2, z_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes bedeuten, einfach durch

$$\sigma z'_i = \pm z_k \;\; (i, k = 1, 2, 3) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(91\varepsilon)$$

dargestellt; sie entsprechen den 6 mit den 4 Vorzeichencombinationen versehenen Permutationen der Indices von z. Eine solche Collineation soll, ähnlich wie es oben geschehen ist, durch das Symbol

$$[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3] \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(91\varepsilon')$$

$(k_1, k_2, k_3 = 1, 2, 3)$ bezeichnet werden; sie bleibt bei gleichzeitigem Vorzeichenwechel ungeändert. In der folgenden Tabelle ist übersichtlich die Bedeutung dieser Collineationen angegeben, welche mit Rücksicht auf die sphärische Figur durchweg so geschrieben sind, dass ihre Determinante $= +1$ wird.

1)	[1 2 3] ..	Identität.							
2)	[1 −2 −3] ..	Centrische	Involution	mit	Centrum	A_1	und	Homologiegeraden	a_1,
3)	[−1 2 −3] ..	„	„	„	„	A_2	„	„	a_2,
4)	[−1 −2 3] ..	„	„	„	„	A_3	„	„	a_3,
5)	[−1 3 2] ..	„	„	„	„	B_1	„	„	b_1,
6)	[−1 −3 −2] ..	„	„	„	„	B_4	„	„	b_4,
7)	[3 −2 1] ..	„	„	„	„	B_2	„	„	b_2,
8)	[−3 −2 −1] ..	„	„	„	„	B_5	„	„	b_5,
9)	[2 1 −3] ..	„	„	„	„	B_3	„	„	b_3,
10)	[−2 −1 −3] ..	„	„	„	„	B_6	„	„	b_6.

. . (91ζ)

	4zählige Collineationen	Doppelpunkte und Doppellinien
11) $S = [1\ \ 3\ {-2}]\ ..$ 12) $S^3 = [1\ {-3}\ \ 2]\ ..$	$S^2 = [1\ {-2}\ {-3}]$ (vgl. 2) . . .	$A_1 \dots\ 1\ 0\ 0 \dots a_1$ $0\ 1\ i$ $0\ 1\ {-i}$
13) $S = [-3\ 2\ \ 1]\ ..$ 14) $S^3 = [3\ \ 2\ {-1}]\ ..$	$S^2 = [-1\ 2\ {-3}]$ (vgl. 3) . . .	$A_2 \dots\ 0\ 1\ 0 \dots a_2$ $1\ 0\ i$ $1\ 0\ {-i}$
15) $S = [-2\ 1\ \ 3]\ ..$ 16) $S^3 = [2\ {-1}\ \ 3]\ ..$	$S^2 = [-1\ {-2}\ 3]$ (vgl. 4) . . .	$A_3 \dots\ 0\ 0\ 1 \dots a_3$ $1\ i\ 0$ $1\ {-i}\ 0$
		Doppelpunkte und Doppellinien
17) $S = [2\ \ 3\ \ 1]\ ..$ 18) $S^2 = [3\ \ 1\ \ 2]\ ..$	3zählige Collineationen . .	$C_1 \dots\ 1\ 1\ 1 \dots c_1$ $1\ \alpha\ \alpha^2$ $1\ \alpha^2\ \alpha$
19) $S = [-2\ 3\ {-1}]\ ..$ 20) $S^2 = [-3\ {-1}\ 2]\ ..$	" "	$C_2 \dots\ {-1}\ 1\ 1 \dots c_2$ $-1\ \alpha\ \alpha^2$ $-1\ \alpha^2\ \alpha$
21) $S = [-2\ {-3}\ 1]\ ..$ 22) $S^2 = [3\ {-1}\ {-2}]\ ..$	" "	$C_3 \dots\ 1\ {-1}\ 1 \dots c_3$ $\alpha^2\ {-1}\ \alpha$ $\alpha\ {-1}\ \alpha^2$
23) $S = [2\ {-3}\ {-1}]\ ..$ 24) $S^2 = [-3\ 1\ {-2}]\ ..$	" "	$C_4 \dots\ 1\ 1\ {-1} \dots c_4$ $\alpha\ \alpha^2\ {-1}$ $\alpha^2\ \alpha\ {-1}$.

(91ζ)

Für die durch die angegebene Centralprojection aus der ebenen Figur entstehende sphärische Figur ist die Zahl der Collineationen die doppelte, nämlich gleich 48. Die eine Hälfte derselben, welche durch dieselben Symbole, wie in Tabelle (91ζ) dargestellt werden — nur dass die Indices sich auf räumliche rechtwinklige Coordinaten $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ beziehen —, stellt eigentliche räumliche Collineationen (von der Determinante +1), hier speciell Drehungen dar, die übrigen 24 Collineationen, für welche die in den Klammern stehenden Ziffern durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie in (91ζ), bedeuten uneigentliche Collineationen (von der Determinante —1), hier speciell Spiegelungen und sogenannte Drehspiegelungen.[1])

Die 24 eigentlichen Collineationen sind — im Anschluss an die Tabelle (91ζ) — 1) die Identität, 2) . . 4) drei 2zählige Drehungen (Um-

[1]) Vgl. A. Schoenflies: Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig 1891. S. 29.

wendungen) um die 3 Symmetrieaxen $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$; 1)..4) bilden die sog. Vierergruppe); 5)..10) sechs 2zählige Drehungen (Umwendungen) um die 6 Symmetrieaxen $B_1 B_1' \ldots B_6 B_6'$; 11)..16) $3 . 2 = 6$ 4zählige Drehungen von 90° und 270° um die Axen $A_i A_i'$; 17)..24) $4 . 2 = 8$ 3zählige Drehungen von 120° und 240° um die Axen $C_i C_i'$.

Die 24 uneigentlichen Collineationen sind — ebenfalls im Anschluss an die Tabelle (91ζ) — 1) die Spiegelung am Mittelpunkte O (Inversion); 2)..4) 3 einfache Spiegelungen an den 3 Symmetrieebenen α_1, α_2, α_3 (den Aequatorebenen zu den Punkten A_i, A_i'); 5)..10) 6 einfache Spiegelungen an den 6 Symmetrieebenen $\beta_1 \ldots \beta_6$ (den Aequatorebenen zu den Punkten B_i, B_i'); 11)..16) $2 . 3 = 6$ vierzählige Drehspiegelungen (Drehungen von 90° und 270° um eine Axe $A_i A_i'$ und Spiegelung an der zugehörigen Aequatorebene α_i); 17)..24) $4 . 2 = 8$ sechszählige Drehspiegelungen (Drehungen von 60° und 300° um eine Axe $C_i C_i'$ und Spiegelung an der zugehörigen Aequatorebene γ_i). Die 24 uneigentlichen Collineationen resultiren auch einfach durch Combination je einer eigentlichen Collineation mit der Inversion $[-1\ -2\ -3]$; die 48 Collineationen stellen die sog. Oktaedergruppe zweiter Art[1]) dar, deren Eigenschaften in der letzten Zeit vielfach untersucht worden sind. Es sei hier nur noch darauf hingewiesen, dass die 24 eigentlichen Collineationen sich sämmtlich als zweifache, die 24 uneigentlichen als einfache und dreifache Spiegelungen darstellen lassen.

Was die 48 Correlationen der sphärischen (und der entsprechenden räumlichen) Figur anlangt, so ergeben sich diese analog aus den 24 Correlationen der zugehörigen ebenen Figur. Diese letzteren werden durch

$$\sigma \zeta'_i = \pm z_k \text{ oder durch } \tau z'_i = \pm \zeta_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (91\eta)$$

dargestellt, wobei ζ_i homogene Liniencoordinaten bedeuten, und analog, wie es oben geschah, durch

$$\underline{\overline{[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]}} \text{ oder } \overline{[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]} \quad \ldots\ldots \quad (91\eta')$$

($k_1, k_2, k_3 = 1, 2, 3$) bezeichnet; auch sie bleiben bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel ungeändert.

[1]) Vgl. A. Schoenflies a. a. O. S. 99.

Im Anschluss an die Tabelle (91ζ) bedeuten diese Correlationen für die specielle reguläre **ebene** Figur:

1) $\overline{[1\ \ 2\ \ 3]}$ oder $\underline{[1\ \ 2\ \ 3]}$ die Polarreciprocität in Bezug auf den imaginären Kreis $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ oder $\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2=0$

2) $\overline{[1\ -2\ -3]}$ „ $\underline{[1\ -2\ -3]}$ „ „ „ die gleichseitige Hyperbel $z_1^2-z_2^2-z_3^2=0$ oder $\zeta_1^2-\zeta_2^2-\zeta_3^2=0$

3) $\overline{[-1\ 2\ -3]}$ „ $\underline{[-1\ 2\ -3]}$ „ „ „ „ „ $-z_1^2+z_2^2-z_3^2=0$ oder $-\zeta_1^2+\zeta_2^2-\zeta_3^2=0$

4) $\overline{[-1\ -2\ 3]}$ „ $\underline{[-1\ -2\ 3]}$ „ „ „ auf den Kreis $-z_1^2-z_2^2+z_3^2=0$ oder $-\zeta_1^2-\zeta_2^2+\zeta_3^2=0$

5) $\overline{[-1\ \ 3\ \ 2]}$ „ $\underline{[-1\ \ 3\ \ 2]}$ „ „ „ auf die Parabel $-z_1^2+2z_2\,z_3=0$ oder $-\zeta_1^2+2\zeta_2\,\zeta_3=0$

6) $\overline{[-1\ -3\ -2]}$ „ $\underline{[-1\ -3\ -2]}$ „ „ „ „ „ $z_1^2+2z_2\,z_3=0$ oder $\zeta_1^2+2\zeta_2\,\zeta_3=0$

7) $\overline{[3\ -2\ \ 1]}$ „ $\underline{[3\ -2\ \ 1]}$ „ „ „ „ „ $-z_2^2+2z_1\,z_3=0$ oder $-\zeta_2^2+2\zeta_1\,\zeta_3=0$

8) $\overline{[-3\ -2\ -1]}$ „ $\underline{[-3\ -2\ -1]}$ „ „ „ „ „ $z_2^2+2z_1\,z_3=0$ oder $\zeta_2^2+2\zeta_1\,\zeta_3=0$

9) $\overline{[2\ \ 1\ -3]}$ „ $\underline{[2\ \ 1\ -3]}$ „ „ „ die gleichseitige Hyberbel $-z_3^2+2z_1\,z_2=0$ oder $-\zeta_3^2+2\zeta_1\,\zeta_2=0$

10) $\overline{[-2\ -1\ -3]}$ „ $\underline{[-2\ -1\ -3]}$ „ „ „ „ „ „ $z_3^2+2z_1\,z_2=0$ oder $\zeta_3^2+2\zeta_1\,\zeta_2=0$

(91ϑ)

11) $S=\overline{[1\ \ 3\ -2]}$ oder $\underline{[1\ \ 3\ -2]}$
12) $S^3=\overline{[1\ -3\ \ 2]}$ „ $\underline{[1\ -3\ \ 2]}$
{ $S^2=\overline{[1\ -2\ -3]}$ oder $S^2=\underline{[1\ -2\ -3]}$ } 4 zählige allgemeine Collineationen | Kern-curven { Doppelgerade $z_1^2=0\,..\,a_1$ / Doppelpunkt $\zeta_1^2=0\,..\,A_1$ }

13) $S=\overline{[-3\ \ 2\ \ 1]}$ „ $\underline{[-3\ \ 2\ \ 1]}$
14) $S^3=\overline{[3\ \ 2\ -1]}$ „ $\underline{[3\ \ 2\ -1]}$
{ $S^2=\overline{[-1\ 2\ -3]}$ oder $S^2=\underline{[-1\ 2\ -3]}$ } „ | „ { Doppelgerade $z_2^2=0\,..\,a_2$ / Doppelpunkt $\zeta_2^2=0\,..\,A_2$ }

15) $S=\overline{[-2\ \ 1\ \ 3]}$ „ $\underline{[-2\ \ 1\ \ 3]}$
16) $S^3=\overline{[2\ -1\ \ 3]}$ „ $\underline{[2\ -1\ \ 3]}$
{ $S^2=\overline{[-1\ -2\ 3]}$ oder $S^2=\underline{[-1\ -2\ 3]}$ } „ | „ { Doppelgerade $z_3^2=0\,..\,a_3$ / Doppelpunkt $\zeta_3^2=0\,..\,A_3$ }

17) $S=[2\ \ 3\ \ 1]$ oder $\boxed{2\ \ 3\ \ 1}$
18) $S^5=[3\ \ 1\ \ 2]$ „ $\boxed{3\ \ 1\ \ 2}$
{ $S^2=[3\ \ 1\ \ 2]$ oder $\boxed{3\ \ 1\ \ 2}$ / $S^4=[2\ \ 3\ \ 1]$ „ $\boxed{2\ \ 3\ \ 1}$ / $S^3=\overline{[1\ \ 2\ \ 3]}$ „ $\boxed{1\ \ 2\ \ 3}$ } 6zählige allgemeine Correlationen

Zwei sich in $\begin{matrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \alpha^2 & \alpha\end{matrix}$ doppelt berührende Kerncurven:

K_1 Gleichseitige Hyperbel, K_2 Parabel:

$$K_1\ ..\ 2\,(z_2\,z_3+z_3\,z_1+z_1\,z_2)\equiv\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2-2\,(\zeta_2\,\zeta_3+\zeta_3\,\zeta_1+\zeta_1\,\zeta_2)=0$$

$$K_2\ ..\ z_1^2+z_2^2+z_3^2-2\,(z_2\,z_3+z_3\,z_1+z_1\,z_2)\equiv 2\,(\zeta_2\,\zeta_3+\zeta_3\,\zeta_1+\zeta_1\,\zeta_2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
19)\; S\; = \overline{[-2\;\;3\;\;-1]}\text{ oder }\underline{[-2\;\;3\;\;-1]} \\
20)\; S^5 = \overline{[-3\;\;-1\;\;2]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[-3\;\;-1\;\;2]}
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
S^2 = [-3\;\;-1\;\;2]\text{ oder }\overline{\underline{[-3\;\;-1\;\;2]}} \\
S^4 = [-2\;\;3\;\;-1]\;\;\text{,,}\;\;\overline{\underline{[-2\;\;3\;\;-1]}} \\
S^3 = \overline{[1\;\;2\;\;3]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[1\;\;2\;\;3]}
\end{array}\right.
\\
\text{6zählige allgemeine Correlationen} \\
\text{Zwei sich in } \begin{array}{ccc} -1 & \alpha & \alpha^2 \\ -1 & \alpha^2 & \alpha \end{array} \text{ doppelt berührende Kerncurven:} \\
K_1 \text{ gleichseitige Hyperbel, } K_2 \text{ Parabel:} \\
K_1 \ldots 2(-z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2(-\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_1 + \zeta_1\zeta_2) = 0 \\
K_2 \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(-z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) \equiv 2(-\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_1 + \zeta_1\zeta_2) = 0 \\
\begin{array}{l}
21)\; S\; = \overline{[-2\;\;-3\;\;1]}\text{ oder }\underline{[-2\;\;-3\;\;1]} \\
22)\; S^5 = \overline{[3\;\;-1\;\;-2]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[3\;\;-1\;\;-2]}
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
S^2 = [3\;\;-1\;\;-2]\text{ oder }\overline{\underline{[3\;\;-1\;\;-2]}} \\
S^4 = [-2\;\;-3\;\;1]\;\;\text{,,}\;\;\overline{\underline{[-2\;\;-3\;\;1]}} \\
S^3 = \overline{[1\;\;2\;\;3]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[1\;\;2\;\;3]}
\end{array}\right.
\\
\text{6zählige allgemeine Correlationen} \\
\text{Zwei sich in } \begin{array}{ccc} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 1 & -\alpha^2 & \alpha \end{array} \text{ doppelt berührende Kerncurven:} \\
K_1 \text{ gleichseitige Hyperbel, } K_3 \text{ Parabel:} \\
K_1 \ldots 2(z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2) \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2(\zeta_2\zeta_3 - \zeta_3\zeta_1 + \zeta_1\zeta_2) = 0 \\
K_2 \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2) \equiv 2(\zeta_2\zeta_3 - \zeta_3\zeta_1 + \zeta_1\zeta_2) = 0 \\
\begin{array}{l}
23)\; S\; = \overline{[2\;\;-3\;\;-1]}\text{ oder }\underline{[2\;\;-3\;\;-1]} \\
24)\; S^5 = \overline{[-3\;\;1\;\;-2]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[-3\;\;1\;\;-2]}
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
S^2 = [-3\;\;1\;\;-2]\text{ oder }\overline{\underline{[-3\;\;1\;\;-2]}} \\
S^4 = [2\;\;-3\;\;-1]\;\;\text{,,}\;\;\overline{\underline{[2\;\;-3\;\;-1]}} \\
S^3 = \overline{[1\;\;2\;\;3]}\;\;\text{,,}\;\;\underline{[1\;\;2\;\;3]}
\end{array}\right.
\\
\text{6zählige allgemeine Correlationen} \\
\text{Zwei sich in } \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha^2 & -1 \\ \alpha^2 & \alpha & -1 \end{array} \text{ doppelt berührende Kerncurven:} \\
K_1 \text{ gleichseitige Hyperbel, } K_2 \text{ Parabel:} \\
K_1 \ldots 2(z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 z_2) \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2(\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_1 - \zeta_1\zeta_2) = 0 \\
K_2 \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 z_2) \equiv 2(\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_1 - \zeta_1\zeta_2) = 0.
\end{array}\right\}\; (91\vartheta)$$

Die Zahl der Correlationen für die durch die angegebene Centralprojection aus der ebenen Figur entstehende sphärische Figur ist wiederum die doppelte, nämlich gleich 48. Die eine Hälfte derselben, welche durch dieselben Symbole wie in Tabelle (91ϑ) dargestellt werden — nur dass die Indices bez. räumliche Punkt- und Ebenen-Coordinaten bedeuten — kann als eigentliche, die anderen 24 Correlationen, für welche die in den Klammern stehenden Ziffern durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen, wie in (91ϑ) erhalten, können als uneigentliche Collineationen bezeichnet werden.

Die sphärischen Kerncurven für diese Polarcorrelationen und allgemeinen Correlationen werden nun durchweg kleine (speciell auch grosse)

Kugelkreise,[1]) nämlich die Schnittcurven der durch O und die ebenen Kerncurven in (91ϑ) bestimmten Kegel 2ten Grades mit der concentrischen Projectionskugel $\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 = 1$. Insbesondere sind die sphärischen Kerncurven derjenigen Polarcorrelationen, welche Drehungen um eine zweizählige Axe (Umwendungen) entsprechen, kleine Kugelkreise, deren sphärische Radien $\frac{\pi}{4}$ betragen und für welche der Mittelpunkt und Gegenpunkt die Schnittpunkte der zweizähligen Axe mit der Kugel sind. Einer einfachen Spiegelung entspricht eine Polarcorrelation, deren sphärische Kerncurve ein solcher kleiner Kugelkreis (und dessen Gegenkreis) vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$ ist, dessen Mittelpunkt und Gegenpunkt die Schnittpunkte der Normalen zur Spiegelebene mit der Kugelfläche sind.

Allgemein entspricht einer Drehung um eine Axe von der Amplitude $\frac{2k\pi}{n}$ eine allgemeine Correlation, deren beide sphärische Kerncurven concentrische kleine Kugelkreise (und deren Gegenkreise) sind, welche also eine doppelte Berührung in den beiden imaginären Kreispunkten der unendlich fernen Schnittlinie der parallelen Ebenen haben. Die Mittelpunkte sind die Schnittpunkte der Axe mit der Kugelfläche, die beiden sphärischen Radien ε_1 und ε_2 ergänzen sich zu $\frac{\pi}{2}$, wobei $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{2k\pi}{n}}$ ist. Die beiden Kerncurven sind reell für

$$\frac{1}{2} < \frac{2k}{n} < \frac{3}{2}, \text{ imaginär für } -\frac{1}{2} < \frac{2k}{n} < \frac{1}{2};$$

in den Uebergangsfällen $\frac{2k}{n} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ reduciren sie sich auf den unendlich kleinen Kugelkreis (und den Gegenkreis) und den Hauptkreis, welcher den Aequator zu den Mittelpunkten bildet. Für $\frac{2k}{n} = 1$ resultirt der specielle Fall (vgl. oben) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi}{4}$, für $\frac{2k}{n} = 0$ der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis.

Einer Drehspiegelung d. h. einer Drehung um eine Axe von der Amplitude $\frac{2k\pi}{n}$ verbunden mit einer Spiegelung an der zugehörigen Aequatorebene entspricht eine allgemeine Correlation, deren beide sphärische Kern-

[1]) Vgl. hierzu E. Hess: Ueber die Correlationen der regulären Gruppen. Sitzungsber. der Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. Dezember 1894. S. 11—35.

curven concentrische kleine Kugelkreise (und deren Gegenkreise) sind. Die Mittelpunkte derselben sind wiederum die Endpunkte der Axe und die beiden sphärischen Radien ε_1' und ε_2' ergänzen sich zu $\frac{\pi}{2}$, wobei

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1' = \operatorname{cotg} \varepsilon_2' = \sqrt{\cos \frac{2k\pi}{n}}$$

ist. Die beiden Kerncurven sind also umgekehrt imaginär für $\frac{1}{2} < \frac{2k}{n} < \frac{3}{2}$, dagegen reell für $-\frac{1}{2} < \frac{2k}{n} < \frac{1}{2}$. Die Uebergangsfälle $\frac{2k}{n} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ ergeben dasselbe Resultat wie oben, während für $\frac{2k}{n} = 0$ der oben erwähnte, der einfachen Spiegelung entsprechende Fall resultirt und für $\frac{2k}{n} = 1$ wiederum der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis sich ergiebt (über diesen letzteren Fall der Polarcorrelation, welcher der Inversion entspricht vgl. u. den ersten Fall der uneigentlichen Correlationen).

Die 24 eigentlichen Correlationen sind — im Anschluss an die Tabelle (91ϑ) — 1) die Polarcorrelation in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis, 2) . . 4) drei Polarcorrelationen, deren sphärische Kerncurven die mit den Radien $\frac{\pi}{4}$ um die Mittelpunkte A_1 (A_1'), A_2 (A_2'), A_3 (A_3') beschriebenen kleinen Kugelkreise (und deren Gegenkreise) sind, 5) . . 10) sechs Polarcorrelationen, deren sphärische Kerncurven die mit den Radien $\frac{\pi}{4}$ um die Mittelpunkte B_1 (B_1'), B_4, (B_4') B_2 (B_2'), B_5 (B_5'), B_3 (B_3') und B_6 (B_6') beschriebenen kleinen Kugelkreise (und deren Gegenkreise) sind, 11) . . 16) $3 . 2 = 6$ vierzählige Correlationen, deren sphärische Kerncurven die Nullkreise mit den Mittelpunkten A_1 (A_1'), A_2 (A_2'), A_3 (A_3') und die Hauptkreise α_1, α_2, α_3 sind, 17) . . 24) $4 . 2 = 8$ sechszählige allgemeine Correlationen, deren sphärische Kerncurven je zwei concentrische kleine Kugelkreise (und deren Gegenkreise) mit den sphärischen Radien $\varepsilon_1 = 90° - \eta$, $\varepsilon_2 = \eta$ ($\operatorname{tg} \eta = \sqrt{2}$) und den Mittelpunkten C_1 (C_1'), C_2 (C_2'), C_3 (C_3') und C_4 (C_4') sind.

Was die 24 uneigentlichen Correlationen anlangt, so resultiren dieselben einfach durch die Combination der 24 eigentlichen mit der Inversion. Die sämmtlichen Kerncurven werden bez. dieselben, wie für die eigentlichen Correlationen; nur entspricht jetzt jedem Hauptkreis der Kugel der Gegenpunkt des Punktes, welcher ihm bei der eigentlichen Corre-

lation entsprach; jedem Punkte entspricht zwar in beiden Fällen derselbe Hauptkreis (dieselbe Ebene), aber das eine Mal die eine, das andere Mal die entgegengesetzte Richtung (oder Seite) des Hauptkreises, eine Unterscheidung, welche sich für die umgeschriebenen Polyeder in der Vertauschung der beiden parallelen (an Punkt und Gegenpunkt construirten) Berührungsebenen ausdrückt.

Hinsichtlich der Polarcorrelationen der übrigen regulären Gruppen und der Aenderung der Beziehungen, welche im Falle des Fehlens der Inversion (bei der Tetraedergruppe und den Diedergruppen mit ungeradzähliger Hauptaxe) eintritt, sei auf die erwähnte Abhandlung des Verfassers[1]) verwiesen, in welcher auch die durch die sphärischen Kerncurven bestimmten Eintheilungen der Kugelfläche berücksichtigt sind.

§ 26.

Uebertragung einer Figur des dreidimensionalen Raumes R_3 auf den dreidimensionalen sphärischen Raum S_3.

Nunmehr soll die bereits im § 24 erwähnte Uebertragung von Figuren des dreidimensionalen ebenen Raumes R_3 auf den dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 vermöge der Centralprojection behandelt und auf die Figuren eines Systems dreier desmischen Tetraeder T_1, T_2, T_3 und eines solchen Systems in Verbindung mit den drei Tetraedern T_4, T_5, T_6 des conjugirten desmischen Systems angewendet werden.

1) Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Raumes R_3, z_1, z_2, z_3, z_4 seine homogenen Coordinaten (in Beziehung auf das Tetraeder $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$), und es liege der Mittelpunkt O des sphärischen Raumes S_3 im Abstande $= 1$ von dem ebenen Raume R_3, so dass S_3 den Raum R_3 im Punkte O' (dem Anfangspunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems) berührt, dann sind die Coordinaten $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{z}_4$ des auf S_3 projicirten Punktes M und des Gegenpunktes M' in Bezug auf ein vierfach rechtwinkliges System mit Anfangspunkt O, der $O\mathfrak{z}_4$-Axe OO' und den bez. zu $O'X$, $O'Y$, $O'Z$ parallelen Axen $O\mathfrak{z}_1$, $O\mathfrak{z}_2$, $O\mathfrak{z}_3$ durch die Formeln bestimmt:

[1]) Sitzungsber. d. Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. Dezember 1894. S. 11—35.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \pm \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} \\ \mathfrak{z}_2 &= \pm \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} \\ \mathfrak{z}_3 &= \pm \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} \\ \mathfrak{z}_4 &= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} \end{aligned}\right\} (92\alpha)$$

oder bei Benutzung der homogenen Coordinaten z_1, z_2, z_3, z_4:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \pm \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}} \\ \mathfrak{z}_2 &= \pm \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}} \\ \mathfrak{z}_3 &= \pm \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}} \\ \mathfrak{z}_4 &= \pm \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}} \end{aligned}\right\} (92\beta),$$

wo das obere und untere Vorzeichen immer für alle 4 Coordinaten $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ gleichzeitig zu nehmen ist. Wenn die homogenen Coordinaten mit

$$\frac{1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}}$$

multiplicirt werden, so dass die Quadratsumme $= 1$ wird, so resultiren die einfachen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \pm z_1 \\ \mathfrak{z}_2 &= \pm z_2 \\ \mathfrak{z}_3 &= \pm z_3 \\ \mathfrak{z}_4 &= \pm z_4 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (92\gamma),$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wobei } \mathfrak{z}_1 = \cos(OM, O\mathfrak{Z}_1),\ \mathfrak{z}_2 = \cos(OM, O\mathfrak{Z}_2),\ \mathfrak{z}_3 = \cos(OM, O\mathfrak{Z}_3),\ \mathfrak{z}_4 = \cos(OM, O\mathfrak{Z}_4) \\ \text{und } \mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2 = 1 \end{aligned}\right\} (92\delta)$$

ist. Die Coordinaten eines Punktes M des S_3 sind also die Cosinus der sphärischen Abstände desselben von den Eckpunkten des Quadrantentetraeders, welches durch die vier auf einander senkrechten Coordinatenaxen oder die vier auf einander senkrechten Coordinatenräume auf S_3 entsteht.

2) Jede Ebene von R_3 wird durch einen durch O und die Ebene bestimmten dreidimensionalen ebenen Raum als eine Haupt-(Diametral-) Kugel des S_3 projicirt. Die Coordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ einer Hauptkugel sind die Coordinaten des Pols (bezw. Gegenpols) dieser Hauptkugel d. h. die Cosinus der Winkel, welche das von O auf den Euklid'schen Raum der Hauptkugel gefällte Perpendikel mit den Coordinatenaxen bildet oder die Cosinus der sphärischen Abstände des Pols (bez. Gegenpols) von den Eckpunkten des Quadrantentetraeders; hierbei entspricht der Pol oder Gegenpol bez. der Innen- oder Aussenseite der Hauptkugel. Der Pol (bez. Gegenpol) einer Hauptkugel ist der Schnittpunkt aller auf derselben senkrecht stehenden Hauptkugeln; umgekehrt ergiebt sich die Polarhauptkugel m eines Punktes M von S_3 als der Ort der Endpunkte aller Hauptkreis-

quadranten, welche durch M gehen, oder als der Ort aller Hauptkreise, welche auf allen durch M gehenden Hauptkugeln die Polaren (Aequatoren) zu M sind. Dies Entsprechen von Pol und Polarhauptkugel lässt sich als die Polarreciprocität in Beziehung auf die unendlich ferne imaginäre Kugel $\mathfrak{K}_\infty$ auffassen, welche durch den aus O über ihr beschriebenen Kegelraum in der Gleichung $\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2=0$ dargestellt wird (vgl. § 27 II).

3) Jede Gerade von R_3 wird durch eine durch O und die Gerade bestimmte Ebene als ein Hauptkreis des S_3 projicirt. Ein Hauptkreis des S_3 ist sowohl durch zwei Punkte (und deren Gegenpunkte), wie durch zwei Hauptkugeln als deren Schnittlinie bestimmt. Zu jedem Hauptkreis gehört hiernach ein reciprok-polarer Hauptkreis, welcher sich einmal als Schnittlinie der beiden Polarhauptkugeln zu zwei Punkten des ersteren, zweitens auch als Verbindungskreis der beiden Pole (Gegenpole) zu zweien durch den ersteren hindurchgehenden Hauptkugeln ergiebt. Der sphärische Abstand zweier Punkte des S_3 ist gleich dem Neigungswinkel der beiden Polarhauptkugeln derselben, und der Neigungswinkel zweier Hauptkugeln gleich dem sphärischen Abstande der Pole (bez. Gegenpole) derselben.

Zur analytischen Darstellung dieser und weiterer Beziehungen führt man die den Plücker'schen Coordinaten gerader Linien im R_3 analogen Hauptkreiscordinaten ein. Es seien:

$\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \mathfrak{z}_3', \mathfrak{z}_4'$ / $\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \mathfrak{z}_3'', \mathfrak{z}_4''$ | die Coordinaten zweier Punkte eines Hauptkreises, welche um einen Quadranten abstehen ($\Sigma\mathfrak{z}_i'^2=1,\ \Sigma\mathfrak{z}_i''^2=1,\ \Sigma\mathfrak{z}_i'\mathfrak{z}_k''=0$ $(i, k=1, 2, 3, 4)$)

und $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \zeta_4'$ / $\zeta_1'', \zeta_2'', \zeta_3'', \zeta_4''$ | die Coordinaten zweier Hauptkugeln (oder ihrer Pole), welche durch den Hauptkreis hindurchgehen und auf einander senkrecht stehen ($\Sigma\zeta_i'^2=1,\ \Sigma\zeta_i''^2=1,\ \Sigma\zeta_i'\zeta_k''=0$),

dann sind die 6 Grössen:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{p}_{12}, \mathfrak{p}_{13}, \mathfrak{p}_{14}\\ \mathfrak{p}_{34}, \mathfrak{p}_{42}, \mathfrak{p}_{24}\end{matrix}\right\},\ \text{wo } \mathfrak{p}_{ik}=\mathfrak{z}_i'\mathfrak{z}_k''-\mathfrak{z}_k'\mathfrak{z}_i''\ \text{ist,} \quad \ldots\ldots \quad (92\varepsilon)$$

die Strahl-Coordinaten, die 6 Grössen:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{q}_{12}, \mathfrak{q}_{13}, \mathfrak{q}_{14}\\ \mathfrak{q}_{34}, \mathfrak{q}_{42}, \mathfrak{q}_{23}\end{matrix}\right\},\ \text{wo } \mathfrak{q}_{ik}=\zeta_i'\zeta_k''-\zeta_k'\zeta_i''\ \text{ist,} \quad \ldots\ldots \quad (92\zeta)$$

die Axen-Coordinaten des Hauptkreises.[1])

[1]) Die Plücker'schen Linien- (resp. Hauptkreis-) Coordinaten sollen im Folgenden immer in der oben gegebenen Anordnung in zwei Verticalstriche eingeschlossen angegeben werden.

Dabei ist $\mathfrak{p}_{ik} = \mathfrak{q}_{lm}$, oder die $\mathfrak{p}_{ik}$ eines Hauptkreises sind die $\mathfrak{q}_{ik}$ seiner reciproken Polare. Für die $\mathfrak{p}_{ik}$ (und entsprechend die $\mathfrak{q}_{ik}$) gelten die Relationen:

$$\Sigma \mathfrak{p}^2_{ik} = \Sigma \mathfrak{q}^2_{ik} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (92\eta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } \mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_{34} + \mathfrak{p}_{13}\,\mathfrak{p}_{42} + \mathfrak{p}_{14}\,\mathfrak{p}_{23} = 0 \\ \mathfrak{q}_{12}\,\mathfrak{q}_{34} + \mathfrak{q}_{13}\,\mathfrak{q}_{42} + \mathfrak{q}_{14}\,\mathfrak{q}_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (92\vartheta)$$

Die $\mathfrak{p}_{ik}$ sind auch, zu je dreien mit 0 combinirt, die Coordinaten der Hauptkugeln, welche den Hauptkreis mit den Eckpunkten des Quadrantentetraeders verbinden, die $\mathfrak{q}_{ik}$ die Coordinaten der Punkte, in welchen der Hauptkreis die Fundamentalhauptkugeln schneidet.

Ein Hauptkreis, welcher einen gegebenen Hauptkreis und dessen reciproke Polare schneidet, ist auf beiden rechtwinklig, und die Länge des zwischen beiden liegenden Abschnittes beträgt einen Quadranten.

Zwei Hauptkreise eines S_3 schneiden sich nur, wenn sie derselben Hauptkugel angehören. Sind zwei Hauptkreise gegeben, welche sich nicht schneiden, so können im Allgemeinen zwei Hauptkreise gezogen werden, welche beide rechtwinklig scheiden: es sind dies die beiden Hauptkreise, welche als die beide gegebenen Hauptkreise und deren reciproke Polaren schneidenden gezogen werden können. Diese beiden gemeinschaftlichen sphärischen Perpendikel sind reciproke Polaren.

Sind $\mathfrak{p}'_{ik}$, $\mathfrak{p}''_{ik}$ die Coordinaten der beiden Hauptkreise, δ'_{12}, δ''_{12} die Bogenlängen der beiden gemeinsamen Perpendikel, ε'_{12}, ε''_{12} die Winkel, welche je zwei durch δ'_{12} oder durch δ''_{12} und die beiden Hauptkreise gelegten Hauptkugeln miteinander bilden, dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{r} \sin\delta'_{12}\sin\varepsilon'_{12} = \sin\delta''_{12}\sin\varepsilon''_{12} = \Sigma\mathfrak{p}'_{ik}\,\mathfrak{p}''_{lm} = \mathfrak{p}'_{12}\,\mathfrak{p}''_{34} + \mathfrak{p}'_{13}\,\mathfrak{p}''_{42} + \mathfrak{p}'_{14}\,\mathfrak{p}''_{23} \\ + \mathfrak{p}'_{34}\,\mathfrak{p}''_{12} + \mathfrak{p}'_{42}\,\mathfrak{p}''_{13} + \mathfrak{p}'_{23}\,\mathfrak{p}''_{14} \end{array}\right\} (92\iota)$$

$$\left.\begin{array}{r} \cos\delta'_{12}\cos\varepsilon'_{12} = \cos\delta''_{12}\cos\varepsilon''_{12} = \Sigma\mathfrak{p}'_{ik}\,\mathfrak{p}''_{ik} = \mathfrak{p}'_{12}\,\mathfrak{p}''_{12} + \mathfrak{p}'_{13}\,\mathfrak{p}''_{13} + \mathfrak{p}'_{14}\,\mathfrak{p}''_{14} \\ + \mathfrak{p}'_{34}\,\mathfrak{p}''_{34} + \mathfrak{p}'_{42}\,\mathfrak{p}''_{42} + \mathfrak{p}'_{23}\,\mathfrak{p}''_{23}; \end{array}\right\} (92\varkappa)$$

diese beiden Grössen können als Moment und Comoment[1]) der beiden

[1]) Vergl. hierzu: F. Lindemann: Projectivische Behandlung der Mechanik fester Körper. Math. Ann. VII. 56—144. E. d'Ovidio: Studio sullo geometria projettiva. Brioschi Ann. (2). VI. 72—101. W. Killing: Die Nicht-Euklidischen Raumformen. Leipzig 1885. Heath: On the dynamics of a rigid body in elliptic space. Philosoph. Transact. 1884. Cole F. N.: On Rotations in Space of Four Dimensions. Americ. Journ. of Math. Vol. XII. p. 191—210. — Besonders die beiden letzten Arbeiten stehen in naher Beziehung zu den obigen und den weiter folgenden Betrachtungen.

Hauptkreise bezeichnet werden. Schneiden sich die beiden Hauptkreise, so ist $\delta'_{12} = \delta''_{12} = 0$, und die zweite Formel ergiebt für den Neigungswinkel ε_{12} derselben:

$$\cos \varepsilon_{12} = \Sigma \mathfrak{p}'_{ik}\, \mathfrak{p}''_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92\lambda)$$

4) Von besonderer Bedeutung für die folgenden Betrachtungen sind die sphärischen Linien- (Hauptkreis-) Complexe ersten Grades, deren wichtigste Eigenschaften kurz entwickelt werden sollen.

Ein solcher sphärischer Complex entsteht auf die oben angegebene Art durch Centralprojection aus einem linearen Complexe des R_3. Derselbe wird in $\mathfrak{p}_{ik}$- oder $\mathfrak{q}_{ik}$-Coordinaten durch eine der beiden Gleichungen dargestellt:

$$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{p}_{ik} \equiv \alpha_{12}\, \mathfrak{p}_{12} + \alpha_{13}\, \mathfrak{p}_{13} + \alpha_{14}\, \mathfrak{p}_{14} + \alpha_{34}\, \mathfrak{p}_{34} + \alpha_{42}\, \mathfrak{p}_{42} + \alpha_{23}\, \mathfrak{p}_{23} = 0 \;.\;.\;. \quad (93\alpha)$$

$$\text{oder} \quad \Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{q}_{lm} \equiv \alpha_{34}\, \mathfrak{q}_{12} + \alpha_{42}\, \mathfrak{q}_{13} + \alpha_{23}\, \mathfrak{q}_{14} + \alpha_{12}\, \mathfrak{q}_{34} + \alpha_{13}\, \mathfrak{q}_{42} + \alpha_{14}\, \mathfrak{q}_{23} = 0 \quad .\;. \quad (93\alpha')$$

Der polare Complex, dessen Hauptkreise die reciproken Polaren der Hauptkreise des ersteren sind, wird bez. durch die Gleichungen:

$$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{p}_{lm} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93\beta)$$

$$\text{oder} \quad \Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{q}_{ik} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93\beta')$$

dargestellt.

Jedem Punkte des S_3 entspricht in Bezug auf den Complex eine durch den Punkt (und den Gegenpunkt) gehende Hauptkugel, jeder Hauptkugel ein auf ihr liegender Punkt (und dessen Gegenpunkt); das sphärische Nullsystem ist durch die Gleichungen charakterisirt ($\alpha_{ki} = -\alpha_{ik}$):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \phantom{\alpha_{43}\,\zeta_1 +{}} \alpha_{34}\,\zeta_2 + \alpha_{42}\,\zeta_3 + \alpha_{23}\,\zeta_4 \\ \mathfrak{z}_2 &= \alpha_{43}\,\zeta_1 \phantom{+ \alpha_{41}\,\zeta_2} + \alpha_{14}\,\zeta_3 + \alpha_{31}\,\zeta_4 \\ \mathfrak{z}_3 &= \alpha_{24}\,\zeta_1 + \alpha_{41}\,\zeta_2 \phantom{+ \alpha_{14}\,\zeta_3} + \alpha_{12}\,\zeta_4 \\ \mathfrak{z}_4 &= \alpha_{32}\,\zeta_1 + \alpha_{13}\,\zeta_2 + \alpha_{21}\,\zeta_3 \end{aligned}\right\} (93\gamma) \qquad \left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \phantom{\alpha_{21}\,\mathfrak{z}_1 +{}} \alpha_{12}\,\mathfrak{z}_2 + \alpha_{13}\,\mathfrak{z}_3 + \alpha_{14}\,\mathfrak{z}_4 \\ \zeta_2 &= \alpha_{21}\,\mathfrak{z}_1 \phantom{+ \alpha_{32}\,\mathfrak{z}_2} + \alpha_{23}\,\mathfrak{z}_3 + \alpha_{24}\,\mathfrak{z}_4 \\ \zeta_3 &= \alpha_{31}\,\zeta_1 + \alpha_{32}\,\mathfrak{z}_2 \phantom{+ \alpha_{23}\,\mathfrak{z}_3} + \alpha_{34}\,\mathfrak{z}_4 \\ \zeta_4 &= \alpha_{41}\,\mathfrak{z}_1 + \alpha_{42}\,\mathfrak{z}_2 + \alpha_{43}\,\mathfrak{z}_3 \,. \end{aligned}\right\} (93\gamma')$$

Durchläuft der Punkt $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ einen Hauptkreis ($\mathfrak{p}_{ik}$), so dreht sich die Hauptkugel $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ um die conjugirte Polare ($\mathfrak{p}'_{ik}$), wobei die Beziehungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{12} &= \alpha_{34} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{12} \\ \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{13} &= \alpha_{42} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{13} \\ \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{14} &= \alpha_{23} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{14} \\ \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{34} &= \alpha_{12} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{34} \\ \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{42} &= \alpha_{13} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{42} \\ \sigma' \,.\, \mathfrak{p}'_{23} &= \alpha_{14} \,.\, C - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}_{23} \end{aligned}\right\} (93\delta) \qquad \left.\begin{aligned} \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{12} &= \alpha_{34} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{12} \\ \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{13} &= \alpha_{42} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{13} \\ \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{14} &= \alpha_{23} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{14} \\ \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{34} &= \alpha_{12} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{34} \\ \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{42} &= \alpha_{13} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{42} \\ \sigma \,.\, \mathfrak{p}_{23} &= \alpha_{14} \,.\, C' - \Gamma^{1/2} .\, \mathfrak{p}'_{23} \end{aligned}\right\} (93\delta'),$$

wenn zur Abkürzung

$$\Gamma = (\alpha_{12}\,\alpha_{34} + \alpha_{13}\,\alpha_{42} + \alpha_{14}\,\alpha_{23})^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\varepsilon)$$

$$C = \Sigma\,\alpha_{ik}\,\mathfrak{p}_{ik},\ C' = \Sigma\alpha_{ik}\,\mathfrak{p}'_{ik} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\zeta)$$

gesetzt wird.

Ist $\Gamma = 0$, d. h. der sphärische Complex ein specieller, so ist

$$\mathfrak{p}'_{12} : \mathfrak{p}'_{13} : \mathfrak{p}'_{14} : \mathfrak{p}'_{34} : \mathfrak{p}'_{42} : \mathfrak{p}'_{23} = \alpha_{34} : \alpha_{42} : \alpha_{23} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : \alpha_{14},$$

d. h. jedem Hauptkreis ist der Leithauptkreis zugeordnet; der diesem speciellen Complexe polar entsprechende hat die reciproke Polare dieses Leithauptkreises zur Directrix.

Die beiden sich polar entsprechenden Complexe (93α) und (93β) bestimmen zwei specielle, sich polar entsprechende Complexe, deren Leithauptkreise die Axen des Complexes und seines polaren Complexes sind. Die Coordinaten dieser Axen folgen aus der in λ quadratischen Gleichung:

$$(\alpha_{12}+\lambda\,\alpha_{34})\,(\alpha_{34}+\lambda\,\alpha_{12}) + (\alpha_{13}+\lambda\,\alpha_{42})\,(\alpha_{42}+\lambda\,\alpha_{13}) + (\alpha_{14}+\lambda\,\alpha_{23})\,(\alpha_{23}+\lambda\,\alpha_{14}) = 0 \quad (93\eta)$$

$$\text{oder } \lambda^2 + \frac{A}{\Gamma^{1/2}}\,\lambda + 1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\eta')$$

$$\text{wo } A = \Sigma\alpha^2_{ik} = \alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+\alpha_{14}^2+\alpha_{34}^2+\alpha_{42}^2+\alpha_{23}^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\vartheta)$$

ist. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung ($93\eta'$) sind reell und reciprok:

$$\lambda_0 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4\,\Gamma}}{2\,\Gamma^{1/2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\iota);$$

die hierdurch bestimmten Axen sind also zwei polar-reciproke Hauptkreise. Für $\Gamma = 0$, d. h. einen speciellen Complex sind die Axen der Leithauptkreis und seine reciproke Polare. Wenn die Discriminante $A^2 - 4\,\Gamma = 0$ ist, so sind die beiden Fälle α') $A = 2\,\Gamma^{1/2}$ und β') $A = -2\Gamma^{1/2}$ zu unterscheiden.

Im Falle α') ist $\lambda_0 = -1$ und $\alpha_{12} = \alpha_{34}$, $\alpha_{13} = \alpha_{42}$, $\alpha_{14} = \alpha_{23}$, und der Complex:

$$\alpha_{12}\,(\mathfrak{p}_{12}+\mathfrak{p}_{34}) + \alpha_{13}\,(\mathfrak{p}_{13}+\mathfrak{p}_{42}) + \alpha_{14}\,(\mathfrak{p}_{14}+\mathfrak{p}_{23}) = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (93\varkappa)$$

$$\text{oder } \alpha_{12}\,\mathfrak{x}_1 + \alpha_{13}\,\mathfrak{x}_3 + \alpha_{14}\,\mathfrak{x}_5 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\varkappa'),$$

wenn die $\mathfrak{x}_i$ die analog den Klein'schen Coordinaten x_i (vgl. § 1 (2α)) gebildeten sphärischen Liniencoordinaten bedeuten, fällt mit seinem polaren Complexe zusammen; die Axen werden unbestimmt. Die Hauptkreise des Complexes ($93\varkappa'$) enthalten die Erzeugenden des ersten Systems $\mathfrak{x}_1 = 0$, $\mathfrak{x}_3 = 0$, $\mathfrak{x}_5 = 0$ der unendlich fernen imaginären Kugel: $\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2+\mathfrak{x}_5^2 = 0$.

Im Falle β') ist $\lambda_0 = 1$ und $\alpha_{12} = -\alpha_{34}$, $\alpha_{13} = -\alpha_{42}$, $\alpha_{14} = -\alpha_{23}$; der Complex:

$$\alpha_{12}\,(\mathfrak{p}_{12}-\mathfrak{p}_{34}) + \alpha_{13}\,(\mathfrak{p}_{13}-\mathfrak{p}_{42}) + \alpha_{14}\,(\mathfrak{p}_{14}-\mathfrak{p}_{23}) = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (93\lambda)$$

$$\text{oder } \alpha_{12}\,\mathfrak{x}_2+\alpha_{13}\,\mathfrak{x}_4+\alpha_{14}\,\mathfrak{x}_6 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (93\lambda')$$

fällt ebenfalls mit seinem polaren zusammen; die Axen sind gleichfalls unbestimmt. Die Hauptkreise des Complexes ($93\lambda'$) enthalten die Erzeugenden des zweiten Systems $\mathfrak{x}_2 = 0$, $\mathfrak{x}_4 = 0$, $\mathfrak{x}_6 = 0$ der unendlich fernen imaginären Kugel: $\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_4^2 + \mathfrak{x}_6^2 = 0$.

Dieselben Resultate ergeben sich auch, wenn man die Bedingung ausdrückt, dass die conjugirte Polare eines Hauptkreises in Bezug auf einen sphärischen Complex ersten Grades C zugleich die reciproke Polare des Hauptkreises sein soll. Aus den Bedingungen $\mathfrak{p}'_{ik} = \varrho\, \mathfrak{p}_{lm}$ folgt durch einfache Determinantenentwicklungen die Gleichung:

$$\varrho^6 - A\varrho^5 - \Gamma\varrho^4 + 2A\Gamma\varrho^3 - \Gamma^2\varrho^2 - A\Gamma^2\varrho + \Gamma^3 = 0, \quad \ldots \quad (93\mu)$$

welche die beiden Doppelwurzeln $\Gamma^{\frac{1}{2}}$ und $-\Gamma^{\frac{1}{2}}$ und die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\varrho^2 - A\varrho + \Gamma = 0 \quad \ldots\ldots \quad (93\nu)$$

hat.

α) Der Doppelwurzel $\varrho = \Gamma^{\frac{1}{2}}$ entsprechen die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{13} + \mathfrak{p}_{42} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (93\xi')$$

in Verbindung mit $C = 0$, oder, wenn

$$\begin{array}{l} \alpha_{12} - \alpha_{34} = \beta'_{12} \\ \alpha_{13} - \alpha_{42} = \beta'_{13} \\ \alpha_{14} - \alpha_{23} = \beta'_{14} \end{array}$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \beta'_{12}\,\mathfrak{p}_{12} + \beta'_{13}\,\mathfrak{p}_{13} + \beta'_{14}\,\mathfrak{p}_{14} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12}^2 + \mathfrak{p}_{13}^2 + \mathfrak{p}_{14}^2 = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (93o')$$

d. h. es resultiren die beiden imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise, welche dem Complexe und der unendlich fernen imaginären Kugel angehören und die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \begin{array}{lll} \beta'^2_{13}+\beta'^2_{14}, & -\beta'_{12}\beta'_{13} \pm i\beta'_{14}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & -\beta'_{12}\beta'_{14} \mp i\beta'_{13}\Gamma'^{\frac{1}{4}} \\ -(\beta'^2_{13}+\beta'^2_{14}), & \beta'_{12}\beta'_{13} \mp i\beta'_{14}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & \beta'_{12}\beta'_{14} \pm i\beta'_{13}\Gamma'^{\frac{1}{4}} \end{array} \right\| \\ \text{oder} \left\| \begin{array}{lll} -\beta'_{13}\beta'_{12} \mp i\beta'_{14}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & \beta'^2_{12}+\beta'^2_{14}, & -\beta'_{13}\beta'_{14} \pm i\beta'_{12}\Gamma'^{\frac{1}{4}} \\ \beta'_{13}\beta'_{12} \pm i\beta'_{14}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & -(\beta'^2_{12}+\beta'^2_{14}), & \beta'_{13}\beta'_{14} \mp i\beta'_{12}\Gamma'^{\frac{1}{4}} \end{array} \right\| \\ \text{oder} \left\| \begin{array}{lll} -\beta'_{14}\beta'_{12} \pm i\beta'_{13}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & -\beta'_{14}\beta'_{13} \mp i\beta'_{12}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & \beta'^2_{12}+\beta'^2_{13} \\ \beta'_{14}\beta'_{12} \mp i\beta'_{13}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & \beta'_{14}\beta'_{13} \pm i\beta'_{12}\Gamma'^{\frac{1}{4}}, & -(\beta'^2_{12}+\beta'^2_{13}) \end{array} \right\| \end{array}\right\} \quad (93\pi'),$$

wo

$$\Gamma'^{\frac{1}{2}} = A - 2\Gamma^{\frac{1}{2}} = \beta'^2_{12} + \beta'^2_{13} + \beta'^2_{14} \quad \ldots\ldots \quad (93\varrho')$$

ist.

α') In dem speciellen Falle $A = 2\Gamma^{1/2}$ ist $\Gamma' = 0$, $\beta'_{ik} = 0$; die Hauptkreise werden unbestimmt, nämlich die Erzeugenden des einen Systems der unendlich fernen imaginären Kugel. Solche Complexe sind z. B. die Fundamentalcomplexe $\mathfrak{x}_1 = 0$, $\mathfrak{x}_3 = 0$, $\mathfrak{x}_5 = 0$, ferner $\mathfrak{x}_3 \pm \mathfrak{x}_5 = 0$, $\mathfrak{x}_5 \pm \mathfrak{x}_1 = 0$, $\mathfrak{x}_1 \pm \mathfrak{x}_3 = 0$ u. s. w.

β) Analog entsprechen der Doppelwurzel $\varrho = -\Gamma^{1/2}$ die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} - \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{13} - \mathfrak{p}_{42} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} - \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad (93\xi'')$$

in Verbindung mit $C = 0$, oder wenn

$$\begin{array}{l} \alpha_{12} + \alpha_{34} = \beta''_{12} \\ \alpha_{13} + \alpha_{42} = \beta''_{13} \\ \alpha_{14} + \alpha_{23} = \beta''_{14} \end{array}$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \beta''_{12}\,\mathfrak{p}_{12} + \beta''_{13}\,\mathfrak{p}_{13} + \beta''_{14}\,\mathfrak{p}_{14} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12}^2 + \mathfrak{p}_{13}^2 + \mathfrak{p}_{14}^2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (93o'')$$

d. h. es resultiren die beiden imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise, welche dem Complexe und der unendlich fernen imaginären Kugel angehören und deren Coordinaten sind:

$$\left.\begin{array}{rl} & \left|\begin{array}{l} \beta''^2_{13}+\beta''^2_{14}, \; -\beta''_{12}\,\beta''_{13} \pm i\,\beta''_{14}\,\Gamma''^{1/4}, \; -\beta''_{12}\,\beta''_{14} \mp i\,\beta''_{13}\,\Gamma''^{1/4} \\ \beta''^2_{13}+\beta''^2_{14}, \; -\beta''_{12}\,\beta''_{13} \pm i\,\beta''_{14}\,\Gamma''^{1/4}, \; -\beta''_{12}\,\beta''_{14} \mp i\,\beta''_{13}\,\Gamma''^{1/4} \end{array}\right| \\ \text{oder} & \left|\begin{array}{l} -\beta''_{13}\,\beta''_{12} \mp i\,\beta''_{14}\,\Gamma''^{1/4}, \; \beta''^2_{12}+\beta''^2_{14}, \; -\beta''_{13}\,\beta''_{14} \pm i\,\beta''_{12}\,\Gamma''^{1/4} \\ -\beta''_{13}\,\beta''_{12} \mp i\,\beta''_{14}\,\Gamma''^{1/4}, \; \beta''^2_{12}+\beta''^2_{14}, \; -\beta''_{13}\,\beta''_{14} \pm i\,\beta''_{12}\,\Gamma''^{1/4} \end{array}\right| \\ \text{oder} & \left|\begin{array}{l} -\beta''_{14}\,\beta''_{12} \pm i\,\beta''_{13}\,\Gamma''^{1/4}, \; -\beta''_{14}\,\beta''_{13} \mp i\,\beta''_{12}\,\Gamma''^{1/4}, \; \beta''^2_{12}+\beta''^2_{13} \\ -\beta''_{14}\,\beta''_{12} \pm i\,\beta''_{13}\,\Gamma''^{1/4}, \; -\beta''_{14}\,\beta''_{13} \mp i\,\beta''_{12}\,\Gamma''^{1/4}, \; \beta''^2_{12}+\beta''^2_{13} \end{array}\right| \end{array}\right\} \quad (93\pi''),$$

wo

$$\Gamma''^{1/2} = A + 2\,\Gamma^{1/2} = \beta''^2_{12} + \beta''^2_{13} + \beta''^2_{14} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (93\varrho'')$$

ist.

β') Ist speciell $A = -2\,\Gamma^{1/2}$ d. h. $\Gamma'' = 0$, $\beta''_{ik} = 0$, so werden die Hauptkreise unbestimmt, nämlich die Erzeugenden des zweiten Systems der unendlich fernen imaginären Kugel. Solche Complexe sind z. B. die Fundamentalcomplexe $\mathfrak{x}_2 = 0$, $\mathfrak{x}_4 = 0$, $\mathfrak{x}_6 = 0$, ferner $\mathfrak{x}_4 \pm \mathfrak{x}_6 = 0$, $\mathfrak{x}_6 \pm \mathfrak{x}_2 = 0$, $\mathfrak{x}_2 \pm \mathfrak{x}_4 = 0$ u. s. w.

γ) Den beiden reellen Wurzeln der quadratischen Gleichung (93ν) entsprechen die beiden zu einander polar-reciproken Hauptkreise, welche aus der Gleichung $(93\eta')$ als Axen erhalten wurden, da $\varrho = -\Gamma^{1/2}\,\lambda$ ist. Diese beiden Hauptkreise schneiden die unendlich ferne imaginäre Kugel $\mathfrak{K}_\infty$ in zwei conjugirt imaginären Punktpaaren (haben mit $\mathfrak{K}_\infty$ zwei conjugirt imaginäre Hauptkugelpaare gemein); das hierdurch auf $\mathfrak{K}_\infty$ be-

stimmte Polartetraeder besonderer Art hat als beide anderen Gegenkantenpaare die in ($93\pi'$) und ($93\pi''$) angegebenen imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise.

Die Coordinaten der Eckpunkte (Hauptkugeln) dieses Tetraeders ergeben sich leicht aus den Coordinaten der beiden reellen Hauptkreise, die das dritte Gegenkantenpaar bilden. Sind die Coordinaten der letzteren:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{q}_{34} = \gamma_{12} & \mathfrak{p}_{34} = \mathfrak{q}_{12} = \gamma_{34} \\ \mathfrak{p}_{13} = \mathfrak{q}_{42} = \gamma_{13} \quad , & \mathfrak{p}_{42} = \mathfrak{q}_{13} = \gamma_{42} \\ \mathfrak{p}_{14} = \mathfrak{q}_{23} = \gamma_{14} & \mathfrak{p}_{23} = \mathfrak{q}_{14} = \gamma_{23} \end{array}$$

und wird zur Abkürzung:

$$\gamma_{il}\,\gamma_{kl} + \gamma_{im}\,\gamma_{km} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$$
$$\gamma_{ik}^2 + \gamma_{il}^2 + \gamma_{im}^2 = \delta_i^2$$

gesetzt ($i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$), so sind die Coordinaten der vier Eckpunkte (Hauptkugeln) des Tetraeders in den vier Formen darstellbar:

$$\left.\begin{array}{ll} & \delta_1^2,\ \varepsilon_{12} \pm \gamma_{21}\,i,\ \varepsilon_{13} \pm \gamma_{31}\,i,\ \varepsilon_{14} \pm \gamma_{41}\,i \\ \text{oder} & \varepsilon_{12} \pm \gamma_{12}\,i,\ \delta_2^2,\ \varepsilon_{23} \pm \gamma_{32}\,i,\ \varepsilon_{42} \pm \gamma_{42}\,i \\ \text{„} & \varepsilon_{13} \pm \gamma_{13}\,i,\ \varepsilon_{23} \pm \gamma_{23}\,i,\ \delta_3^2,\ \varepsilon_{34} \pm \gamma_{43}\,i \\ \text{„} & \varepsilon_{14} \pm \gamma_{14}\,i,\ \varepsilon_{42} \pm \gamma_{24}\,i,\ \varepsilon_{34} \pm \gamma_{34}\,i,\ \delta_4^2 \end{array}\right| \quad \ldots\ (93\sigma)$$

In dem besonderen Falle des speciellen Complexes: $\Gamma = 0$, hat die Gleichung sechsten Grades (93μ) eine fünffache Wurzel $\varrho = 0$, welcher alle Hauptkreise des Complexes entsprechen, während der sechsten Wurzel $\varrho = A$ der zu dem Leithauptkreis des speciellen Complexes polar-reciproke entspricht.

Für den besonderen Fall α') $A = 2\,\Gamma^{1/2}$ werden die Hauptkreise unbestimmt, nämlich die Erzeugenden des einen Systems von $\mathfrak{K}_\infty$; ebenso werden die der Doppelwurzel $\lambda_0 = -1$ (vgl. ($93\varkappa$)) oder $\varrho_0 = -\Gamma^{1/2} = \frac{A}{2}$ entsprechenden Axen unbestimmt, während die Hauptkreise ($93\xi''$) die beiden imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise ($93\pi''$) bestimmen. Die Gesammtheit der reellen Axen bildet also mit den imaginären Erzeugenden des einen Systems von $\mathfrak{K}_\infty$ eine lineare Congruenz, deren Leithauptkreise die beiden Hauptkreise ($93\pi''$) sind. Die sämmtlichen reellen Axen können als im Clifford'schen[1]) Sinne parallele Hauptkreise bezeichnet werden.

[1]) Vgl. hierzu F. Klein: Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann. 37. S. 544. Hier finden sich auch die einschlägigen Abhandlungen Clifford's citirt.

Für den besonderen Fall β') $A = -2\Gamma^{1/2}$ folgt analog, dass die Gesammtheit der reellen Axen mit den imaginären Erzeugenden des zweiten Systems von $\mathfrak{K}_\infty$ eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise die beiden imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise ($93\pi'$) sind, und dass die sämmtlichen reellen Axen als Clifford'sche Parallelen angesehen werden können.

Das oben auftretende Gebilde, welches aus der Gesammtheit der Hauptkreise, welche einen Hauptkreis und dessen reciproke Polare (und zwar rechtwinklig) schneiden, besteht, kann als der besondere Fall einer linearen Congruenz aufgefasst werden, in welchem eine solche Congruenz mit ihrer polaren zusammenfällt.

5) Jede Fläche zweiten Grades des R_3 wird durch einen, durch O und die Fläche bestimmten „Kegelraum" als eine sphärische Fläche zweiten Grades auf den S_3 projicirt. Hierbei sind die beiden Hauptfälle zu unterscheiden, ob die zu projicirende Fläche des R_3 imaginäre oder reelle gerade Erzeugungslinien besitzt; im ersten oder zweiten Falle besitzt auch die sphärische Fläche imaginäre oder reelle erzeugende Hauptkreise; sie besteht im ersten Falle aus zwei getrennten Theilen. Für die nachfolgenden Untersuchungen kommen nur die beiden besonderen Fälle in Betracht, in welchen die Projection auf den S_3 eine Kleinkugel (und deren Gegenkugel) oder eine specielle sphärische „Regelfläche zweiten Grades" ist.

Z. B. die Fläche $F_1^{(2)}$ ((18α) in § 7), welche speciell ein zweischaliges gleichseitiges Rotationshyperboloid: $-x^2+y^2+z^2+1=0$ ist, projicirt sich auf den S_3 als die durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2 &= 0 \\ \mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2-1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (94\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{oder}\quad \mathfrak{z}_1 &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (94\beta)$$

bestimmte Kleinkugel (nebst Gegenkugel) vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$, welche durch den Schnitt der beiden auf der $O\mathfrak{Z}_1$-Axe im Abstande $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ senkrechten ebenen Räume mit dem S_3 entstehen.

Dagegen ist die Projection der Fundamentalfläche $F_2^{(1)}$ ((17ε) in § 7),

welche speciell ein einschaliges gleichseitiges Rotationshyperboloid:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

ist, auf den S_3 durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \mathfrak{z}_3^2 + \mathfrak{z}_4^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94\gamma)$$

oder durch das System einer dieser beiden Gleichungen und derjenigen des S_3 dargestellt. Diese specielle sphärische Rotations-Regelfläche, deren beide Systeme erzeugender Hauptkreise bez. die Projectionen der erzeugenden Geraden von $F_2^{(1)}$ sind, enthält zwei kleine, sich polar-reciprok entsprechender Kugelkreise (und deren Gegenkreise) vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$ als „Kehlkreise".

§ 27.
Uebertragung der Transformationsformeln auf den sphärischen Raum S_3.

Aus den Formeln (92γ) ff. ergiebt sich, dass die früher für den ebenen Raum R_3 aufgestellten Transformationsformeln sich ohne Weiteres auf den sphärischen Raum S_3 übertragen; während aber die geometrische Bedeutung der ersteren bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel aller Substitutions-Coefficienten ungeändert bleibt, ist die Bedeutung der entsprechenden Formeln für den S_3 in beiden Fällen eine andere, so dass die Zahl der Collineationen und Correlationen einer Gruppe von Substitutionen für den S_3 die doppelte derjenigen für den R_3 ist. Die beiden Collineationen oder Correlationen, von denen die eine aus der anderen durch ein gleichzeitiges Umkehren aller Vorzeichen der Substitutionscoefficienten entsteht, sind aber für den S_3 beide zugleich eigentlich (von der Determinante +1) oder zugleich uneigentlich (von der Determinante —1), da bei der angegebenen Aenderung das Vorzeichen der Substitutionsdeterminante dasselbe bleibt.

Die sämmtlichen hier in Betracht kommenden Substitutionen sind quaternäre orthogonale, und die Coefficienten $a_{l,k}$ und $A_{l,k}$ dieselben wie in den Formeln (79β) und (79β') des § 10, da die homogenen Coordinaten der Ecken und Flächen der 6 Fundamentaltetraeder $T_1 \ldots T_6$ (vgl. (79ε)) für den R_3 bereits mit den geeigneten Factoren multiplicirt vorausgesetzt wurden,

so dass sie bis auf das Vorzeichen die Coordinaten der Eckpunkte und Hauptkugeln der 6 sphärischen Fundamentaltetraeder darstellen.

Es sollen zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die Deutung derjenigen quaternären orthogonalen Substitutionen vorausgeschickt werden, welchen Collineationen entsprechen, nämlich einmal der eigentlichen, welchen einfache und Doppel-Drehungen, andererseits der uneigentlichen, welchen einfache oder dreifache Spiegelungen im dreidimensionalen sphärischen Raume S_3 entsprechen.[1])

§ 28.

I) A) Eigentlich orthogonale quaternäre Substitutionen (Collineationen).

a) Einer eigentlich orthogonalen ternären Substitution:

$$\mathfrak{z}'_i = \sum_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$\text{wobei } \sum_i a_{ik}^2 = 1,\ \sum_i a_{ik}\, a_{il} = 0,\ A_{ik} = a_{ik} \text{ und } \Delta = 1 \quad \ldots\ldots \quad (95\alpha)$$

ist, entspricht bekanntlich eine Drehung, durch welche der Kugeloktant $\mathfrak{z}_1\, \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_3$ in die neue Lage $\mathfrak{z}_1'\, \mathfrak{z}_2'\, \mathfrak{z}_3'$ übergeht. Der Drehpunkt ist der Schnittpunkt der die drei Bogen $\mathfrak{z}_1\, \mathfrak{z}_1'$, $\mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_2'$, $\mathfrak{z}_3\, \mathfrak{z}_3'$ normal halbirenden Hauptkreise; sind λ, μ, ν die sphärischen Abstände dieses Drehpunktes von den Eckpunkten des einen oder des anderen Oktantendreiecks, ε die Amplitude der Drehung, so sind die sog. Euler-Cayley'schen Coefficienten l, m, n durch die Relationen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos\lambda \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon \\ m &= \cos\mu \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon \\ n &= \cos\nu \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95\beta)$$

[1]) Vgl. für das Folgende: Cole, Heath u. s. w. a. a. O. sowie M. E. Goursat: Sur les substitutions orthogonales et les divisions regulières de l'espace. Annales scientifiques de l'école normale supérieure. T. VI. 1889. Nr. 1. — Goursat hat hier gezeigt, dass jede orthogonale Substitution mit 4 Variabeln auf ein System zweier linearer, nicht homogener Substitutionen, welche mit zwei complexen Variabeln vorgenommen werden, zurückgeführt werden kann. Diese beiden Substitutionen entsprechen für die eigentlichen allgemeinen Collineationen den beiden Drehungen, für die uneigentlichen Collineationen der Drehung und der Spiegelung.

Diese Coefficienten sind in den horizontalen Anordnungen:

$$\left.\begin{matrix} 1 & -n & m \\ n & 1 & -l \\ -m & l & 1 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95\gamma)$$

proportional den Coordinaten der Eckpunkte (d. h. den Cosinus der sphärischen Abstände dieser Punkte von $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$) des Dreiecks, dessen Seiten die Halbirungshauptkreise der Nebenwinkel $\widehat{Z_1 Z_1'}$, $\widehat{Z_2 Z_2'}$, $\widehat{Z_3 Z_3'}$, sind oder auch proportional den Coordinaten der Seiten (d. h. den Cosinus der sphärischen Abstände der Pole dieser Seiten von $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$) des (Polar-) Dreiecks, dessen Eckpunkte die Halbirungspunkte von $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_1'$, $\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z}_2'$, $\mathfrak{Z}_3 \mathfrak{Z}_3'$ sind.

6) Bei der analogen Deutung einer eigentlich orthogonalen quaternären Substitution:

$$\mathfrak{z}'_i = \sum_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k \ (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$\Sigma a_{ik}^2 = 1,\ \sum_i a_{ik}\, a_{il} = 0,\ A_{ik} = a_{ik},\ \Delta = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96\alpha)$$

werden (vgl. § 26) unter den Coordinaten eines Punktes des S_3 die Cos. der sphärischen Abstände des Punktes von den Eckpunkten $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4$ des sphärischen Quadranten-Tetraeders verstanden, welches in die neue Lage $\mathfrak{Z}_1' \mathfrak{Z}_2' \mathfrak{Z}_3' \mathfrak{Z}_4'$ übergeht, unter den Coordinaten einer Hauptkugel die Cos. der Neigungswinkel derselben gegen die Hauptkugeln Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 (oder der sphärischen Abstände der bezüglichen Pole). Alsdann sind die Coordinaten der Halbirungspunkte $\mathfrak{T}_i$ der Bogen $\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}'_i$ zu den nebenstehenden Grössen proportional:

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{T}_1 \ldots & a_{11}+1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ \mathfrak{T}_2 \ldots & a_{12} & a_{22}+1 & a_{32} & a_{42} \\ \mathfrak{T}_3 \ldots & a_{13} & a_{23} & a_{33}+1 & a_{43} \\ \mathfrak{T}_4 \ldots & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}+1 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96\beta)$$

Das durch diese vier Punkte bestimmte sphärische Tetraeder hat zu Seitenflächen die Hauptkugeln T_i, deren Coordinaten zu folgenden Grössen:

$$\left.\begin{matrix} T_1 \ldots & \alpha_{00} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ T_2 \ldots & \alpha_{12} & \alpha_{00} & -\alpha_{23} & \alpha_{42} \\ T_3 \ldots & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{00} & -\alpha_{34} \\ T_4 \ldots & \alpha_{14} & -\alpha_{42} & \alpha_{34} & \alpha_{00} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96\gamma)$$

proportional sind.

Hierbei ist, wenn ω'_{ii}, ω'_{ik} die ersten Minoren der Determinante $\Omega(+1)$ der Coefficienten in (96β) sind und B' deren Determinante (die adjungirte zu $\Omega(+1)$) ist,

$$\left.\begin{aligned}
&\omega'_{ii} = \frac{8\alpha_{00}^2}{a_{00}} = 1 + \Sigma a_{ii} + \Sigma(a_{ii}\ a_{kk}) \\
&\omega'_{ik} = -\omega'_{ki} = \frac{8\alpha_{00}}{a_{00}}\ \alpha_{ik} = -\frac{8\alpha_{00}}{a_{00}} \alpha_{ki} = a_{ik} - a_{ki} + (a_{ik}\ a_{ll}) + (a_{ik}\ a_{mm}) \\
&\alpha_{00}\ \vartheta = \Gamma^{1/2} = \alpha_{12}\ \alpha_{34} + \alpha_{13}\ \alpha_{42} + \alpha_{14}\ \alpha_{23} \\
&\Omega(+1) = \frac{16\alpha_{00}^2}{a_{00}},\ B' = \frac{8^4\alpha_{00}^4}{a_{00}^4}(\alpha_{00}^2\ a_{00}) = \frac{16^3\alpha_{00}^6}{a_{00}^3} = (\Omega(+1))^3,
\end{aligned}\right| \quad (96\delta)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma a_{ii} = \frac{4(\alpha_{00}^2 - \vartheta^2)}{a_{00}},\ \Sigma(a_{ii}\ a_{kk}) = \frac{4(\alpha_{00}^2 + \vartheta^2)}{a_{00}} - 1 \\
&a_{ik} - a_{ki} = \frac{4}{a_{00}}(\alpha_{00}\ \alpha_{ik} + \vartheta\ \alpha_{lm}) \\
&(a_{ik}\ a_{ll}) + (a_{ik}\ a_{mm}) = \frac{4}{a_{00}}(\alpha_{00}\ \alpha_{ik} - \vartheta\ \alpha_{lm}) \\
&a_{00} = \alpha_{00}^2 + \Sigma\,\alpha_{ik}^2 + \vartheta^2.
\end{aligned}\right\} \quad (96\delta')$$

Die in den Halbirungspunkten $\mathfrak{T}_i$ normal zu den Bogen $\mathfrak{Z}_i\,\mathfrak{Z}'_i$ stehenden Hauptkugeln Π_i schneiden sich im Allgemeinen nicht in einem Punkte oder einem Hauptkreise, sondern bilden ein sphärisches Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathfrak{P}_i$. Die Coordinaten von Π_i und $\mathfrak{P}_i$ sind zu den nebenstehenden Grössen proportional:

$$\left.\begin{matrix}
\Pi_1 \ldots & a_{11}-1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\
\Pi_2 \ldots & a_{12} & a_{22}-1 & a_{32} & a_{42} \\
\Pi_3 \ldots & a_{13} & a_{23} & a_{33}-1 & a_{43} \\
\Pi_4 \ldots & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}-1
\end{matrix}\right\} (96\varepsilon) \qquad
\left.\begin{matrix}
\mathfrak{P}_1 \ldots & -\vartheta & -\alpha_{34} & -\alpha_{42} & -\alpha_{23} \\
\mathfrak{P}_2 \ldots & \alpha_{34} & -\vartheta & -\alpha_{14} & \alpha_{13} \\
\mathfrak{P}_3 \ldots & \alpha_{42} & \alpha_{14} & -\vartheta & -\alpha_{12} \\
\mathfrak{P}_4 \ldots & \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & -\vartheta.
\end{matrix}\right\} (96\zeta)$$

Denn es ist, wenn ω''_{ii}, ω''_{ik} die ersten Minoren der Determinante $\Omega(-1)$ der Coefficienten in (96ε) sind und deren Determinante B'' ist (vergleiche (96δ')):

$$\left.\begin{aligned}
&\omega''_{ii} = -\frac{8\vartheta^2}{a_{00}} = -(1 - \Sigma(a_{ii}) + \Sigma(a_{ii}\ a_{kk})) \\
&\omega''_{ik} = \omega''_{ki} = -\frac{8\vartheta}{a_{00}}\ \alpha_{lm} = -\frac{8\vartheta}{a_{00}}\ \alpha_{ml} = a_{ik} - a_{ki} - (a_{ik}\ a_{ll}) - (a_{ik}\ a_{mm}) \\
&\Omega(-1) = \frac{16\vartheta^2}{a_{00}},\ B'' = \frac{8^4\vartheta^4}{a_{00}^4}(\vartheta^2 a_{00}) = \frac{16^3\vartheta^6}{a_{00}^3} = (\Omega(-1))^3.
\end{aligned}\right\} \quad (96\eta)$$

Aus dem Vorstehenden ist die zwiefache Deutung der Euler-Cayley'schen Coefficienten α_{00}, α_{12}, α_{13}, α_{14}, α_{34}, α_{42}, α_{23} und ϑ für die allgemeine (Schrauben-) Bewegung in einem sphärischen Raume S_3 ersichtlich.

Durch die beiden sich gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Tetraeder (die Eckpunkte $\mathfrak{T}_i$ ($\mathfrak{P}_i$) sind mit den Hauptkugeln Π_i (T_i) incident) ist ein sphärisches Nullsystem bestimmt, dessen zugehöriger sphärischer

Hauptkreis-Complex (ersten Grades) „der Mittelcomplex" in $\mathfrak{p}_{ik}$- oder $\mathfrak{q}_{ik}$-Coordinaten durch eine der beiden Gleichungen dargestellt ist (vergl. (93α), (93β) in § 26):

$$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{p}_{ik} \equiv \alpha_{12}\, \mathfrak{p}_{12} + \alpha_{13}\, \mathfrak{p}_{13} + \alpha_{14}\, \mathfrak{p}_{14} + \alpha_{34}\, \mathfrak{p}_{34} + \alpha_{42}\, \mathfrak{p}_{42} + \alpha_{23}\, \mathfrak{p}_{23} = 0 \quad \ldots \quad (96\vartheta)$$

oder $$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{q}_{lm} \equiv \alpha_{34}\, \mathfrak{q}_{12} + \alpha_{42}\, \mathfrak{q}_{13} + \alpha_{23}\, \mathfrak{q}_{14} + \alpha_{12}\, \mathfrak{q}_{34} + \alpha_{13}\, \mathfrak{q}_{42} + \alpha_{14}\, \mathfrak{q}_{23} = 0, \quad \ldots \quad (96\vartheta')$$

während der polare Complex durch:

$$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{p}_{lm} = 0 \quad \ldots \quad (96\iota)$$

oder durch $$\Sigma \alpha_{ik}\, \mathfrak{q}_{ik} = 0 \quad \ldots \quad (96\iota')$$

dargestellt wird.

Die Axen dieses Complexes (vgl. § 26 unter (93η) bis (93σ)) sind die beiden polar-reciproken Axen (Schraubenaxen) der Doppeldrehung, durch welche die Bewegung des sphärischen Systems resultirt. Die Strahlen des Complexes sind alle diejenigen Hauptkreise, welche auf den Bogen $\mathfrak{z}_i\, \mathfrak{z}'_i$ in deren Mittelpunkten senkrecht stehen, zugleich auch die Axen solcher conjugirten Drehungen, welche sich aus zwei Umwendungen (Drehungen von 180°) zusammensetzen. Endlich werden durch die dualistische Transformation, zufolge deren $\mathfrak{z}_i$ und Π_i oder Π_i und $\mathfrak{z}'_i$ sich entsprechen, die Axen je zweier conjugirten Drehungen einander zugeordnet.[1])

Durch die Axen des Mittelcomplexes ist (vgl. § 26) ein Polartetraeder besonderer Art auf $\mathfrak{K}_\infty$ bestimmt, dessen beide anderen Gegenkantenpaare die sich selbst conjugirten imaginären Hauptkreise (93π') und (93π'') sind. Die Coordinaten der Ecken und Hauptkugeln dieses Tetraeders sind in (93σ) angegeben; dieselben entsprechen den Wurzeln der biquadratischen Gleichung in τ (vgl. § 9 I):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\tau & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\tau & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\tau & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}-\tau \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (96\varkappa)$$

oder $$\tau^4 - a\,\tau^3 + b\,\tau^2 - a\,\tau + 1 = 0, \quad \ldots \quad (96\varkappa')$$

welche eine reciproke Gleichung ist und wobei:

$$\left.\begin{aligned} a &= \Sigma \Delta_1 = \Sigma \alpha_{ii} = 4\,\frac{(\alpha_{00}^2 - \vartheta^2)}{\alpha_{00}} \\ b &= \Sigma \Delta_2 = \Sigma (\alpha_{ii}\, \alpha_{kk}) = 2\left[\frac{4\,(\alpha_{00}^2 + \vartheta^2)}{\alpha_{00}} - 1\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (96\lambda) \text{ sind.}$$

[1]) Vgl. E. Study a. a. O.

c) Betrachten wir zunächst die besonderen Fälle der Bewegungen, welche durch das Auftreten der Doppelwurzeln 1 und —1 charakterisirt sind.

α) Für die Doppelwurzel $\tau_1 = \tau_2 = +1$ ist (vgl. (96η)) sowohl

$\Omega(-1) = 0$, als $\omega''_{ii} = \omega''_{ik} = 0$, d. h. $\vartheta = 0$, also $\Gamma = 0$ und $b = 2(a-1)$, ... (96μ)

so dass die beiden anderen Wurzeln τ_3, τ_4 aus der quadratischen Gleichung

$$\tau^2 - (a-2)\tau + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96\nu)$$

sich ergeben.

In diesem durch die Bedingung $\vartheta = 0$ charakterisirten Specialfalle schneiden sich die 4 Hauptkugeln Π_i in einem Hauptkreise, welcher die Rotationsaxe der entsprechenden einfachen Drehung ist. Die Hauptkreiscoordinaten dieser Rotationsaxe ergeben sich als zweite Minoren der Determinante $\Omega(-1)$ oder der Determinante B'' (vgl. (96ε) und (96ζ)):

$$\left.\begin{vmatrix} \alpha_{34} & \alpha_{42} & \alpha_{23} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \end{vmatrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96o)$$

d. h. die Rotationsaxe ist der Leithauptkreis des speciellen Complexes, in welchen der polare Complex (96ι) übergeht (vgl. (96δ)); der Leithauptkreis des speciellen Complexes, in welchen der Mittelcomplex (96ϑ) selbst übergeht, ist die reciproke Polare:

$$\left.\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{34} & \alpha_{42} & \alpha_{23} \end{vmatrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96o')$$

Alle Punkte der Rotationsaxe und die beiden imaginären Schnittpunkte der reciproken Polare mit $\mathfrak{K}_\infty$ bleiben fest, ebenso alle durch die reciproke Polare gehenden Hauptkugeln und die beiden durch die Rotationsaxe an $\mathfrak{K}_\infty$ gelegten Berührungshauptkugeln. Die Amplitude ε_0 der Rotation ergiebt sich leicht entweder durch Bestimmung des Neigungswinkels zweier entsprechenden durch die Rotationsaxe gehenden Hauptkugeln (z. B. der durch die Axe und die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ gehenden Hauptkugeln) oder aus dem Bogenabstande zweier entsprechenden Punkte der reciproken Polare, welche die Pole jener Hauptkugeln sind (z. B. der Durchstossungspunkte der reciproken Polare mit den Hauptkugeln A_1 und A'_1 des Coordinatentetraeders). Man findet mit Benutzung der Relation $\vartheta = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\varepsilon_0}{2} &= \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{\alpha_{00}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma a_{ii}} = \frac{1}{2}\sqrt{a} \\ \cos\varepsilon_0 &= \frac{2\alpha_{00}{}^2}{\alpha_{00}}, -1 = \frac{\alpha_{00}{}^2 - \Sigma\alpha_{ik}{}^2}{\alpha_{00}{}^2 + \Sigma\alpha_{ik}{}^2} = \frac{1}{2}\Sigma a_{ii} - 1 = \frac{a}{2} - 1. \end{aligned}\right\} \quad (96\pi)$$

Ist $\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{n}$ die Drehung also n-zählig, so ist $a = 4\cos^2\frac{\pi}{n}$ und $\tau_3 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\tau_4 = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$. . . (96ϱ)

Bemerkenswerthe specielle Fälle sind:

α) 1) $n = 1$, $a = 4$, $\tau_3 = \tau_4 = 1$ (vgl. (96ν), $\alpha^2_{00} = \alpha_{00}$, $\alpha_{ik} = 0$, $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$. . . (96σ)

Dieser durch die vierfache Wurzel $\tau = 1$ charakterisirte Fall entspricht der identischen Transformation $\mathfrak{z}'_i = \mathfrak{z}_i$; das Tetraeder $\mathfrak{T}_i - T_i$ fällt mit dem Coordinatentetraeder zusammen; es bleiben alle Elemente des Raumes S_3 in Ruhe.

α) 2) $n = 2$, $\varepsilon_0 = \pi$, $a = 0$, $\tau_3 = \tau_4 = -1$, $\alpha_{00} = 0$, $\Omega(+1) = 0$, $\omega'_{ii} = \omega'_{ik} = 0$, $\Sigma a_{ii} = 0$, $\Sigma(a_{ii}\, a_{kk}) = -1$, $a_{ik} = a_{ki}$, $\alpha_{00} = \Sigma\alpha_{ik}{}^2$. (96τ)

Dieser durch das Auftreten der beiden Dopelwurzeln $\tau = 1$ und $\tau = -1$ charakterisirte Fall ist der einer Umdrehung von 180° oder einer Umwendung; die vier Punkte $\mathfrak{T}_i$ liegen auf der reciproken Polaren der Rotationsaxe und gehen bei der Bewegung in ihre Gegenpunkte über.

β) Für die Doppelwurzel $\tau_1 = \tau_2 = -1$ ist (vgl. (96τ)):

$\Omega(+1) = 0$, $\omega'_{ii} = \omega'_{ik} = 0$, d. h. $\alpha_{00} = 0$, also $\Gamma = 0$ und $b = -2(a+1)$; (96υ)

die beiden anderen Wurzeln ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\tau^2 - (a+2)\,\tau + 1 = 0 \quad \quad (96\varphi)$$

Die vier Halbirungspunkte $\mathfrak{T}_i$ (96β) liegen in diesem durch $\alpha_{00} = 0$ charakterisirten Specialfalle auf einem Hauptkreise, dessen Coordinaten sich als zweite Minoren der Determinante $\Omega(+1)$ oder der Determinante B' ergeben:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{34} & \alpha_{42} & \alpha_{23} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \end{matrix}\right\| \quad \quad (96o)$$

Dieser Hauptkreis ist wiederum Leithauptkreis des speciellen Complexes, in welchen der polare Complex (96τ) übergeht, während die reciproke Polare:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{34} & \alpha_{42} & \alpha_{23} \end{matrix}\right\| \quad \quad (96o')$$

der Leithauptkreis des speciellen Complexes ist, in welchen der Mittelcomplex (96ϑ) übergeht.

Alle Punkte dieses Hauptkreises $(96o')$ gehen in ihre Gegenpunkte über, während die Punkte des Hauptkreises $(96o)$ eine Drehung um den ersteren als Rotationsaxe erleiden, deren Amplitude ε'_0 sich aus:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon'_0}{2} &= \frac{\vartheta}{\sqrt{a_{00}}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\Sigma a_{ii}} = \frac{1}{2}\sqrt{-a} \\ \cos\varepsilon'_0 &= -\frac{2\vartheta^2}{a_{00}} + 1 = \frac{-\vartheta^2 + \Sigma a_{ik}^2}{\vartheta^2 + \Sigma a_{ik}^2} = -\frac{1}{2}\Sigma a_{ii} + 1 = -\frac{a}{2} + 1 \end{aligned}\right\} \quad (96\chi)$$

ergiebt. Diese Bewegung, welche als besondere Doppeldrehung bezeichnet werden möge, resultirt also aus einer Umwendung um den Hauptkreis $(96o)$ und einer Drehung von der Amplitude ε'_0 um den Hauptkreis $(96o')$, wobei die Reihenfolge der beiden componirenden Bewegungen vertauschbar ist. Ist $\varepsilon'_0 = \frac{2\pi}{n}$, die Deckung also n-zählig, so ist:

$$a = -4\sin\frac{2\pi}{n} \text{ und } \tau_3 = e^{\frac{2\pi i}{n}},\ \tau_4 = \varepsilon^{-\frac{2\pi i}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (96\psi)$$

Bemerkenswerthe specielle Fälle sind:

$$\left.\begin{aligned} &\beta)\ 1)\ n = 1,\ a = 0,\ \tau_3 = \tau_4 = 1,\ \vartheta = 0,\ \Omega(-1) = 0,\ \omega''_{ii} = \omega''_{ik} = 0 \\ &\Sigma a_{ii} = 0,\ \Sigma(a_{ii}\ a_{kk}) = -1,\ a_{ik} = a_{ki},\ a_{00} = \Sigma a_{ik}^2. \end{aligned}\right\} \quad (96\omega)$$

Dieser durch das Auftreten der beiden Doppelwurzeln $\tau = -1$ und $\tau = +1$ bestimmte Fall ist der bereits unter $\alpha)$ 2) erhaltene einer Umwendung um den Hauptkreis $(96o)$ als Rotationsaxe.

$$\left.\begin{aligned} &\beta)\ 2)\ n = 2,\ a = -4,\ b = 6,\ \varepsilon'_0 = \pi,\ \tau_3 = \tau_4 = -1,\ \vartheta = \sqrt{a_{00}},\ a_{ik} = 0 \\ &a_{ii} = -1,\ a_{ik} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (96a)$$

Dieser durch die vierfache Wurzel $\tau = -1$ charakterisirte Fall ist derjenige der Inversion oder der Spiegelung am Punkte O: $\mathfrak{z}'_i = -\mathfrak{z}_i$. Jeder Punkt des Raumes S_3 geht in seinen Gegenpunkt über; für jede Hauptkugel vertauscht sich die Innen- mit der Aussenseite.

Der allgemeine Fall $\beta)$, welcher durch eine Drehung um den Hauptkreis $(96o')$ von der Amplitude ε'_0 und eine Umwendung um den Hauptkreis $(96o)$ resultirte, lässt sich daher auch aus einer Drehung um den ersteren von der Amplitude $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 - 180^0$ und der Inversion zusammensetzen. Die Coefficienten der Substitution sind im Falle $\beta)$ denjenigen der Substitution für den entsprechenden Fall $\alpha)$ (einer einfachen Rotation von der Amplitude

$-\varepsilon_0$) sämmtlich entgegengesetzt gleich. Ist $\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{n}$ und n eine ungerade Zahl, so stellen die geraden Potenzen der Substitution S', welche dem Fall β) einer Drehung um $\frac{\pi}{n}$ nebst Umwendung entspricht, die einfachen Drehungen für den Fall α) dar. Im Falle eines geraden n dagegen sind die Potenzen der Substitutionen S und S', welche den Fällen α) und β) entsprechen, von einander verschieden.

Diejenige eine Transformation des ebenen Raumes R_3 darstellende Substitution, aus welcher die eine der beiden Substitutionen c α) und c β) direct, die andere durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Substitutionscoefficienten hervorgeht, bedeutete eine axiale Collineation. Speciell entspricht der identischen Substitution einmal die identische Transformation α) 1), das andere Mal die Inversion β) 2), und der geschaarten Involution entspricht in α) 2) und β) 1) je eine Umwendung, wobei die beiden sich polar-reciprok entsprechenden Hauptkreise als Axen mit einander vertauschen.

d) Ein weiterer wichtiger besonderer Fall ist der durch das Auftreten zweier Doppelwurzeln, welche nicht 1 oder —1 sind, der biquadratischen Gleichung in τ (96$\varkappa'$) charakterisirte. Die durch ihn bestimmten Bewegungen im Raume S_3 entsprechen den geschaarten Involutionen und Collineationen mit imaginärem Axenpaar im Raume R_3.

Setzt man zur Auflösung der reciproken biquadratischen Gleichung (96$\varkappa'$):

$$\tau + \frac{1}{\tau} = \tau', \qquad \text{(96b)}$$

so erhält man die beiden quadratischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\tau'^2 - a\,\tau' + (b-2) = 0 \\ &\tau^2 - \tau'\,\tau + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(96c)}$$

Das Verschwinden der Discriminante der ersteren dieser Gleichungen:

$$\frac{a^2}{4} - b + 2 = 0 \text{ oder } \tau' = \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b-2} \qquad \text{(96d)}$$

drückt die Bedingung aus, dass die biquadratische Gleichung zwei (zu einander reciproke) Doppelwurzeln hat.

Aus den Gleichungen (96λ) folgt mit Berücksichtigung der Relation (96d):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{16\alpha_{00}^2}{a_{00}} = \left(\frac{a}{2} + 2\right)^2 \\ &\frac{16\vartheta^2}{a_{00}} = \left(\frac{a}{2} - 2\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(96e)}$$

und hieraus $\Gamma^{\frac{1}{2}} = a_{00}\,\vartheta = \pm \frac{a_{00}}{16}\left(4 - \frac{a^2}{4}\right)$ (96 f)

Ferner folgt (vgl. (96δ')):

$$A = \Sigma a^2_{ik} = a_{00}\left(1 - \frac{1}{8}\left[\frac{a^2}{4} + 4\right]\right) = \frac{a_{00}}{8}\left(4 - \frac{a^2}{4}\right) \quad . \; . \; . \quad (96g)$$

Somit besteht die Relation:

$$A = \pm 2\,\Gamma^{\frac{1}{2}} \text{ oder } A^2 = 4\,\Gamma, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96h)$$

welche (vgl. § 26 unter 4) α') und β')) ausdrückt, dass die beiden Axen des Mittel-Complexes unbestimmt werden. Die Gesammtheit der reellen Schraubenaxen bildet also mit den imaginären Erzeugenden des einen Systems von $\mathfrak{K}_\infty$ eine lineare Congruenz, deren Leithauptkreise die beiden imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise (93π') bez. (93π'') sind. Das durch die Axen des Mittelcomplexes auf $\mathfrak{K}_\infty$ bestimmte Polartetraeder besonderer Art ist also in diesem Falle unbestimmt.

α) In dem besonderen, einer geschaarten Involution mit imaginärem Axenpaar im Raume R_3 entsprechenden Falle für den Raum S_3 sind die beiden Doppelwurzeln τ gleich i und $-i$ entsprechend den Werthen:

$$\tau' = 0,\; b = 2,\; a = 0,\; a_{00} = \pm\,\vartheta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96k)$$

die Bewegung in S_3 ist eine vierzählige.

β) Wenn die geschaarte Collineation mit imaginärem Axenpaar im Raume R_3 eine n-zählige ist, dann ist die entsprechende Bewegung im Raume S_3, falls n eine gerade Zahl ist, eine $2n$-zählige, und zwar ist:

$$\tau' = 2\cos\frac{\pi}{n},\; a = 4\cos\frac{\pi}{n},\; b = 2\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{n}\right); \quad . \; . \; . \; . \quad (96l)$$

ist dagegen n eine ungerade Zahl, so resultirt sowohl eine n-zählige als eine $2n$-zählige derartige Bewegung im Raume S_3; die geraden Potenzen der Substitution S', welche die letztere darstellt, bedeuten dann wieder die n-zähligen Bewegungen.

In Betreff der verschiedenen Arten der Zusammensetzung einer solchen Bewegung sind die nachfolgenden, unter e) am Ende aufgeführten Beziehungen zu vergleichen.

e) Der allgemeine Fall einer eigentlich orthogonalen quaternären Substitution, welcher eine allgemeine (Schrauben-) Bewegung in dem Raume S_3 bedingt, entspricht einer allgemeinen eigentlichen Collineation in dem Raume R_3. Aus den unter b) aufgestellten Formeln ergeben sich die beiden,

sich gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{P}_i$ und den Hauptkugeln T_i, Π_i, daraus das zugehörige sphärische Nullsystem, der Mittel-Complex, dessen Axen (die Schraubenaxen der Bewegung), sowie das festbleibende Polartetraeder auf $\mathfrak{K}_\infty$, dessen Eckpunkte und Hauptkugeln den Wurzeln der biquadratischen Gleichung in τ (96$\varkappa'$) entsprechen. Aus einer n-zähligen Collineation des R_3 resultirt eine $2n$-zählige Doppeldrehung des Raumes S_3, deren Zähligkeit sich direkt aus dem Grade der Einheitswurzeln der biquadratischen Gleichung in τ erkennen lässt. Wenn die Schraubenaxen der Bewegung bestimmt sind, so ergeben sich die Amplituden der beiden componirenden Drehungen einfach dadurch, dass man den cosinus des Bogens ausdrückt, welchen je ein Punkt einer solchen Axe in Folge der Transformation beschreibt. Für die Axen und Amplituden irgend zweier conjugirten Drehungen, speciell zweier Umwendungen, gilt die der Rodrigues'schen Beziehung für den Raum R_3 analoge, dass das Produkt der Sinusse der halben Amplituden der Rotationen um zwei conjugirte Axen, des Sinus des kürzesten (sphärischen) Abstandes dieser Axen und des Sinus ihrer Neigung gleich dem Produkt der Sinusse der halben Amplituden der Rotationen um die Schraubenaxen ist.

Zu der Erkenntniss der Beschaffenheit einer solchen Doppeldrehung, zumal zu der Bestimmung der conjugirten Axen kann auch mit vielem Vortheil die Darstellung in Hauptkreis-Coordinaten benutzt werden, wie denn entsprechend bereits früher bei den Transformationsformeln für den Raum R_3 die Wurzeln der Gleichung 6ten Grades in σ berücksichtigt worden sind. Die wichtigsten der hierher gehörigen Beziehungen mögen noch im Folgenden aufgeführt werden.

Ein Hauptkreis g geht durch die Transformation in den Hauptkreis g' über, wobei zwischen den Plücker'schen Hauptkreis-Coordinaten $\mathfrak{p}_{ik}$ und $\mathfrak{p}'_{ik}$ die Relationen bestehen

$$\sigma\ \mathfrak{p}'_{ik} = \sum_{i_1} (a_{ii}\, a_{ki_1})\ \mathfrak{p}_{ii_1} + \sum_{i_1, i_2} (a_{ii_1}\, a_{ki_2})\ \mathfrak{p}_{i_1 i_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96m)$$

$$\sigma'\ \mathfrak{p}_{ik} = \sum_{i_1} (a_{ii}\, a_{i_1 k})\ \mathfrak{p}'_{ii_1} + \sum_{i_1, i_2} (a_{i_1 i}\, a_{i_2 k})\ \mathfrak{p}'_{i_1 i_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (96m')$$

Hierin bedeuten $(a_{ii}\, a_{ki_1})$ u. s. w. die zweiten Minoren der Determinante Δ, i_1 und i_2 von einander verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4 ausser i, welche cyclisch mit Ausschluss von i aufeinander folgen.

Die Bedingung, dass ein Hauptkreis bei der Bewegung festbleibt, ergiebt die Gleichung 6ten Grades in σ:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}\ a_{22})-\sigma & (a_{11}\ a_{23}) & (a_{11}\ a_{24}) & (a_{13}\ a_{24}) & (a_{14}\ a_{22}) & (a_{12}\ a_{23}) \\ (a_{11}\ a_{32}) & (a_{11}\ a_{33})-\sigma & (a_{11}\ a_{34}) & (a_{13}\ a_{34}) & (a_{14}\ a_{32}) & (a_{12}\ a_{33}) \\ (a_{11}\ a_{42}) & (a_{11}\ a_{43}) & (a_{11}\ a_{44})-\sigma & (a_{13}\ a_{44}) & (a_{14}\ a_{42}) & (a_{12}\ a_{43}) \\ (a_{31}\ a_{42}) & (a_{31}\ a_{43}) & (a_{31}\ a_{44}) & (a_{33}\ a_{44})-\sigma & (a_{34}\ a_{42}) & (a_{32}\ a_{43}) \\ (a_{41}\ a_{22}) & (a_{41}\ a_{23}) & (a_{41}\ a_{24}) & (a_{43}\ a_{24}) & (a_{44}\ a_{22})-\sigma & (a_{42}\ a_{23}) \\ (a_{21}\ a_{32}) & (a_{21}\ a_{33}) & (a_{21}\ a_{34}) & (a_{23}\ a_{34}) & (a_{24}\ a_{32}) & (a_{22}\ a_{33})-\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; (96n)$$

Für den Fall einer eigentlich orthogonalen Substitution $\Delta = 1$ ist

$$(a_{i_1k_1}\ a_{i_2k_2}) = (a_{i_3k_3}\ a_{i_4k_4}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96p)$$

und die Determinante Θ der zweiten Minoren von Δ, welche abgekürzt durch a_i, b_k, c_l ... bezeichnet werden mögen, wird

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_6 & b_6 & c_6 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_6 & b_6 & c_6 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta^3 = 1, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96q)$$

die Elemente der adjungirten Determinante Θ' werden gleich den entsprechenden Elementen von Θ. Daraus folgt, dass die Gleichung (96n) eine reciproke Gleichung 6ten Grades wird:

$$\sigma^6 - 2(a_1+b_2+c_3)\sigma^5 + \Sigma\Theta_2 \, . \, \sigma^4 - \Sigma\Theta_3 \, . \, \sigma^3 + \Sigma\Theta_2 \, . \, \sigma^2 - 2(a_1+b_2+c_3)\sigma + 1 = 0, \quad . \; . \; . \; (96r)$$

worin $\Sigma\Theta_2$, $\Sigma\Theta_3$ die Summen der partialen Determinanten 2ten und 3ten Grades der Diagonalelemente von Θ bedeuten.

Führt man statt der Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{p}_{ik}$ die den Klein'schen Liniencoordinaten x_i (§ 1, (2a)) analogen $\mathfrak{x}_i$ ein, so bleiben die Wurzeln σ wesentlich, d. h. bis auf einen gemeinsamen Factor, dieselben, wie sich einfach ergiebt, wenn man in der Determinante (96n) die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Reihe additiv und subtractiv miteinander verbindet, wodurch die Determinante in folgendes Produkt zweier Determinanten 3ten Grades zerfällt:

$$\begin{vmatrix} (a_1+a_4)-\sigma & b_1+b_4 & c_1+c_4 \\ a_2+a_5 & (b_2+b_5)-\sigma & c_2+c_5 \\ a_3+a_6 & b_3+b_6 & (c_3+c_6)-\sigma \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (a_1-a_4)-\sigma & b_1-b_4 & c_1-c_4 \\ a_2-a_5 & (b_2-b_5)-\sigma & c_2-c_5 \\ a_3-a_6 & b_3-b_6 & (c_3-c_6)-\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; (96s)$$

entsprechend den Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\mathfrak{x}_1' &= (a_1+a_4)\,\mathfrak{x}_1 + (b_1+b_4)\,\mathfrak{x}_3 + (c_1+c_4)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\mathfrak{x}_3' &= (a_2+a_5)\,\mathfrak{x}_1 + (b_2+a_5)\,\mathfrak{x}_3 + (c_2+c_5)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\mathfrak{x}_5' &= (a_3+a_6)\,\mathfrak{x}_1 + (b_3+b_6)\,\mathfrak{x}_3 + (c_3+c_6)\,\mathfrak{x}_5 \end{aligned}\right\} (96t) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \sigma\mathfrak{x}_2' &= (a_1-a_4)\,\mathfrak{x}_2 + (b_1-b_4)\,\mathfrak{x}_4 + (c_1-c_4)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\mathfrak{x}_4' &= (a_2-a_5)\,\mathfrak{x}_2 + (b_2-b_5)\,\mathfrak{x}_4 + (c_2-c_5)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\mathfrak{x}_6' &= (a_3-a_6)\,\mathfrak{x}_2 + (b_3-b_6)\,\mathfrak{x}_4 + (c_3-c_6)\,\mathfrak{x}_6 \end{aligned}\right\} (96t').$$

Die hier in Betracht kommenden Werthe für die Wurzeln der Gleichung (96n) in σ sind in § 9 unter I A) für die eigentlichen Collineationen des Raumes R_3 angegeben worden. Dabei sind die Werthe für σ, welche zwei Substitutionen S^{λ} und $S^{n+\lambda}$ entsprechen, dieselben; diese beiden Substitutionen unterscheiden sich in $\mathfrak{z}_i$-Coordinaten durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel der Coefficienten und der zugehörigen Wurzelwerthe für τ. Der Doppelwurzel $\sigma = 1$ entsprechen im allgemeinen Falle im Raume S_3 die beiden Schraubenaxen der Bewegung, den anderen vier Wurzeln σ die beiden imaginären, der $\mathfrak{K}_\infty$ angehörigen Hauptkreispaare des festbleibenden Polartetraeders.

Zu jedem Hauptkreis g, welcher durch die Bewegung in g' übergeht, gehört ein Mittelhauptkreis $g^{(m)}$, d. h. der geometrische Ort der Mittelpunkte $\mathfrak{A}^{(m)}$, $\mathfrak{B}^{(m)}$ aller Sehnen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'$ und ferner ein Hauptkreis $g^{(\nu)}$, welcher der Schnitthauptkreis aller in $\mathfrak{A}^{(m)}$, $\mathfrak{B}^{(m)}$... auf den Sehnen senkrecht stehenden Hauptkugeln ist.[1])

Die Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{p}_{ik}^{(m)}$ von $g^{(m)}$ folgen aus:

$$\mathfrak{p}_{ik}^{(m)} = \sum_{i_1} (a'_{ii}\, a'_{ki_1})\, \mathfrak{p}_{ii_1} + \sum_{i_1 i_2} (a'_{ii_1}\, a'_{ki_2})\, \mathfrak{p}_{i_1 i_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96u)$$

und umgekehrt:

$$\mathfrak{p}_{ik} = \sum_{i_1} (a'_{ii}\, a'_{i_1 k})\, \mathfrak{p}_{ii_1}^{(m)} + \sum_{i_1 i_2} (a'_{i_1 i}\, a'_{i_2 k})\, \mathfrak{p}_{i_1 i_2}^{(m)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96u')$$

wobei $(a'_{ii}\, a'_{ki_1})$... die zweiten Minoren der Determinante $\Omega(+1)$ (vgl. (96δ)) bedeuten; ebenso folgen die Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{p}_{ik}^{(\nu)}$ von $g^{(\nu)}$ aus:

$$\mathfrak{p}_{ik}^{(\nu)} = \sum_{i_1} (a''_{li}\, a''_{mi_1})\, \mathfrak{p}_{ii_1} + \sum_{i_1 i_2} (a''_{li_1}\, a''_{mi_2})\, \mathfrak{p}_{i_1 i_2}, \quad \ldots\ldots \quad (96w)$$

und umgekehrt

$$\mathfrak{p}_{ik} = \sum_{i_1} (a''_{il}\, a''_{i_1 m})\, \mathfrak{p}_{ii_1}^{(\nu)} + \sum_{i_1 i_2} (a''_{i_1 l}\, a''_{i_2 m})\, \mathfrak{p}_{i_1 i_2}^{(\nu)}, \quad \ldots\ldots \quad (96w')$$

wobei $(a''_{li}\, a''_{mi_1})$... die zweiten Minoren der Determinante $\Omega(-1)$ (vgl. (96η) bedeuten.

Ein Hauptkreis g und der entsprechende $g^{(\nu)}$, ebenso $g^{(\nu)}$ und g' sind die Axen zweier conjugirten Drehungen; die Bedingung, dass diese beiden Axen reciproke Polaren sind, ergiebt die Schraubenaxen. Ein Hauptkreis $g^{(m)}$ und der ihm entsprechende $g^{(\nu)}$ sind conjugirte Polaren in Bezug auf den

[1]) Vgl. A. Schoenflies: Geometrie der Bewegung. Leipzig 1886. Drittes Capitel.

Mittelcomplex, während die Strahlen desselben durch die Gesammtheit der in den Punkten $\mathfrak{A}^{(m)}$, $\mathfrak{B}^{(m)}$ auf den Sehnen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'$, ... senkrecht stehenden Hauptkreise gebildet werden; diese letzteren sind auch die Axen solcher conjugirten Drehungen, welche sich aus zwei Umwendungen zusammensetzen. Die analytische Darstellung dieser Beziehungen ist mit Benutzung der vorstehenden Formeln leicht auszuführen und gestaltet sich sehr einfach, wenn man als Hauptkreis g eine Kante des Coordinatentetraeders wählt. Bei der Composition zweier Drehungen ist die Multiplication der beiden Substitutionsdeterminanten nach bekannten Regeln auszuführen, indem man die Zeilen (Colonnen) des ersten Factors mit den Colonnen (Zeilen) des zweiten Factors multiplicirt und die erhaltenen Werthe in der Substitutionsdeterminante des Produkts nach Zeilen (Colonnen) anordnet.

§ 29.

I B) Uneigentlich orthogonale quaternäre Substitutionen.

Für eine solche Substitution:

$$\mathfrak{z}'_i = \sum_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

wobei

$$\Sigma a_{ik}^2 = 1, \ \sum_i a_{ik}\, a_{il} = 0, \ A_{ik} = -a_{ik}, \ (a_{i_1k_1}\ a_{i_2k_2}) = -(a_{i_3k_3}\ a_{i_4k_4}), \ \Delta = -1 \ \ldots \ (97\alpha)$$

ist, ergeben sich folgende charakteristische Beziehungen und Unterschiede gegenüber einer eigentlich orthogonalen quaternären Substitution:

Die in τ biquadratische Gleichung (vgl. (96$\varkappa'$)):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\tau & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\tau & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\tau & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\tau \end{vmatrix} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (97\beta)$$

nimmt, da $b = \Sigma \Delta_2 = 0$ (97γ)

wird (wegen $(a_{i_1k_1}\ a_{i_2k_2}) = -(a_{i_3k_3}\ a_{i_4k_4})$) die einfache Form an:

$$\tau^4 - a\,\tau^3 + a\,\tau - 1 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (97\delta)$$

wobei $a = \Sigma a_{ii}$. (97ε)

ist.

Diese Gleichung hat stets die Wurzeln $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -1$, d. h. die Determinanten $\Omega(+1)$ (vgl. (96δ)) und $\Omega(-1)$ (vgl. (96η)) sind Null, was geometrisch bedeutet, dass die Halbirungspunkte $\mathfrak{T}_i$ der Bogen $\mathfrak{Z}_i\,\mathfrak{Z}'_i$ auf einer

Hauptkugel B_2 liegen und dass die in $\mathfrak{T}_i$ normal zu den Bogen $\mathfrak{Z}_i\,\mathfrak{Z}'_i$ stehenden Hauptkugeln Π_i sich in einem Punkte $\mathfrak{B}_1$ schneiden.

Der Wurzel $\tau_1 = 1$ entspricht der reelle fest bleibende Punkt $\mathfrak{B}_1$, der Wurzel $\tau_2 = -1$ ein reeller Punkt $\mathfrak{B}_2$, der Pol der Hauptkugel B_2, welcher durch die Transformation in seinen Gegenpunkt übergeht.

Die beiden anderen Wurzeln der Gleichung (97δ) sind diejenigen der quadratischen Gleichung:

$$\tau^2 - a\,\tau + 1 = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97\zeta)$$

dieselben sind für reelle a_{ik} und für

$$|\,a\,| < 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97\eta)$$

conjugirt imaginär:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_3 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} \\ \tau_4 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97\vartheta)$$

und denselben entsprechen zwei festbleibende imaginäre Punkte $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, welche der $\mathfrak{K}_\infty$ angehören. Die beiden reciprok-polaren Hauptkreise $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,|$ ($|\,B_3\,B_4\,|$) und $|\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,|$ ($|\,B_1\,B_2\,|$), sowie die dieselben schneidenden Hauptkreise bleiben fest.

Ertheilt man sämmtlichen Coefficienten a_{ik} das entgegengesetzte Zeichen, so vertauschen sich die beiden Punkte (Ebenen) $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ (B_2 und B_1), während die imaginären Punkte $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ auf $\mathfrak{K}_\infty$ dieselben bleiben.

a) In dem speciellen Falle $|\,a\,| = 2$ wird

α) für $a = 2$, $\tau_1 = \tau_3 = \tau_4 = 1$, $\tau_2 = -1$; der dreifachen Wurzel $\tau = 1$ entspricht die festbleibende Hauptkugel B_1, der Wurzel $\tau = -1$ der in seinen Gegenpunkt übergehende Pol $\mathfrak{B}_1$. Dieser Fall charakterisirt die einfache Spiegelung an der Hauptkugel B_1; jeder Punkt des S_3 geht in den zur Hauptkugel B_1 symmetrisch liegenden Punkt über.

Die Determinante der Coefficienten einer solchen Substitution, welcher eine einfache Spiegelung an der Hauptkugel:

$$\zeta_1\,\mathfrak{z}_1 + \zeta_2\,\mathfrak{z}_2 + \zeta_3\,\mathfrak{z}_3 + \zeta_4\,\mathfrak{z}_4 = 0$$

entspricht, erhält die Form:

$$(97\iota)\ldots \Delta = \begin{vmatrix} -\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2+\zeta_4^2 & -2\,\zeta_1\,\zeta_2 & -2\,\zeta_1\,\zeta_3 & -2\,\zeta_1\,\zeta_4 \\ -2\,\zeta_1\,\zeta_2 & \zeta_1^2-\zeta_2^2+\zeta_3^2+\zeta_4^2 & -2\,\zeta_2\,\zeta_3 & -2\,\zeta_2\,\zeta_4 \\ -2\,\zeta_1\,\zeta_3 & -2\,\zeta_2\,\zeta_3 & \zeta_1^2+\zeta_2^2-\zeta_3^2+\zeta_4^2 & -2\,\zeta_3\,\zeta_4 \\ -2\,\zeta_1\,\zeta_4 & -2\,\zeta_2\,\zeta_4 & -2\,\zeta_3\,\zeta_4 & \zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2-\zeta_4^2 \end{vmatrix}.$$

β) Für $a = -2$, welcher Fall aus α) durch Umkehrung aller Vorzeichen der a_{ik} hervorgeht, wird $\tau_1 = \tau_3 = \tau_4 = -1$, $\tau_2 = 1$. Der Wurzel $\tau = 1$ entspricht der festbleibende Punkt $\mathfrak{B}_1$, der dreifachen Wurzel $\tau = -1$ die Polarhauptkugel B_1 (deren Innen- und Aussenseite sich vertauschen). Dieser Fall charakterisirt diejenige besondere dreifache Spiegelung oder Drehspiegelung, welche sich aus einer einfachen Spiegelung an B_1 und der Inversion (vgl. § 28 I A) c) β) 2)) zusammensetzt. Eine solche Inversionsspiegelung, wie sie kurz bezeichnet werden möge, resultirt auch durch eine dreifache Spiegelung an irgend drei durch $\mathfrak{B}_1$ gehenden, zu einander senkrechten Hauptkugeln oder durch eine Umwendung um irgend einen durch $\mathfrak{B}_1$ gehenden (zu B_1 normalen) Hauptkreis und eine einfache Spiegelung an der zu diesem Hauptkreis senkrechten, durch $\mathfrak{B}_1$ gehenden Hauptkugel.

b) Der allgemeine Fall ist derjenige einer dreifachen Spiegelung oder Drehspiegelung. Derselbe resultirt durch eine Drehung um die Axe $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ von der Amplitude ε_0, wobei

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{a}{2} \quad \ldots \quad (97\varkappa)$$

ist und eine Spiegelung an der Hauptkugel B_2 (wobei die Reihenfolge der beiden Operationen vertauschbar ist), oder durch eine dreifache Spiegelung, nämlich an zwei durch $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ gehenden Hauptkugeln, welche um $\frac{\varepsilon_0}{2}$ gegeneinander geneigt sind und an der Hauptkugel B_2. Das festbleibende Haupttetraeder hat also zwei reelle Eckpunkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und zwei conjugirt imaginäre $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$. Wird allen Coefficienten a_{ik} der Substitution das entgegengesetzte Zeichen ertheilt, so vertauschen sich $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und an Stelle von B_2 tritt die Hauptkugel B_1.

Für die hier in Betracht kommenden dreifachen Spiegelungen ist

$$\varepsilon_0 = \frac{2k\pi}{n} \quad \ldots \quad (97\lambda)$$

und zwar ist speciell:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ \tau_3 = i \\ \tau_4 = -i \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 4 \\ k = 1, 3 \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = -1 \\ \tau_3 = \alpha \\ \tau_4 = \alpha^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 3 \\ k = 1 \\ \left(\begin{array}{l}\text{oder } n=6 \\ k=2\end{array}\right) \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ \tau_3 = -\alpha \\ \tau_4 = -\alpha^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 6 \\ k = 1 \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ \tau_3 = j \\ \tau_4 = \frac{1}{j} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 8 \\ k = 1 \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = -\sqrt{2} \\ \tau_3 = -j \\ \tau_4 = -\frac{1}{j} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 8 \\ k = 3 \end{array}
\end{aligned}\right.
\quad
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \operatorname{tg}\varphi \\ \tau_3 = e^{\frac{2\pi i}{5}} \\ \tau_4 = e^{-\frac{2\pi i}{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 5 \\ k = 1 \\ \left(\begin{array}{l}\text{oder } n=10 \\ k=2\end{array}\right) \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\operatorname{cotg}\varphi \\ \tau_3 = e^{\frac{4\pi i}{5}} \\ \tau_4 = e^{-\frac{4\pi i}{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 5 \\ k = 2 \\ \left(\begin{array}{l}\text{oder } n=10 \\ k=4\end{array}\right) \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \operatorname{cotg}\varphi \\ \tau_3 = -e^{\frac{4\pi i}{5}} \\ \tau_4 = -e^{-\frac{4\pi i}{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 10 \\ k = 1 \end{array} \\
&\left.\begin{array}{l} a = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\operatorname{tg}\varphi \\ \tau_3 = -e^{\frac{2\pi i}{5}} \\ \tau_4 = -e^{-\frac{2\pi i}{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{für } n = 10 \\ k = 3 \end{array}
\end{aligned}\right\} \quad (97\mu)
$$

u. s. f.

Diejenige eine Transformation des ebenen Raumes R_3 darstellende Substitution, aus welcher die eine dieser beiden Substitutionen direkt, die andere durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Substitutionscoefficienten hervorgeht, bedeutete eine uneigentliche Collineation. Speciell entspricht der centrischen Involution einmal die einfache Spiegelung a) α), das andere Mal die Inversionsspiegelung a) β).

Man bemerkt auch sofort die Analogie und andererseits die Verschiedenheit, welche zwischen den quaternären und den ternären uneigentlichen Substitutionen stattfindet. Die letzteren bedeuten ebenfalls einfache oder dreifache (Dreh-) Spiegelungen an Ebenen durch einen Punkt, wobei die letzteren durch Drehung um eine Axe verbunden mit einer Spiegelung an der zu der Axe senkrechten Ebene erhalten werden können; bei den ternären uneigentlichen Substitutionen ist aber der aus dem Falle einer einfachen Spiegelung durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller

Substitutionscoefficienten hervorgehende Fall derjenige der **Inversion** oder Spiegelung an einem Punkte (vgl. § 24 nach (91ζ)).

Die Beschaffenheit einer ein- oder dreifachen Spiegelung im Raume S_3, die Bestimmung der charakteristischen Axen, Punkte, Hauptkugeln lässt sich auch analytisch durch Benutzung der Darstellung in Hauptkreiscoordinaten erhalten (vgl. die Formeln ($96m$) u. folg.). Die Gleichung 6ten Grades in σ ($96n$) wird wegen $(a_{i_1k_1}\, a_{i_2k_2}) = -(a_{i_3k_3}\, a_{i_4k_4})$:

$$\begin{vmatrix} a_1-\sigma & b_1 & c_1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ a_2 & b_2-\sigma & c_2 & a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3-\sigma & a_6 & b_6 & c_6 \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & -a_1-\sigma & -b_1 & -c_1 \\ -a_5 & -b_5 & -c_5 & -a_2 & -b_2-\sigma & -c_2 \\ -a_6 & -b_6 & -c_6 & -a_3 & -b_3 & -c_3-\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (97\nu)$$

oder da $\Sigma\Theta_1 = 0$, $\Sigma\Theta_3 = 0$ sind,

$$\sigma^6 + \Sigma\Theta_2 \,.\, \sigma^4 - \Sigma\Theta_2\, \sigma^2 - 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97\nu')$$

welche stets die Wurzeln $\sigma = 1, -1$ hat. Die übrigen vier hier in Betracht kommenden Werthe für die Wurzeln σ sind bereits in § 9 unter I A) bei den uneigentlichen Collineationen des Raumes R_3 angegeben worden. Den Wurzeln $\sigma = 1, -1$ entsprechen die beiden festbleibenden Hauptkreise $\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4$.

Werden statt der Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{p}_{ik}$ die $\mathfrak{x}_i$ eingeführt, so bleiben die Wurzeln σ wesentlich dieselben und die Substitutionen ($96m$) gehen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,\mathfrak{x}'_1 &= (a_1-a_4)\,\mathfrak{x}_2 + (b_1-b_4)\,\mathfrak{x}_4 + (c_1-c_4)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_3 &= (a_2-a_5)\,\mathfrak{x}_2 + (b_2-b_5)\,\mathfrak{x}_4 + (c_2-c_5)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_5 &= (a_3-a_6)\,\mathfrak{x}_2 + (b_3-b_6)\,\mathfrak{x}_4 + (c_3-c_6)\,\mathfrak{x}_6 \end{aligned}\right\} (97\xi) \text{ und } \left.\begin{aligned} \sigma\,\mathfrak{x}'_2 &= -(a_1+a_4)\,\mathfrak{x}_1 - (b_1+b_4)\,\mathfrak{x}_3 - (c_1+c_4)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_4 &= -(a_2+a_5)\,\mathfrak{x}_1 - (b_2+b_5)\,\mathfrak{x}_3 - (c_2+c_5)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_6 &= -(a_3+a_6)\,\mathfrak{x}_1 - (b_3+b_6)\,\mathfrak{x}_3 - (c_3+c_6)\,\mathfrak{x}_5 \end{aligned}\right\} (97\xi').$$

§ 30.

II) Orthogonale quaternäre Substitutionen, welche Correlationen bedeuten.

Dieselben gehen aus den entsprechenden linearen Transformationsformeln zwischen Punkt- und Ebenen-Coordinaten durch den besprochenen Uebergang aus dem ebenen Raume R_3 in den sphärischen Raum S_3 hervor. Je eine Collineation $\mathfrak{z}'_i = \sum\limits_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k$ und eine Correlation $\zeta'_i = \sum\limits_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k$ oder $\mathfrak{z}'_i = \sum\limits_k a_{ik}\, \zeta_k$, von welcher die eine aus der anderen durch Vertauschung von

Punkt- mit Ebenen- (Hauptkugel-) Coordinaten entsteht, sollen einander entsprechend genannt werden. Die Correlationen sind daher ebenfalls in eigentliche und uneigentliche zu unterscheiden, je nachdem die Substitutionsdeterminante $\Delta = +1$ oder $= -1$ ist. (In Betreff derjenigen ternären orthogonalen Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, speciell der Correlationen der regulären Gruppen, sind die Bemerkungen in § 25 (Formeln (91η) folg.), sowie die citirte Abhandlung des Verfassers „Ueber die Correlationen der regulären Gruppen" zu vergleichen).

Die der identischen Transformation $\mathfrak{z}'_i = \mathfrak{z}_i$ oder $\zeta'_i = \zeta_i$ entsprechende Correlation: $\zeta' = \mathfrak{z}_i$ oder $\mathfrak{z}'_i = \zeta_i$ (98α)
bedeutet die Polarreciprocität in Beziehung auf

$$\Sigma \mathfrak{z}_i^2 = 0 \text{ oder } \Sigma \zeta_i^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98\beta)$$

d. h. in Beziehung auf die sphärische (imaginäre) Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$, welche bereits als unendlich ferne imaginäre Kugel $\mathfrak{K}_\infty$ bezeichnet wurde (§ 26 2)). Zufolge dieser Polarcorrelation entspricht jedem Punkte des S_3 die zugehörige Polarhauptkugel, jeder Hauptkugel der zugehörige Pol (bez. Gegenpol), jedem Hauptkreis ein reciprok-polarer Hauptkreis (vgl. § 26 1) bis 3)).

Der Inversion oder Spiegelung am Mittelpunkte O: $\mathfrak{z}'_i = -\mathfrak{z}_i$ oder $\zeta'_i = -\zeta_i$ entspricht die uneigentliche Correlation:

$$\zeta'_i = -\mathfrak{z}_i \text{ oder } \mathfrak{z}'_i = -\zeta_i; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98\alpha')$$

dieselbe soll als inverse Polarreciprocität in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\infty$ bezeichnet werden; denn zufolge ihr entspricht jeder Hauptkugel von S_3 der Gegenpunkt des Punktes, welcher derselben bei der eigentlichen Polarreciprocität (98α) entsprach. Jedem Punkte von S_3 entspricht zwar in beiden Fällen dieselbe Hauptkugel, aber das eine Mal die eine, das andere Mal die entgegengesetzte Seite derselben; diese Unterscheidung drückt sich z. B. für die der S_3 umgeschriebenen Vielräume (Polytope) in der Vertauschung der beiden „parallelen", an Punkt und Gegenpunkt construirten, berührenden ebenen Räume aus.

Nun lassen sich zwar alle Correlationen des S_3:

$$\zeta'_i = \sum_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k \text{ oder } \mathfrak{z}'_i = \sum_k a_{ik}\, \zeta_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98\gamma)$$

aus den entsprechenden Collineationen:

$$\mathfrak{z}'_i = \sum_k a_{ik}\, \mathfrak{z}_k \text{ oder } \zeta'_i = \sum_k a_{ik}\, \zeta_k$$

in Verbindung mit der speciellen Polarcorrelation (98α) (bezw. (98α')) herleiten. Jedoch ist es andererseits auch von Interesse und für die Untersuchung der Beschaffenheit dieser Correlationen des sphärischen Raumes S_3 wichtig, dieselben direkt aus den Correlationen des ebenen Raumes R_3 mit Benutzung der besprochenen Uebertragung zu erhalten. Analytisch ergeben sich aus jeder eine Correlation des ebenen Raumes R_3 darstellenden Substitution zwei Substitutionen, von welchen die eine direkt, die andere durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Substitutions-Coefficienten erhalten wird; diese beiden Correlationen des S_3 sind gleichzeitig eigentlich oder uneigentlich.

Es sollen im Folgenden die wesentlichen, hier in Betracht kommenden Fälle im Anschluss an die in § 9 unter II A), B) unterschiedenen aufgeführt werden, bei denen die Beschaffenheit der Wurzeln der charakteristischen biquadratischen Gleichung in ϱ oder bei Anwendung der Liniencoordinaten diejenige der Wurzeln der Gleichung 6ten Grades in σ entscheidend war.

§ 31.

II A) Eigentliche Correlationen des S_3.

Jede eigentliche Correlation lässt sich durch die Wurzelwerthe τ für die entsprechende Collineation charakterisiren, während die Wurzelwerthe σ für die letztere bei der entsprechenden Correlation sich so ändern, dass drei Werthe für σ, und zwar bei reellen Transformationen die den Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_6$ (oder $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_5$) entsprechenden das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. In der That vertauschen sich in den Transformationsformeln in $\mathfrak{p}'_{ik}$ und $\mathfrak{p}_{ik}$ (vergl. (96m) folg.) für $\varDelta = 1$ bei der entsprechenden Correlation bez. die vierte, fünfte, sechste Zeile der Coefficienten mit der ersten, zweiten, dritten, so dass die Substitutionsdeterminante Θ' (vgl. (96q)) die Form erhält:

$$\Theta' = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_6 & b_6 & c_6 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix} = -\Theta = -\varDelta^3 = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98\delta).$$

Die Substitutionsformeln in $\mathfrak{x}'_i$ und $\mathfrak{x}_i$ (vgl. (96t) und (96t')) werden:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\mathfrak{x}'_1 &= (a_1+a_4)\,\mathfrak{x}_1+(b_1+b_4)\,\mathfrak{x}_3+(c_1+c_4)\,\mathfrak{x}_5\\ \sigma\mathfrak{x}'_3 &= (a_2+a_5)\,\mathfrak{x}_1+(b_2+b_5)\,\mathfrak{x}_3+(c_2+c_5)\,\mathfrak{x}_5\\ \sigma\mathfrak{x}'_5 &= (a_3+a_6)\,\mathfrak{x}_1+(b_3+b_6)\,\mathfrak{x}_3+(c_3+c_6)\,\mathfrak{x}_5\end{aligned}\right\}(98\varepsilon)\qquad \left.\begin{aligned}\sigma\mathfrak{x}'_2 &= -(a_1-a_4)\,\mathfrak{x}_2-(b_1-b_4)\,\mathfrak{x}_4-(c_1-c_4)\,\mathfrak{x}_6\\ \sigma\mathfrak{x}'_4 &= -(a_2-a_5)\,\mathfrak{x}_2-(b_2-b_5)\,\mathfrak{x}_4-(c_2-c_6)\,\mathfrak{x}_6\\ \sigma\mathfrak{x}'_6 &= -(a_3-a_6)\,\mathfrak{x}_2-(b_3-b_6)\,\mathfrak{x}_4-(c_3-c_6)\,\mathfrak{x}_6\end{aligned}\right\}(98\varepsilon'),$$

woraus erhellt, dass von den Wurzeln der beiden cubischen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix}(a_1+a_4)-\sigma & b_1+b_4 & c_1+c_4\\ a_2+a_5 & (b_2+b_5)-\sigma & c_2+c_5\\ a_3+a_6 & b_3+b_6 & (c_3+c_6)-\sigma\end{vmatrix}=0\;..\;(98\zeta)\qquad \begin{vmatrix}(a_1-a_4)+\sigma & b_1-b_4 & c_1-c_4\\ a_2-a_5 & (b_2-b_5)+\sigma & c_2-c_5\\ a_3-a_6 & b_3-b_6 & (c_3-c_6)+\sigma\end{vmatrix}=0\;..\;(98\zeta')$$

die drei ersteren mit denjenigen für die entsprechende Collineation übereinstimmen, die drei letzteren den entsprechenden für die Collineation entgegengesetzt gleich sind.

Bei der folgenden übersichtlichen Angabe der hier in Betracht kommenden Fälle eigentlicher Correlationen wird die Reihenfolge der Wurzelwerthe σ für die entsprechende eigentliche Collineation immer der Reihenfolge $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_5, \mathfrak{x}_6$ gemäss angenommen. Dem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Werthe für σ entspricht in allen Fällen die Umkehrung des Richtungssinnes der zugehörigen Hauptkreise.

1) Der identischen Transformation $\tau = 1, 1, 1, 1$, $\sigma = 1, 1, 1, 1, 1, 1$ entspricht die Polar-Reciprocität in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\infty$, $\sigma = 1, -1, 1, -1, 1, -1$, der Inversion $\tau = -1, -1, -1, -1$ die inverse Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$.

2) Den Umwendungen um einen Hauptkreis (bezw. dessen conjugirte Polare) $\tau = 1, 1, -1, -1$ (bez. $\tau = -1, -1, 1, 1$) und z. B. $\sigma = 1, 1, -1, -1, -1, -1$ entspricht eine eigentliche Polarcorrelation (bez. eine eigentliche inverse Polarcorrelation) in Bezug auf die Projection einer reellen Regelfläche 2ten Grades mit reellen erzeugenden Geraden auf den S_3 (vgl. § 26 5) und Formel (94γ)); die Wurzeln σ sind z. B. $\sigma = 1, -1, -1, 1, -1, 1$. Als hierher gehörige Flächen 2ten Grades treten im Folgenden $F_2^{(1)} .. F_{10}^{(1)}$, $F^{(4)}$, $F^{(3)}$ auf, deren Projectionen auf S_3 durch $\mathfrak{F}_2^{(1)} .. \mathfrak{F}_{10}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(4)}$, $\mathfrak{F}^{(3)}$ bezeichnet werden mögen.

3) Den vierzähligen Doppeldrehungen, für welche die Gesammtheit der Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit imaginärem Axenpaar bildet (vgl. § 28 I) A) unter d) α)):

$$\tau = i, i, -i, -i \text{ und z. B. } \sigma = 1, 1, -1, 1, -1, 1$$

entspricht eine vierzählige Null-Correlation, deren zugehöriger sphärischer Complex mit seinem polaren zusammenfällt (vgl. § 26 4) α')); die Wurzeln σ sind z. B. $\sigma = 1, -1, -1, -1, -1, -1$. Als solche Complexe treten die 6 Fundamentalcomplexe $\mathfrak{x}_i = 0$ und 12 der Complexe $\mathfrak{x}_{i_1} \pm \mathfrak{x}_{i_2} = 0$ auf.

4) a) Einer n-zähligen einfachen Rotation um einen Hauptkreis:

$$\tau = 1,\ 1,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\sigma = 1,\ 1,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

entspricht, falls n ungerade ist, eine $2n$-zählige allgemeine Correlation, deren Haupttetraeder die unendlich fernen imaginären Schnittpunkte der Rotationsaxe und ihrer reciproken Polaren mit $\mathfrak{K}_\infty$ zu Eckpunkten hat. Die Werthe für σ sind alsdann:

$$\sigma = 1,\ -1,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ -e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{-\frac{2\pi i}{n}},\ -e^{-\frac{2\pi i}{n}};$$

die geraden Potenzen der Substitution S' liefern die n-zähligen einfachen Rotationen, während S'^n die Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ bedeutet.

Der durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Substitutions-Coefficienten aus der einfachen Rotation hervorgehenden $2n$-zähligen besonderen Doppeldrehung, welche sich aus einer einfachen $2n$-zähligen Drehung um die Axe und einer Umwendung um deren reciproke Polare zusammensetzt (vgl. A) 1) unter c) β)):

$$\tau = -1,\ -1,\ -e^{\frac{2\pi i}{n}},\ -e^{-\frac{2\pi i}{n}},$$

entspricht ebenfalls eine $2n$-zählige allgemeine Correlation mit demselben Coordinatentetraeder; die geraden Potenzen dieser Substitution bedeuten wiederum die n-zähligen einfachen Rotationen, S'^n bedeutet die inverse Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$.

4b) Ist dagegen n eine gerade Zahl (für das Folgende kommt nur der Fall $n = 4$ in Betracht), so entspricht

4b) α) der einfachen n-zähligen Rotation um einen Hauptkreis eine n-zählige Axencorrelation der ersten Art (vgl. § 9 II B) unter 3)), deren Axen die Rotationsaxe und deren reciproke Polare sind. Hierbei bleiben die Hauptkreise zweier sphärischen Strahlbüschel $(\mathfrak{P}_1, \Pi_1)$ und $(\mathfrak{P}_2, \Pi_2)$

fest, deren Hauptkugeln Π_1, Π_2 durch die Rotationsaxe gehen, während die mit jenen bez. incidenten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ der reciproken Polare angehören. Die in sich transformirten sphärischen Flächen 2ten Grades werden auf die erste Art in sich transformirt. Die geraden Potenzen von S' bedeuten die $\frac{n}{2}$-zähligen einfachen Drehungen um die Axe, $S'^{\frac{n}{2}}$ bedeutet die Umwendung um dieselbe.

4 b) β) Der $2n$-zähligen besonderen Doppeldrehung, welche aus einer einfachen $2n$-zähligen Drehung um die Axe und der Umwendung um deren reciproke Polare sich zusammensetzt, entspricht ebenfalls eine n-zählige Axencorrelation der ersten Art, deren Axen dieselben sind, wie bei 4 b) α); dieselbe kann als inverse der ersteren bezeichnet werden, da einer Hauptkugel der Gegenpunkt des Punktes entspricht, welcher ihr bei α) entsprach, ebenso einem Punkte die andere Seite der Hauptkugel, wie bei α).

5a) Einer $2n$-zähligen Doppeldrehung, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit imaginärem Axenpaar bildet (vgl. § 28 A) 1) unter d) β)), entspricht bei ungeradem n, für welches die $2n$-zähligen Substitutionen die n-zähligen als gerade Potenzen von S enthalten,

$$\tau = e^{\frac{\pi i}{n}},\ e^{\frac{\pi i}{n}},\ e^{-\frac{\pi i}{n}},\ e^{-\frac{\pi i}{n}} \left(\text{bez. } -e^{\frac{\pi i}{n}},\ -e^{\frac{\pi i}{n}},\ -e^{-\frac{\pi i}{n}},\ -e^{-\frac{\pi i}{n}}\right),\ \sigma = 1,\ 1,\ 1,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ 1\ e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

eine $4n$-zählige Correlation mit zusammenfallender Kernfläche (vgl. § 9 II A) unter 4)):

$$\sigma = 1,\ -1,\ 1,\ -e^{\frac{2\pi i}{n}},\ 1,\ -e^{-\frac{2\pi i}{n}}.$$

Die Leithauptkreise der beiden festbleibenden speciellen Complexe sind die imaginären Axen der linearen Congruenz für die Schraubenaxen. Die geraden Potenzen von S' entsprechen den $2n$-zähligen Doppeldrehungen, S'^{2n} der Inversion, die beiden Potenzen S'^{n} und S'^{3n} der direkten und der inversen Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$.

5 b) Ist aber n eine gerade Zahl, so entspricht einer $2n$-zähligen Doppeldrehung von der vorausgesetzten Beschaffenheit, eine $2n$-zählige Correlation mit zusammenfallender Kernfläche. Die geraden Potenzen von S' entsprechen hierbei den n-zähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit demselben Axenpaar bilden.

6a) Denjenigen Collineationen des S_3, welche allgemeine $2n$-zählige Doppeldrehungen (Schrauben-Bewegungen) bedeuten und für welche die Wurzelwerthe für τ bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel ungeändert bleiben, während unter den Wurzelwerthen für σ je zweimal die Wurzel $+1$, -1 und zwei zusammengehörige Einheitswurzeln auftreten, z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} n=4 \ldots \tau = j,\ -j,\ -\frac{1}{j},\ \frac{1}{j} \ldots \sigma = 1,\ 1,\ -1,\ i,\ -1,\ -i \\ n=6 \ldots \tau = \alpha i,\ -\alpha i,\ -\alpha^2 i,\ \alpha^2 i \,.\,.\, \sigma = 1,\ 1,\ -1,\ \alpha,\ -1,\ \alpha^2 \\ n=10 \,.\,.\, \tau = \varepsilon i,\ -\varepsilon i,\ -\varepsilon^4 i,\ \varepsilon^4 i \,.\,.\, \sigma = 1,\ 1,\ -1,\ \varepsilon^2,\ -1,\ \varepsilon^3 \end{array}\right\} \quad (98\eta)$$

entsprechen $2n$-zählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche. Die Wurzelwerthe für σ werden für die drei in (98η) angegebenen Fälle:

$$\left.\begin{array}{l} n=4 \ldots \sigma = 1,\ -1,\ -1,\ -i,\ -1,\ i \\ n=6 \ldots \sigma = 1,\ -1,\ -1,\ -\alpha,\ -1,\ -\alpha^2 \\ n=10 \,.\,.\, \sigma = 1,\ -1,\ -1,\ -\varepsilon^2,\ -1,\ -\varepsilon^3 \end{array}\right\} \quad (98\eta').$$

Die festbleibenden Leithauptkreise der beiden speciellen Complexe werden durch eins der beiden imaginären Kantenpaare des Haupttetraeders der entsprechenden Collineation gebildet. Die geraden Potenzen der Substitution S' bedeuten n-zählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginärem Axenpaar bilden, S'^n bedeutet die Inversion, $S'^{\frac{n}{2}}$ und $S'^{\frac{3n}{2}}$ (für $n>4$) bedeuten zwei vierzählige Null-Correlationen.

6b) Dagegen entsprechen denjenigen allgemeinen $2n$-zähligen Doppeldrehungen, für welche die Wurzelwerthe für τ bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel in solche von doppelter Zähligkeit übergehen, während die Wurzelwerthe für σ zwei Gruppen mit den Werthen $\sigma = 1$ und zwei Paaren von zusammengehörigen Einheitswurzeln darstellen,

6b) α) im Falle eines geraden n, z. B. für

$$n=12 \ldots \tau = \alpha j,\ \alpha^2 j,\ -\alpha\frac{1}{j},\ -\alpha^2\frac{1}{j} \ldots \sigma = 1,\ 1,\ \alpha,\ i,\ \alpha^2,\ -i \ldots (98\vartheta\alpha)$$

allgemeine $2n$-zählige Correlationen, deren Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die entsprechenden Doppeldrehungen. Die Wurzeln σ werden z. B. für

$$n=12 \ldots \sigma = 1,\ -1,\ \alpha,\ -i,\ \alpha^2,\ i \ldots\ldots\ldots (98\vartheta'\alpha)$$

und es bedeuten für dieses Beispiel S', S'^5, S'^7, S'^{11}, S'^{13}, S'^{17}, S'^{19}, S'^{23} 24-zäh-

lige allgemeine Correlationen, S'^3, S'^9, S'^{15}, S'^{21} 8-zählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche, S'^2, S'^{10}, S'^{14}, S'^{22} 12-zählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxenpaar das reelle Kantenpaar des Haupttetraeders ist, S'^4, S'^8, S'^{16}, S'^{20} 6-zählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem einen imaginären Kantenpaar als Axenpaar bilden, S'^6, S'^{18} 4-zählige derartige Doppeldrehungen mit dem anderen imaginären Kantenpaar als Axenpaar der linearen Congruenz, während S'^{12} die Inversion bedeutet;

6 b) β) im Falle eines ungeraden n z. B. für

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \ \ldots \tau = \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \ \ldots\ldots \sigma = 1, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^3 \\ n = 15 \ \ldots \tau = \alpha\varepsilon, \alpha^2\varepsilon, \alpha\varepsilon^4, \alpha^2\varepsilon^4 \ \ldots \sigma = 1, 1, \alpha, \varepsilon^2, \alpha^2, \varepsilon^3 \end{array}\right\} \quad (98\vartheta\beta)$$

allgemeine $4n$-zählige Correlationen, deren Haupttetraeder mit demjenigen der Doppeldrehungen übereinstimmt. Die Wurzeln z. B. werden für

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \ \ldots \sigma = 1, -1, \varepsilon, -\varepsilon^2, \varepsilon^4, -\varepsilon^3 \\ n = 15 \ \ldots \sigma = 1, -1, \alpha, -\varepsilon^2, \alpha^2, -\varepsilon^3 \end{array}\right\} \ \ldots\ldots \ (98\vartheta'\beta)$$

Für $n = 15$ z. B. bedeuten S', S'^{19}; S'^3, S'^{17}; S'^7, S'^{13}; S'^9, S'^{11} 20-zählige allgemeine Correlationen; S'^2, S'^{18}; S'^4, S'^{16}; S'^6, S'^{14}; S'^8, S'^{12} bedeuten 10-zählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxenpaar das reelle Kantenpaar des Haupttetraeders ist, während S'^5 und S'^{15} die directe und indirecte Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$, S'^{10} die Inversion darstellen.

Der wichtige Unterschied zwischen den beiden Fällen 6 a) und 6 b) für die Collineationen und damit auch für die entsprechenden Correlationen lässt sich auch dadurch charakterisiren, dass die Amplituden für die beiden componirenden Drehungen um die Schraubenaxen im ersten Falle $\left|p\frac{\pi}{n}\right|$ und $\left|\frac{n-p}{n}\pi\right|$ betragen, also sich zu π ergänzen, im zweiten Falle dagegen $\left|p_1\frac{\pi}{n}\right|$ und $\left|p_2\frac{\pi}{n}\right|$, wo p_1, p_2 Zahlen bedeuten, welche prim zu $2n$ sind.

§ 32.

II B) Uneigentliche Correlationen des S_3.

Jede uneigentliche Correlation des S_3 lässt sich ebenfalls durch die Wurzelwerthe für τ (vgl. § 29 (97δ) unter I B) der entsprechenden uneigentlichen Collineationen charakterisiren; die Wurzelwerthe für σ ändern sich

hierbei nur um den gemeinsamen Faktor i, bleiben also im Wesentlichen dieselben. In der That: In den Transformationsformeln für die $\mathfrak{p}'_{ik}$ und $\mathfrak{p}_{ik}$ (vgl. (96m) folg.) für $\Delta = -1$ vertauschen sich für die entsprechende Correlation bezw. die vierte, fünfte, sechste Zeile der Coefficienten mit der ersten, zweiten, dritten, so dass die Substitutionsdeterminante Θ' die Form erhält (vgl. (97 ν)):

$$\Theta' = \begin{vmatrix} -a_4 & -b_4 & -c_4 & -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_5 & -b_5 & -c_5 & -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ -a_6 & -b_6 & -c_6 & -a_3 & -b_3 & -c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix} = \Delta^3 = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98\iota)$$

Die Gleichung in σ' erhält die Form:

$$\sigma'^6 - \Sigma\Theta'_2 \,.\, \sigma'^4 - \Sigma\Theta_2' \,.\, \sigma'^2 + 1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98\varkappa)$$

und diese geht durch die Substitution $\sigma' = i\sigma$ in die entsprechende Gleichung:

$$\sigma^6 + \Sigma\Theta_2 \,.\, \sigma^4 - \Sigma\Theta_2 \,.\, \sigma^2 - 1 = 0$$

(vgl. (97ν')) über.

Durch Einführung der Hauptkreiscoordinaten $\mathfrak{x}_i$ für p_{ik}, wodurch die Wurzeln σ im Wesentlichen ungeändert bleiben, gehen die Transformationsformeln (96m) in folgende über (vgl. (97ξ)):

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,\mathfrak{x}'_1 &= (a_1-a_4)\,\mathfrak{x}_2+(b_1-b_4)\,\mathfrak{x}_4+(c_1-c_4)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_3 &= (a_2-a_5)\,\mathfrak{x}_2+(b_2-b_5)\,\mathfrak{x}_4+(c_2-c_5)\,\mathfrak{x}_6 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_5 &= (a_3-a_6)\,\mathfrak{x}_2+(b_3-b_6)\,\mathfrak{x}_4+(c_3-c_6)\,\mathfrak{x}_6 \end{aligned}\right\}(98\lambda) \quad \left.\begin{aligned} \sigma\,\mathfrak{x}'_2 &= (a_1+a_4)\,\mathfrak{x}_1+(b_1+b_4)\,\mathfrak{x}_3+(c_1+c_4)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_4 &= (a_2+a_5)\,\mathfrak{x}_1+(b_2+b_5)\,\mathfrak{x}_3+(c_2+c_5)\,\mathfrak{x}_5 \\ \sigma\,\mathfrak{x}'_6 &= (a_3+a_6)\,\mathfrak{x}_1+(b_3+b_6)\,\mathfrak{x}_3+(c_3+c_6)\,\mathfrak{x}_5 \end{aligned}\right\}(98\lambda').$$

Die Formeln (97ξ) und (98λ) stimmen überein, während die Substitutionscoefficienten in (97ξ') und (98λ') entgegengesetzt sind.

Im Folgenden sind die hier in Betracht kommenden Fälle uneigentlicher Correlationen angegeben und durch die Wurzelwerthe für τ und σ der entsprechenden uneigentlichen Collineationen gekennzeichnet.

1) Einer einfachen Spiegelung an einer Hauptkugel (vgl. § 29 I B) unter a) α)): $\tau = -1, 1, 1, 1$, $\sigma = 1, -1, 1, -1, 1, -1$ entspricht eine uneigentliche Polar-Correlation in Bezug auf die Projection einer Fläche 2ten Grades mit imaginären erzeugenden Geraden auf den S_3 (vgl. § 26 5) (94α) und (94β)), d. h. in Bezug auf eine bestimmte Kleinkugel (nebst Gegenkugel). Einer Inversionsspiegelung (vergleiche § 29 I B) unter a) β)): $\tau = 1, -1, -1, -1$ entspricht eine inverse uneigentliche Polar-Correlation.

2) Einer $2n$-zähligen allgemeinen dreifachen Spiegelung oder Drehspiegelung (vgl. § 29 I B) unter b)) entspricht

a) im Falle $n = 2$, $\tau = 1, -1, i, -i$;
$\sigma = 1, -1, i, -i, i, -i$

eine vierzählige Axencorrelation zweiter Art (vgl. § 9 II B) unt. 3)), deren Axen die beiden reellen Kanten des Haupttetraeders der Drehspiegelung sind. Den beiden reellen, um einen Quadranten von einander abstehenden Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ der Drehaxe entsprechen zwei reelle Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ derselben, welche bez. um einen Achtelskreis von den ersteren, von einander um einen Quadranten abstehen, also durch eine Drehung von 45^0 um die reciproke Polare der Axe resultiren. Diese Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ sind die Mittelpunkte der bei dieser Correlation festbleibenden sphärischen Strahlbüschel; die zugehörigen Hauptkugeln Γ_1, Γ_2 gehen durch die reciproke Polare der Axe und resultiren aus den Hauptkugeln B_1, B_2 des Haupttetraeders durch die Drehung um 45^0. Wenn allen Coefficienten a_{ik} der Substitution das entgegengesetzte Zeichen ertheilt wird, so vertauschen sich für die Drehspiegelung $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, B_2 und B_1; für die entsprechende inverse Correlation treten die Gegenpunkte $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}'_2$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln Γ_1, Γ_2 auf.

b) Im Falle $n > 2$, z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} n = 3,\ \tau = \pm 1,\ \mp 1,\ \pm \alpha,\ \pm \alpha^2;\ \sigma = 1,\ -1,\ \alpha,\ -\alpha,\ \alpha^2,\ -\alpha^2 \\ n = 4,\ \tau = \pm 1,\ \mp 1,\ \pm j,\ \pm \frac{1}{j};\ \sigma = 1,\ -1,\ j,\ -j,\ \frac{1}{j},\ -\frac{1}{j} \\ n = 5,\ \tau = \pm 1,\ \mp 1,\ \pm \varepsilon,\ \pm \varepsilon^4;\ \sigma = 1,\ -1,\ \varepsilon^2,\ -\varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ -\varepsilon^3 \end{array}\right\} \quad (98\mu)$$

entspricht der $2n$-zähligen allgemeinen Drehspiegelung eine $2n$-zählige allgemeine uneigentliche Correlation. Die beiden imaginären Eckpunkte (und Hauptkugeln) des Haupttetraeders sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung, dagegen stehen die beiden reellen Eckpunkte von denjenigen, welche der Drehspiegelung zugehören, um je einen Achtelskreis ab, resultiren also durch eine Drehung von 45^0 um die die beiden imaginären Eckpunkte enthaltende Kante, wodurch auch die beiden durch diese Kante hindurchgehenden reellen Hauptkugeln eine Drehung von 45^0 erfahren. Da der Bogenabstand der beiden reellen Eckpunkte selbst einen Quadranten beträgt (der beiden reellen Hauptkugeln

selbst auf einander senkrecht stehen), so folgt, dass für $n = 2p$ die reellen Eckpunkte (Hauptkugeln) für die Correlation zu derselben Gruppe von Punkten gehören, wie diejenigen für die Collineation, für $n = 2p+1$ dagegen zu einer anderen Gruppe. So sind für $n = 4$ (vgl. § 15 A) und B) 2)) die beiden reellen Eckpunkte für die Collineation und Correlation je zwei Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(l)}$ (zwei Hauptkugeln $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(l)}$), dagegen für $n = 3$ (vgl. § 21 A) und B)) für die Collineation je ein Punkt $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{g}$ (je eine Hauptkugel ε und χ), für die Correlation dagegen zwei Punkte $\mathfrak{p}$ (zwei Hauptkugeln π).

Die geraden Potenzen einer eine solche Correlation darstellenden Substitution S' bedeuten die n-zähligen Drehungen um den die beiden imaginären Punkte enthaltenden Hauptkreis, S'^n bedeutet bei geradem n die Umwendung um diesen Hauptkreis, bei ungeradem n dagegen eine uneigentliche Polar-Correlation (vgl. 1) dieses §) oder, falls die Vorzeichen aller Coefficienten a_{ik} umgekehrt werden, die inverse uneigentliche Polar-Correlation. Im Übrigen ist die durch den gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Coefficienten a_{ik} oder der Wurzelwerthe für σ bestimmte $2n$-zählige allgemeine uneigentliche Correlation, abgesehen von dem Auftreten der Gegenpunkte und der entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln, von derselben Beschaffenheit, wie die erste.

§ 33.

Anwendungen auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

Aus den in den letzten Paragraphen gewonnenen Aufstellungen lassen sich nunmehr unmittelbar die sämmtlichen Bewegungen, Spiegelungen und dualistischen Umformungen entnehmen, durch welche die bereits in § 24 erwähnten regelmässigen, linear begrenzten Gebilde des vierdimensionalen Raumes R_4 in sich übergehen.

Die regelmässigen (und auch die zum Theil regelmässigen), linear begrenzten Gebilde des vierdimensionalen Raumes R_4, die sog. regulären (und die theilweise regulären) Polytope sind bestimmten sphärischen „Zellgeweben"[1]), welche den sphärischen Raum S_3 ausfüllen und durch die

[1]) Vgl. E. Hess: Ueber die regulären Polytope höherer Art. Marb. Ber. 1885. S. 31—57.

Symmetrieräume jener Gebilde entstehen, ein- oder umgeschrieben. Diese sphärischen Zellgewebe entstehen durch Centralprojection aus bestimmten vollständigen Figuren des dreidimensionalen ebenen Raumes R_3 (vgl. § 26), analog wie die sphärischen Netze, welchen die regelmässigen (und die halbregelmässigen) Polyeder ein- oder umgeschrieben sind, durch Centralprojection gewisser vollständiger ebener Figuren auf die Kugelfläche erhalten werden können (vgl. § 25).

Den Bewegungen, Spiegelungen und dualistischen Umformungen, durch welche ein solches sphärisches Zellgewebe in sich übergeführt wird, entsprechen in einfacher Weise die Collineationen und die Correlationen für die jenen ein- und umgeschriebenen Polytope. Denn da durch Verbindung des Mittelpunktes O des S_3 mit den Punkten, Hauptkreisen und Hauptkreisbogen, Hauptkugeln und Flächentheilen derselben, sphärischen Flächen 2ten Grades, bez. Gerade, Ebenen und Ebenentheile, Euklid'sche Räume („Lineoide“ nach Cole[1]) und deren Theile, Kegelräume 2ten Grades des R_4 entstehen, so können — auch analytisch — alle den Punkt O enthaltenden Gebilde des Raumes R_4 durch die entsprechenden des sphärischen Raumes S_3 dargestellt werden. Insbesondere entsprechen zweien sich nicht schneidenden (nicht derselben Hauptkugel angehörigen) Hauptkreisen des S_3 zwei sich nicht in einer Geraden schneidende (nicht demselben Euklid'schen Raume angehörige) Ebenen des R_4, einem Hauptkreis und dessen reciproker Polare entsprechen zwei „absolut zu einander senkrechte“ Ebenen (nach Cole's Bezeichnung), welche sich in Beziehung auf den imaginären Kegelraum oder „Null-S_3-Raum“ K_∞, der der imaginären Fläche $\mathfrak{K}_\infty$ entspricht, als conjugirte Polar-Ebenen zugeordnet sind. Auf diesem Null-S_3-Raum lassen sich zwei Schaaren imaginärer erzeugender Ebenen unterscheiden, ebenso wie den reellen sphärischen Flächen 2ten Grades mit zwei Schaaren reeller erzeugender Hauptkreise im R_4 Kegelräume 2ten Grades mit zwei Schaaren reeller erzeugender Ebenen entsprechen. Einem sphärischen Hauptkreis-Complexe ersten Grades (vgl. § 26 unter 4)) entspricht im R_4 ein linearer „Ebenen-Complex“, wobei die oben besprochenen Beziehungen und besonderen Fälle des ersteren sich ohne Weiteres auf den letzteren übertragen lassen.

[1]) A. a. O.

Hieraus ergiebt sich, dass einer einfachen Drehung um einen Hauptkreis, einer Doppel-Drehung um zwei sich nicht schneidende Hauptkreise im S_3 bez. eine einfache Drehung um eine Ebene, eine Doppel-Drehung um zwei sich nicht schneidende (d. h. nur den Punkt O gemein habende) Ebenen im R_4 entspricht; insbesondere entspricht der Schraubenbewegung um zwei polar-reciproke Hauptkreise im R_4 eine Doppel-(Schrauben-) Drehung um zwei absolut zu einander senkrechte Ebenen. Auch der besondere Fall, in welchem die Gesammtheit der sphärischen Schraubenaxen eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise zwei imaginäre, sich selbst conjugirte, Hauptkreise der $\mathfrak{K}_\infty$ sind (vgl. § 28 I A) unter d)) überträgt sich in leicht erkennbarer Weise auf den Raum R_4. Die Zähligkeit der Drehungen ist hierbei immer für R_4 dieselbe, wie für S_3. Einer Spiegelung an einer Hauptkugel im S_3 entspricht eine Spiegelung an dem zugehörigen Euklid'schen Raume im R_4 u. s. f.

Im Folgenden sollen nunmehr diese Beziehungen für die drei hier zunächst in Betracht kommenden und bereits in § 24 erwähnten regulären Polytope, das Sechszehn-Zell, das Acht-Zell und das Vierundzwanzig-Zell mit Benutzung der zugehörigen sphärischen Zellgewebe genauer angegeben werden.

§ 34.

Sphärische Zellgewebe des regulären Sechszehnzells und des regulären Achtzells. Conjugirte Zellgewebe.

1) Wenn die vollständige Figur eines ebenflächigen Tetraeders, als welches das Fundamentaltetraeder T_1 gewählt werde, durch Centralprojection auf einen concentrischen sphärischen Raum S_3 vom Radius $= 1$ übertragen wird (vgl. § 24), so wird durch die vier den Grenzflächen $\varepsilon_1 .. \varepsilon_4$ von T_1 entsprechenden Hauptkugeln $\alpha_1 .. \alpha_4$ der Raum S_3 in 16 sphärische Tetraeder getheilt, welche einander bezw. als Gegen-, Neben-, Scheitel-Tetraeder zugeordnet sind. Sind die vier Hauptkugeln speciell zu einander senkrecht — was durch geeignete Wahl des Projectionscentrums oder durch collineare Umformung der Figur immer erreicht werden kann —, so entsteht ein durch 16 congruente reguläre sphärische Tetraeder, deren Seitenflächen

Kugeloktanten sind, gebildetes reguläres sphärisches Zellgewebe, welches als G_2 bezeichnet werden soll.

Dies Gewebe G_2 hat 8 Eckpunkte, nämlich 4 Punkte $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_4$ und deren Gegenpunkte $\mathfrak{a}'_1 \ldots \mathfrak{a}'_4$, welche die Projectionen der Eckpunkte $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_4$ von T_1 sind, $4 \,.\, 6 = \frac{6 \,.\, 16}{4} = 24$ sphärische Kanten gleich einem Kreisquadranten, welche den 6 Hauptkreisen e, den Projectionen der Kanten e von T_1 angehören und zu je zwei reciproke Polaren sind, $4 \,.\, 8 = \frac{4 \,.\, 16}{2} = 32$ sphärische Grenzflächen gleich einem Kugeloktanten, welche den 4 Hauptkugeln $\alpha_1 \ldots \alpha_4$, den Projectionen der Grenzflächen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4$ von T_1 angehören und die Polarhauptkugeln der Punkte $\mathfrak{a}_i$ sind, endlich 16 sphärische Grenztetraeder, von denen in jeder Ecke 8, in jeder Kante 4, in jeder Fläche 2 zusammenstossen. Das diesem Gewebe G_2, welches auch als reguläres sphärisches Sechszehnzell bezeichnet werden kann, eingeschriebene Polytop ist das reguläre Sechszehnzell P_2, dessen Eckpunkte mit denjenigen des Gewebes G_2 übereinstimmen, während die Kanten, die regulären dreieckigen Flächen und die regulären tetraedrischen Grenzräume in einfachen Beziehungen zu den entsprechenden sphärischen Gebilden stehen. Die Abstände r_k der Kanten, r_f der Seitenflächen, r_p der Grenzräume vom Mittelpunkte werden einfach, für den Eckradius $r_e = 1$,

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad r_f = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_p = \frac{1}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99\alpha)$$

die Länge $\mathfrak{K}_2$ einer der 24 Kanten, der Inhalt $\mathfrak{F}_2$ einer der 32 Seitenflächen, der Inhalt $\mathfrak{P}_2$ eines der 16 Tetraeder, sowie der Inhalt $\mathfrak{N}_2$ eines der 16 Pentatope, welche durch Verbindung eines Tetraeders mit dem Mittelpunkte O entstehen, werden in den bezüglichen Maasseinheiten:

$$\mathfrak{K}_2 = \sqrt{2}, \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \mathfrak{P}_2 = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{N}_2 = \frac{1}{24}, \quad \ldots\ldots \quad (99\beta)$$

so dass der „Umfang" (die Grenze) des Sechszehnzells $\frac{16}{3}$, der Inhalt desselben $\frac{2}{3}$ beträgt, während das Volumen eines sphärischen Tetraeders der 16te Theil des Volumens des sphärischen Raumes, also $\frac{\pi^2}{8}$ ist.[1])

[1]) Vgl. R. Hoppe: Regelmässig linear begrenzte Räume von vier Dimensionen. Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 67. S. 29—43. — E. Hess: Ueber reguläre Polytope höherer Art. A. a. O.

2) Werden in den 8 Eckpunkten des sphärischen Gewebes $\boldsymbol{G}_2$ die den Raum S_3 berührenden Euklid'schen Raume construirt, so entsteht das dem Gewebe $\boldsymbol{G}_2$ umgeschriebene reguläre Achtzell $\boldsymbol{P}_2'$. Die 16 Schnittpunkte, welche sich zu je zweien als Gegenpunkte entsprechen, dieser 8 Räume zu je vieren sind die Pole der tetraedrischen Grenzräume des eingeschriebenen Sechszehnzells in Beziehung auf S_3, die 32 Kanten, in welchen sich je 3 Räume schneiden, entsprechen polar den regulär-dreieckigen Grenzflächen, die 24 regulär-viereckigen Grenzflächen den 24 Kanten des eingeschriebenen Sechszehnzells, die 8 Grenzräume endlich sind reguläre Hexaeder. Für die Abstände r'_e der Eckpunkte, r'_k der Kanten, r'_f der Seitenflächen und r'_p der Grenzräume vom Mittelpunkte erhält man leicht (vgl. (99α)):

$$r'_e = \frac{1}{r_p} = 2,\ r_k' = \frac{1}{r_f} = \sqrt{3},\ r'_f = \frac{1}{r_k} = \sqrt{2},\ r'_p = \frac{1}{r_e} = 1; \quad . . (99\gamma)$$

für die Grössen $\mathfrak{K}'_2$, $\mathfrak{F}'_2$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{R}'_2$ ergeben sich in den bezüglichen Maasseinheiten die Werthe:

$$\mathfrak{K}'_2 = 2,\ \mathfrak{F}'_2 = 4,\ \mathfrak{P}'_2 = 8,\ \mathfrak{R}'_2 = 2, \quad (99\delta)$$

so dass der „Umfang" des Achtzells 64, der Inhalt desselben 16 beträgt, für die Kantenlänge = 1 also bezüglich 8 und 1.[1])

Die Eigenschaften und polaren Beziehungen der beiden regulären Polytope $\boldsymbol{P}_2$ und $\boldsymbol{P}'_2$ können auch analytisch sehr einfach durch Benutzung des vierfach rechtwinkligen Coordinatensystems erhalten werden, dessen Coordinatenräume die 4 in O sich senkrecht schneidenden Euklid'schen Räume sind, welche den concentrischen Raum S_3 in den 4 Hauptkugeln $\alpha_1 \, .. \, \alpha_4$ schneiden, während die 6 Coordinatenebenen und die 4 Coordinatenaxen bez. die 6 Hauptkreise t und die 4 Eckpunkte $\mathfrak{a}_1 \, .. \, \mathfrak{a}_4$ (nebst Gegenpunkten $\mathfrak{a}'_1 \, .. \, \mathfrak{a}'_4$) erzeugen.

3) Durch die 16 Eckpunkte des regulären Achtzells $\boldsymbol{P}'_2$ ist auf dem concentrischen Raum S'_3 mit dem Radius $r'_e = 2$ ein zugehöriges reguläres sphärisches Gewebe $\boldsymbol{G}''_2$ bestimmt, welchem $\boldsymbol{P}'_2$ eingeschrieben ist. Dieses Gewebe $\boldsymbol{G}''_2$ ist durch die 12 Hauptkugeln β' gebildet, welche je vier Eckpunkte eines Quadrates von $\boldsymbol{P}'_2$ und deren Gegenpunkte enthalten, und

[1]) Vgl. Hoppe a. a. O.

setzt sich aus 8 regulären sphärischen Hexaedern zusammen, weshalb es auch als reguläres sphärisches Achtzell bezeichnet werden kann. Für den Centriwinkel α'_2 einer sphärischen Kante, den Neigungswinkel A_2' zweier Hauptkreise, welche einer Ecke (oder einer sphärischen Grenzfläche) angehören und den Neigungswinkel $\mathfrak{A}'_2$ zweier sich in einer Kante schneidenden Hauptkugeln, ergeben sich die Werthe:[1])

$$\alpha_2' = 60^0,\ A'_2 = 2\eta,\ \mathfrak{A}_2' = 120^0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99\varepsilon)$$

während die entsprechenden Werthe α_2, A_2, $\mathfrak{A}_2$ für das Gewebe G_2 waren:

$$\alpha_2 = 90^0,\ A_2 = 90^0,\ \mathfrak{A}_2 = 90^0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99\zeta)$$

Bedeutet für das diesem Gewebe umgeschriebene Polytop P'_2 $W_{p'_2}$ den Neigungswinkel zweier in einer Fläche sich schneidenden Grenzpolyeder, $W_{f'_2}$ den Neigungswinkel zweier benachbarten Seitenflächen und $W_{k'_2}$ den Winkel zweier anstossenden Kanten einer Seitenfläche, so ist:

$$W_{p'_2} = 180^0 - \alpha_2 = 90^0,\ W_{f'_2} = 180^0 - A_2 = 90^0,\ W_{k'_2} = 180^0 - \mathfrak{A}_2 = 90^0 \ldots \quad (99\eta)$$

Das dem Gewebe G''_2 umgeschriebene Polytop ist wiederum ein zu dem zuerst betrachteten P_2 concentrisches reguläres Sechszehnzell; die entsprechenden Werthe für W_{p_2}, W_{f_2}, W_{k_2} folgen analog aus (99 ε):

$$W_{p_2} = 180^0 - \alpha'_2 = 120^0,\ W_{f_2} = 180^0 - A'_2 = 180^0 - 2\eta,\ W_{k_2} = 180^0 - \mathfrak{A}'_2 = 60^0 \ldots \quad (99\vartheta)$$

Die 12 Euklid'schen Räume durch O, welche den sphärischen Raum S'_3 in den 12 Hauptkugeln β' schneiden, bestimmen auf dem concentrischen Raume S_3 (vom Radius $= 1$), welcher das zuerst betrachtete Gewebe enthält, die 12 Hauptkugeln β. Diese 12 Hauptkugeln β erzeugen auf dem concentrischen Raum S_3 ein zu G''_2 concentrisches Gewebe G'_2, welches wir das zu G_2 conjugirte Gewebe nennen wollen. Die Eckpunkte dieses conjugirten Gewebes G'_2 sind die Mittelpunkte der Polyeder des Gewebes G_2, die Kantenmittelpunkte von G'_2 die Flächenmittelpunkte von G_2, indem die Hauptkugeln des conjugirten Gewebes durch die Mittelpunkte der sich in einer Kante schneidenden Polyeder des ersteren Gewebes senkrecht zu diesen Kanten hindurchgehen. Die Beziehung der beiden Gewebe G_2 und G'_2 ist eine gegenseitige, so dass G_2 auch das conjugirte Gewebe zu G'_2 ist, die Eckpunkte von G_2 also auch die Polyedermittelpunkte von G'_2 und die Kantenmittelpunkte von G_2 die Flächenmittelpunkte von G'_2 sind. Dem

[1]) Vgl. E. Hess a. a. O.

Gewebe G_2 ist ein reguläres Polytop P_2 ein- (ein reguläres Polytop P'_2 um-) geschrieben, dem conjugirten Gewebe G'_2 ist ein dem ersteren concentrisches Polytop P_2 um- (ein dem ersteren concentrisches Polytop P'_2 ein-) geschrieben. Beziehungen zwischen den Elementen dieser Polytope sind mit Benutzung der obigen Relationen leicht aufzustellen.

Für die Erkenntniss und, so zu sagen, anschauliche Darstellung der Bewegungen, Spiegelungen und dualistischen Umformungen, durch welche diese regulären Polytope in sich übergehen, sind die gleichzeitige Berücksichtigung der beiden einander conjugirten Zellgewebe G_2 und G'_2 und die durch dieselben bedingten Eintheilungen des sphärischen Raumes S_3 von grosser Wichtigkeit.

4) Die 12 Hauptkugeln β, welche das Gewebe G'_2 erzeugen, halbiren die Winkel und Nebenwinkel je zweier senkrecht auf einander stehenden Hauptkugeln α, welche das Gewebe G_2 erzeugen; sie können als die Projectionen der 12 Seitenflächen $\varepsilon_{13} \dots \varepsilon_{24}$ der drei Fundamentaltetraeder T_4, T_5, T_6 (vgl. § 10 unter (79 ε)) von O auf S_3 aufgefasst werden, während die 16 Schnittpunkte $\mathfrak{c}_1 \dots \mathfrak{c}_8$ und $\mathfrak{c}'_1 \dots \mathfrak{c}'_8$ dieser Hauptkugeln β zu je sechsen als Projectionen den 8 Eckpunkten $\mathfrak{e}_5 \dots \mathfrak{e}_{12}$ der beiden Fundamentaltetraeder T_2, T_3 — für den hier vorausgesetzten Fall der Regelmässigkeit der sphärischen Gebilde — entsprechen.

§ 35.

Vollständige Figur der beiden regulären Gewebe G_2 und G'_2.

1) Der Verein der beiden sphärischen Gewebe G_2 und G'_2 wird durch die vier Hauptkugeln α und die 12 Hauptkugeln β gebildet; diese 16 Hauptkugeln schneiden sich (vgl. § 1):

zu je vieren $(\alpha\alpha\beta\beta)$ in 6 Hauptkreisen e (und e') (entsprechend den 6 Kanten e von T_1),
zu je dreien $(\beta\beta\beta)$ in 16 Hauptkreisen k' (entsprechend den 16 Geraden k'),
zu je zweien $(\beta\beta)$ in 12 Hauptkreisen $e^{(1)}$ (und $e^{(1)'}$) entsprechend den übrigen 12 reellen Geraden e),
zu je zweien $(\alpha\beta)$ in 24 Hauptkreisen d (und d') (entsprechend den Geraden d), (99 ι)

welches alle Schnitthauptkreise der 16 Hauptkugeln sind, da

$$6\cdot\binom{4}{2}+16\binom{3}{2}+12\binom{2}{2}+24\binom{2}{2}=\binom{16}{2}=120 \text{ ist.}$$

Die Schnittpunkte der 16 Hauptkugeln sind:

4 Punkte $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_4$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{a}'_1 \ldots \mathfrak{a}'_4$), entsprechend $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_4$, in denen sich { 3 Hauptkugeln α, 6 " β }

12 Punkte $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_{12}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{b}'_1 \ldots \mathfrak{b}'_{12}$), entsprechend $\mathfrak{e}_{13} \ldots \mathfrak{e}_{24}$, in denen sich { 2 Hauptkugeln α, 3 " β }

16 Punkte $\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_{16}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{d}'_1 \ldots \mathfrak{d}'_{16}$), entsprechend $\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_{16}$, in denen sich { 1 Hauptkugel α, 3 Hauptkugeln β }

8 Punkte $\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_8$ (und Gegenpunkte ($\mathfrak{c}'_1 \ldots \mathfrak{c}'_8$), entsprechend $\mathfrak{e}_5 \ldots \mathfrak{e}_{12}$, in denen sich { 6 Hauptkugeln β vereinigen. } (99ϰ)

Die Summe dieser Schnittpunkte:

$$4\binom{9}{3}+12\binom{5}{3}+16\binom{4}{3}+8\binom{6}{3}=680$$

muss noch, da auf jedem der 6 Hauptkreise e vier Punkte (je zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$), auf jedem der 16 Hauptkreise k' vier Punkte (je ein Punkt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, zwei Punkte $\mathfrak{c}$) liegen, um

$$6\,(4-1)\binom{4}{3}+16\,(4-1)\binom{3}{3}=120$$

vermindert werden, so dass die Anzahl aller Schnittpunkte der 16 Hauptkugeln $560=\binom{16}{3}$ resultirt.

Auf jeder der 4 Hauptkugeln α liegen 3 Hauptkreise e und 6 Hauptkreise d, welche sich in 3 Punkten $\mathfrak{a}$, 4 Punkten $\mathfrak{d}$ und 6 Punkten $\mathfrak{b}$ (und deren Gegenpunkten) schneiden. Vgl. **Fig. 1**, welche eine stereographische Projection[1]) einer Haupthalbkugel α giebt.[2]) Es ist hier:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}=45^0\\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}=\eta,\ \mathfrak{d}\,\mathfrak{b}=90^0-\eta\end{array}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99\lambda)$$

Diese Figur ist genau das durch die (3+6) Symmetrieebenen eines regulären Oktaeders oder Hexaeders auf einer concentrischen Kugelfläche erzeugte sphärische Netz. Durch die vier Hauptkugeln $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ allein wird das reguläre Oktaedernetz auf jeder derselben vermöge der Hauptkreise e er-

1) Eine anschauliche Darstellung der stereographischen Projectionen der regelmässigen Eintheilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes durch die von mir angegebenen Polyeder-Kaleidoscope habe ich kürzlich (Marburger Berichte, Juni 1898) behandelt.

2) Die bei sämmtlichen Figuren (mit Ausnahme von Fig. 8) der 3 Tafeln stehenden kleinen und grossen lateinischen Buchstaben entsprechen bez. den kleinen und grossen deutschen Buchstaben des Textes.

zeugt, dessen Grenzfläche (ein Kugeloktant $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$) auch die Grenzfläche eines sphärischen Tetraeders des Gewebes G_2 ist.

Auf jeder der 12 Hauptkugeln β, welche die Polarhauptkugeln zu den Punkten $\mathfrak{b}$ sind, liegen ein Hauptkreis e, je zwei Hauptkreise $e^{(1)}$ und d, vier Hauptkreise k', welche sich in 3 Punkten $\mathfrak{b}$, 2 Punkten $\mathfrak{a}$ und je 4 Punkten $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}$ (und deren Gegenpunkten) schneiden. Vgl. **Fig. 2**, welche eine stereographische Projection einer Haupthalbkugel β giebt. Hier ist:

$$\left.\begin{array}{r} e = |\,\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\,| \\ e^{(1)} = |\,\mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\,| \\ d = |\,\mathfrak{a}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{d}\,| \\ k' = |\,\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{c}\,| \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{b} = 45^0, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \eta,\ \mathfrak{d}\,\mathfrak{b} = 90^0 - \eta, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = 60^0,\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{d} = 30^0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (99\mu)$$

Das durch die 4 Hauptkreise k' erzeugte (in Fig. 2 schraffirte) sphärische Quadrat $\mathfrak{c}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{c}$ von der Seite 60° und dem Winkel 2η, dessen Kantenmittelpunkte die Punkte $\mathfrak{d}$ sind, ist die Grenzfläche eines sphärischen Hexaeders des Gewebes G'_2. Dieselbe beträgt keinen aliquoten Theil einer Hauptkugelfläche, ebenso wenig wie die Kante $(= 180^0 - 2\eta)$ des sphärischen Hexaeder-Netzes einen aliquoten Theil eines Hauptkreises beträgt.

2) Durch die 4 Hauptkugeln α und die 12 Hauptkugeln β wird der sphärische Raum S_3 in 384 gleiche sphärische Elementartetraeder $\mathfrak{T}_2$ mit je einem Eckpunkt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ getheilt (vgl. **Fig. 3**, welche eine schematische Zeichnung eines solchen Tetraeders darstellt).

Wir wählen als Beispiel das Tetraeder:

mit den Eckpunkten: $\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_7\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1$,

und den Seitenflächen: $\beta_8\ \beta_6\ \alpha_1\ \beta_2$,

und den Kanten:
$$\begin{array}{l} e\ ..\ |\,\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_7\,| = |\,\alpha_1\ \beta_2\,|;\ k'\ ..\ |\,\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1\,| = |\,\beta_8\ \beta_6\,| \\ k'\ ..\ |\,\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{c}_1\,| = |\,\beta_2\ \beta_6\,|;\ d\ ..\ |\,\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{b}_7\,| = |\,\beta_8\ \alpha_1\,| \\ d\ ..\ |\,\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{d}_1\,| = |\,\beta_6\ \alpha_1\,|;\ e_1\ ..\ |\,\mathfrak{b}_7\ \mathfrak{c}_1\,| = |\,\beta_8\ \beta_2\,|, \end{array}$$

für welches die Eckpunkte und Seitenflächen (Hauptkugeln) folgende rechtwinklige Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{a}_2 = (\beta_6\ \alpha_1\ \beta_2)\ \ldots & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ , & \beta_8 = [\mathfrak{b}_7\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1]\ \ldots & 0\ \ -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ 0 \\ \mathfrak{b}_7 = (\alpha_1\ \beta_2\ \beta_8)\ \ldots & 0\ \ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ 0\ , & \beta_6 = [\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{a}_2]\ \ldots & 0\ \ 0\ \ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ \mathfrak{c}_1 = (\beta_2\ \beta_8\ \beta_6)\ \ldots & \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ , & \alpha_1 = [\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_7]\ \ldots & 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ \mathfrak{d}_1 = (\beta_8\ \beta_6\ \alpha_1)\ \ldots & 0\ \ \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \ \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \ \sqrt{\tfrac{1}{3}}, & \beta_2 = [\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_7\ \mathfrak{c}_1]\ \ldots & \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \ 0\ \ 0\ \ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{array}\right\} (99\nu)$$

Die Elemente eines solchen Tetraeders sind in übersichtlicher Zusammenstellung die folgenden:

Centriwinkel einer sphärischen Kante:	Hauptkreis:	Neigungswinkel der Hauptkugeln an dieser Kante:
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_7} = 45^0$	e	$\alpha_1 \widehat{\ } \beta_2 = 45^0$
$\overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1} = 30^0$	k'	$\beta_8 \widehat{\ } \beta_6 = 60^0$
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_1} = 60^0$	k'	$\beta_2 \widehat{\ } \beta_6 = 60^0$
$\overline{\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{b}_7} = 90^0-\eta$	d	$\beta_8 \widehat{\ } \alpha_1 = 90^0$
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{d}_1} = \eta$	d	$\beta_6 \widehat{\ } \alpha_1 = 90^0$
$\overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{c}_1} = 45^0$	$e^{(1)}$	$\beta_8 \widehat{\ } \beta_2 = 90^0$

Neigungswinkel der Hauptkreise:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{d}_1\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{c}_1 = 90^0-\eta & \mathfrak{d}_1\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{c}_1 = 45^0 & \mathfrak{d}_1\,\widehat{\mathfrak{c}_1}\,\mathfrak{b}_7 = \eta & \mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{d}_1}\,\mathfrak{c}_1 = 90^0 \\
\mathfrak{c}_1\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{b}_7 = \eta \quad , & \mathfrak{c}_1\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{a}_2 = 90^0 \, , & \mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{c}_1}\,\mathfrak{a}_2 = \eta \quad , & \mathfrak{c}_1\,\widehat{\mathfrak{d}_1}\,\mathfrak{a}_2 = 90^0 \, . \\
\mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{d}_1 = 45^0 & \mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{d}_1 = 90^0 & \mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{c}_1}\,\mathfrak{d}_1 = 180^0-2\eta & \mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{d}_1}\,\mathfrak{b}_7 = 60^0
\end{array} \qquad (99\zeta)$$

Die Grenzfläche $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1$ tritt auf der Hauptkugel α_2 (vgl. Fig. 1) als der 48te Theil derselben auf, die 3 Grenzflächen $\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{c}_1$ bez. auf den Hauptkugeln β_8, β_6, β_2 (vgl. **Fig.** 2α). (Diese 4 Grenzflächen sind in den Fig. 1 und 2α durch Schraffirung gekennzeichnet.) Die Summe der 4 Grenzflächen eines Elementartetraeders d. h. der Umfang desselben beträgt, wie sich leicht aus den Excessen der 4 Grenzflächen ergiebt, 60^0 d. h. den 12ten Theil einer Hauptkugel. Für die Summe der Umfänge der 4 Grenzdreiecke ergiebt sich 540^0, und für die Summe der Excesse der 4 sphärischen Ecken mit den Scheiteln $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_7$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}_1$, erhält man

$$15^0+45^0+60^0+30^0 = 150^0 \text{ oder } \frac{5}{24} \text{ einer Hauptkugel.}$$

Es existirt aber keine einfache Formel,[1]) aus der sich das Volumen des sphärischen Tetraeders, welches hier $\frac{1}{384}$ des Volumens des sphärischen Raumes S_3 (gleich $2\pi^2$) beträgt, mittelst dieser letzteren Excesse bestimmen lässt.

Zwischen den Hauptkreiswinkeln und den sphärischen Kanten einer Ecke des Tetraeders und ebenso zwischen den Neigungswinkeln der Hauptkugeln und den Hauptkreiswinkeln einer Ecke bestehen dieselben Beziehungen, wie zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Dreiecks.

[1]) Vgl. Hoppe und Hess a. a. O.

Auch bestätigt man leicht an dem hier betrachteten Tetraeder die allgemein für ein sphärisches Tetraeder geltende Beziehung,[1]) nach welcher der Quotient aus dem Produkte der Sinus zweier Gegenkanten und dem Produkte der Sinus der gegenüberliegenden Hauptkugelwinkel gleich dem Quotienten aus der δ-Function (dem Produkte der Sinus zweier Kanten in den Sinus des eingeschlossenen Hauptkreiswinkels) einer Seitenfläche und der d-Function (dem Produkte der Sinus zweier Hauptkugelwinkel in den Sinus des eingeschlossenen Hauptkreiswinkels) der gegenüberliegenden Ecke ist. Dieser Quotient, welchen man als Modulus des sphärischen Tetraeders bezeichnen kann, beträgt für das hier betrachtete Tetraeder

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\eta .$$

3) Um jeden der 8 Punkte $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}')$ liegen 48 Elementartetraeder,
„ „ „ 24 „ $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}')$ „ 16 „ ,
„ „ „ 32 „ $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{d}')$ „ 12 „ ,
„ „ „ 16 „ $\mathfrak{c}\,(\mathfrak{c}')$ „ 24 „ .

Wenn je 24 um einen Punkt $\mathfrak{c}$ herumliegende Elementartetraeder zusammengefasst werden, so resultirt das reguläre Gewebe G'_2, dessen Eckpunkte, Kanten-, Flächen- und Polyeder-Mittelpunkte bezw. die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$ sind.

Durch Zusammenfassen von je 48 um einen Punkt $\mathfrak{a}$ herumliegenden Elementartetraedern wird das conjugirte reguläre Gewebe G'_2 erhalten, dessen Eckpunkte, Kanten-, Flächen-, Polyeder-Mittelpunkte bez. die Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ sind.

Das durch Zusammenfassen von je 16 in einem Punkte $\mathfrak{b}$ zusammenstossenden Tetraedern resultirende reguläre Gewebe G_3 wird nebst dem ihm ein- oder umgeschriebenen regulären Polytope P_3 genauer im Folgenden betrachtet werden (vgl. § 37 ffg.).

Endlich resultirt durch Zusammenfassen von je 12 in einem Punkte $\mathfrak{d}$ zusammenstossenden Elementartetraedern ein festes gleichzelliges Gewebe, welches sich aus 32 congruenten dreiseitigen sphärischen Doppelpyramiden zusammensetzt und dessen Eckpunkte die 8 Punkte $\mathfrak{a}$ und die 16 Punkte $\mathfrak{c}$ sind. Diesem gleichzelligen Gewebe entspricht das zugeordnete

[1]) Hess a. a. O. S. 34.

feste gleicheckige Gewebe, dessen Eckpunkte die 32 Punkte $\mathfrak{d}$ sind, welches von 16 sphärischen regulären Tetraedern und von 8 sphärischen Kubooktaedern begrenzt wird und bei welchem in jeder Ecke sich 3 Kubooktaeder und 2 Tetraeder vereinigen. Die Beschaffenheit des dem ersteren Gewebe umgeschriebenen gleichzelligen und des dem zweiten Gewebe eingeschriebenen gleicheckigen Polytops ist hieraus leicht zu entnehmen.[1])

4) Bei der durch die beiden Gewebe G_2 und G'_2 bestimmten sphärischen Figur sind für die vorliegenden Betrachtungen noch ausserdem einige Punkte, Hauptkreise und Hauptkugeln zu berücksichtigen, welche Projectionen von Punkten, Geraden und Ebenen sind, die bereits früher bei den entsprechenden dreidimensionalen Figuren bestimmt worden sind.

Die reellen Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$ (vergl. § 2 2) und (10γ)) projiciren sich auf den 6 Hauptkreisen e und den 12 Hauptkreisen $e^{(1)}$ als die Halbirungspunkte (und deren Gegenpunkte) der Bogen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, so dass die Centriwinkel der Bogen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{i}_0^{(e)}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{i}_0^{(e)}\mathfrak{c}$ $22^1|_2{}^0$ betragen. Ferner projiciren sich die beiden reellen Punkte $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{i}_0^{(d)}$ (vgl. § 2 und § 3 (12γ)) auf je einer Geraden d auf den 24 Hauptkreisen d als die Halbirungspunkte der Quadranten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}$. Endlich treten auf den 16 Hauptkreisen k' als Halbirungspunkte der Bogen $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ ($= 30^0$) die Projectionen der früher (vgl. § 4 unter 7) und (13ι)) durch $\mathfrak{p}$ bezeichneten Punkte (nebst Gegenpunkten) auf, also auf jedem Hauptkreise k' zwei Punkte $\mathfrak{p}$ (nebst Gegenpunkten). (Vgl. **Fig. 3**α).

Von den Punkten $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und $\mathfrak{d}_0$ liegen je vier (nebst Gegenpunkten) auf einem der Hauptkreise d_0, den Projectionen der früher (vgl. § 2 unter 2)) betrachteten Geraden d_0. Für die sphärischen Gewebe G_2 und G'_2 und die ihnen zugehörigen Polytope kommen nur die 24 reellen Hauptkreise d_0 (und d'_0) in Betracht, welche je vier auf den 12 Hauptkreisen $e^{(1)}$ und $e^{(1)'}$ liegende Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ (nebst Gegenpunkten) und je vier auf den 24 Hauptkreisen d und d' liegende Punkt $\mathfrak{d}_0$ (nebst Gegenpunkten) verbinden. Jeder Hauptkreis wird so durch die abwechselnd auf einander folgenden Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und $\mathfrak{d}_0$ in 16 gleiche Bogen ($= 22^1|_2{}^0$) getheilt, so dass jedem der 384 Elementartetraeder ein solcher Bogen zukommt, welcher die Gegenkanten $e^{(1)}$

[1]) Vgl. hierüber sowie über die Herleitung der sämmtlichen hierhergehörigen gleicheckigen und gleichzelligen Polytope: E. Hess: Ueber regelmässige Eintheilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. Marburger Ber. 1895. S. 29—50.

und d, und zwar rechtwinklig, schneidet. Je zwei Hauptkreise d_0, welche zugleich vier Hauptkreise $e^{(1)}$ und vier Hauptkreise d senkrecht schneiden, sind reciproke Polaren (vgl. § 26 unter 3)). Durch jeden der hier in Betracht kommenden Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und $\mathfrak{d}_0$ gehen zwei der 24 Hauptkreise d_0 hindurch.

§ 36.

Transformationen der beiden regulären Gewebe G_2 und G'_2 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst.

Die Gesammtheit der Transformationen, durch welche die beiden regulären sphärischen Gewebe G_2 und G'_2 und die ihnen zugehörigen regelmässigen (und auch die zum Theil regelmässigen) Polytope in sich übergehen, ergiebt sich sofort aus den Substitutionen der in § 23 II) betrachteten Gruppe $G_{384}^{(1)}$ (bez. $G_{192}^{(1)e}$), wenn der in § 27 ffg. erläuterte Process der Uebertragung aus dem Raume R_3 in den sphärischen Raum S_3 vorgenommen wird, wodurch die Zahl der Collineationen und der Correlationen sich verdoppelt.

Die unter 1), 2a), 3a); 6a), 6d), 7a) der Tabelle $G_{2304}^{(1)}$ in § 23 unter II) aufgeführten Substitutionen ergeben die im Folgenden übersichtlich zusammengestellten Transformationen. Aus den aufgeführten Punkten, Hauptkreisen, Hauptkugeln u. s. w., welche die einzelnen Bewegungen, Spiegelungen und dualistischen Umformungen charakterisiren, können die entsprechenden Geraden, Ebenen, Euklid'schen Räume u. s. w. des R_4 für die ein- oder umgeschriebenen Polytope mit Benutzung der in § 33 gegebenen Regeln leicht entnommen werden. Die bezüglichen Substitutionen in orthogonalen Coordinaten sind im Anschluss an die früheren Bezeichnungen durch je ein Beispiel erläutert.[1]) Die vorgesetzten Nummern entsprechen denjenigen der Tabelle $G_{2304}^{(1)}$ in § 23 II).

A) Bewegungen (zwei- oder vierfache Spiegelungen), den eigentlich orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten, entsprechend.

[1]) Vgl. auch S. L. van Oss: Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen. Inaug.-Diss. Giessen 1894.

1) α_1) Identische Transformation: $S = [1\ 2\ 3\ 4]_1$, (vergl. § 28 (96σ) und § 11 (80α, β));

1) α_2) Inversion (Spiegelung am Mittelpunkt O), $S = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$, (vgl. § 28 (96a)).

1) β_1) 9 Umwendungen um je einen der 9 Hauptkreise e und $e^{(1)}$, z. B. $S = [1\ 2\ -3\ -4]_1$, (vgl. § 28 (96τ), (96ω) und § 11 (80γ));

1) β_2) 9 Umwendungen um je einen der 9 Hauptkreise e' und $e^{(1)'}$, z. B. $S = [-1\ -2\ 3\ 4]_1$, (vgl. § 28 (96τ), (96ω) und § 11 (80γ).

1) γ_1) und 1) γ_2) $2 \cdot 6 = 12$ 4zählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der reellen Schraubenaxen eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise zwei der 12 imaginären sich selbst conjugirten Hauptkreise $e^{(2)}$ sind;

$$S = e_{(90^0)}\, e'_{(\pm 90^0)} = d_{0(90^0)}\, d'_{0(\pm 90^0)} = h_{(90^0)}\, h'_{(\pm 90^0)}\,^{1)} \ldots;$$

$$\text{z. B. } S = [2\ -1\ 4\ -3]_1 = e_{(90^0)}\, e'_{(90^0)} = d_{0(90^0)}\, d'_{0(-90^0)} = h_{(90^0)}\, h'_{(90^0)} = \ldots,$$

$$S^3 = [-2\ 1\ -4\ 3]_1 = e_{(-90^0)}\, e'_{(-90^0)} = d_{0(-90^0)}\, d'_{0(90^0)} = h_{(-90^0)}\, h'_{(-90^0)} = \ldots$$

$S^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (Inversion). Die imaginären Leithauptkreise sind die beiden Hauptkreise $e^{(2)}$, deren $\mathfrak{x}_i$-Coordinaten $0\ 0\ 1\ 0\ \pm i\ 0$ sind. (Vgl. § 28 unter d)) und § 11 (80δ)).

2) α_1) $2 \cdot 16 = 32$ dreizählige einfache Drehungen um je einen der 16 Hauptkreise k' (alle Punkte von k' und die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{k}_0$ der reciproken Polare k bleiben fest), z. B.

$$S = [1\ 3\ 4\ 2]_1 = k'_{(120^0)},\ S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1 = k'_{(-120^0)}.$$

Vgl. § 28 unter c) α), Formeln (96π) und (96ϱ) und § 14 (83α).

2) α_2) $2 \cdot 16 = 32$ besondere sechszählige Doppeldrehungen (Drehung nebst Umwendung), nämlich Drehung von 60^0 oder -60^0 um k' und Umwendung um k. Z. B.

$$S = [-1\ -4\ -2\ -3]_1 = k'_{(60^0)}\, k_{(180^0)},\ S^5 = [-1\ -3\ -4\ -2]_1 = k'_{(-60^0)}\, k_{(180^0)}.$$

S^2 und S^4 sind die dreizähligen einfachen Drehungen 2α_1), S_3 die Inversion. Vgl. § 28 unter c) β) Formeln (96χ) und § 14 (83α).

3) α_1) 12 Umwendungen um je einen der 12 Hauptkreise d, z. B.

$$S = [-1\ 2\ 4\ 3]_1.$$

Vgl. § 28 (96τ), (96ω) und § 13 (82α).

1) Die den beiden Schraubenaxen einer Doppeldrehung als Indices beigefügten Winkel bedeuten die Amplituden der zugehörigen Drehungen.

3) α_2) 12 Umwendungen um je einen der 12 Hauptkreise d', z. B.

$$S = [1\ -2\ -4\ -3]_1$$

Vgl. § 28 (96τ), (96ω) und § 13 (82α).

3) β_1) 2 . 6 = 12 vierzählige einfache Drehungen um je einen der 6 Hauptkreise e und e'; z. B.

$$S = [1\ 2\ -4\ 3]_1 = e_{(90^0)},\quad S^3 = [1\ 2\ 4\ -3] = e_{(-90^0)}.$$

$S^2 = e_{(180^0)}$ ist die Umwendung um e. Vgl. § 28 cα) und § 13 (82β).

3) β_2) 2 . 6 = 12 besondere vierzählige Doppeldrehungen, nämlich Drehung von 90° oder —90° um e (e') und Umwendung um e' (e).

Z. B. $S = [-1\ -2\ 4\ -3]_1 = e_{(90^0)}\, e'_{(180^0)}$, $S^3 = [-1\ -2\ -4\ 3]_1 = e_{(-90^0)}\, e'_{(180^0)}$.

$S^2 = e_{(180^0)}$ ist die Umwendung um e. Vgl. § 28 cβ).

3) γ_1) und 3) γ_2) 4 . 12 = 48 allgemeine achtzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen einer der 12 Hauptkreise d_0 und dessen reciproke Polare d'_0 ist: $S = d_{0(45^0)}\, d'_{0(135^0)}$ oder $d_{0(45^0)}\, d'_{0(-135^0)}$. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders, dessen Eckpunkte 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(d)}$, dessen Hauptkugeln 4 imaginäre Hauptkugeln $\iota_0^{(e)} = \varphi_0^{(d)}$ und dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen d_0, d'_0 je ein imaginäres Hauptkreispaar d und $e_1^{(2)}$ sind, entsprechen genau den früher (§ 8 C I unter 2) (30γ) und (30δ) angegebenen.

Z. B. $S = [3\ 4\ -2\ 1]_1 = d'_{0(45^0)}\, d_{0(135^0)}$, $S^3 = [-4\ 3\ -1\ -2]_1 = d'_{0(135^0)}\, d_{0(45^0)}$ ⎫ Vgl. § 13
$S^5 = [-3\ -4\ 2\ -1]_1 = d'_{0(-135^0)}\, d_{0(-45^0)}$, $S^7 = [4\ -3\ 1\ 2]_1 = d'_{0(-45^0)}\, d_{0(-135^0)}$ ⎭ (82γ);
$S^2 = [-2\ 1\ -4\ 3]_1 = d'_{0(90^0)}\, d_{0(-90^0)}$ und $S^6 = [2\ -1\ 4\ -3]_1 = d'_{0(-90^0)}\, d_{0(90^0)}$ bedeuten die unter 1γ_1), 1γ_2) betrachteten vierzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz bilden, $S^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ bedeutet die Inversion.

Damit sind die 192 Bewegungen, welche die Gewebe G_2 und G'_2 in sich überführen, sämmtlich aufgestellt.[1])

B) Ein- oder dreifache Spiegelungen, den uneigentlich orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten, entsprechend.

6) $\alpha_1^{(1)}$) 4 einfache Spiegelungen an je einer der Hauptkugeln $\alpha_1 \ldots \alpha_4$, z. B. $S = [-1\ 2\ 3\ 4]_1 = |\,\alpha_1\,|$ (vgl. § 29 aα).

[1]) Vgl. S. L. van Oss: A. a. O. Hier sind die 192 Bewegungen auf anderem Wege hergeleitet, während die Spiegelungen und Correlationen nicht berücksichtigt werden.

6) $\alpha_1^{(2)}$) 12 einfache Spiegelungen an je einer der Hauptkugeln $\beta_1 \ldots \beta_{12}$, z. B. $S = [1\ 2\ 4\ 3]_1 = |\ \beta_1\ |$ (vgl. § 29 aα).

6) $\alpha_2^{(1)}$) 4 Inversionsspiegelungen (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln) durch $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_4$, z. B. $S = [1\ -2\ -3\ -4]_1$ (durch $\mathfrak{a}_1$) (vgl. § 29 aβ).

6) $\alpha_2^{(2)}$) 12 Inversionsspiegelungen durch $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_{12}$, z. B. $S = [-1\ -2\ -4\ -3]_1$ (durch $\mathfrak{b}_1$) (vgl. § 29 aβ).

6) $\beta_1^{(1)}$) 12 vierzählige Drehspiegelungen (dreifache Spiegelungen) (vgl. § 29 b).

Von den beiden Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche auf einem der 6 Hauptkreise e (e'), der Axe der 90^0 betragenden Drehung, liegen, bleibt $\mathfrak{b}_i$ fest, $\mathfrak{b}_k$ geht in den Gegenpunkt über, die durch die reciproke Polare e' (e), deren imaginäre unendlich ferne Punkte $\mathfrak{b}_l$, $\mathfrak{b}_m$ fest bleiben, gehende Hauptkugel (die Spiegelhauptkugel) β_k bleibt fest, β_i vertauscht die Innen- mit der Aussenseite. Die Elemente des entsprechenden Tetraeders, dessen Eckpunkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ und die imaginären unendlich fernen Punkte $\mathfrak{b}_l$, $\mathfrak{b}_m$ der reciproken Polaren sind, wurden in § 8 unter (31γ), (31δ) angegeben.

$$\text{Z. B. } S = [-2\ 1\ 4\ 3]_1 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)}\ |\ \beta_k\ |$$
$$S^3 = [2\ -1\ 4\ 3]_1 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)}\ |\ \beta_k\ |$$

$$\begin{array}{l|l}
\mathfrak{b}_i \ldots 0\quad 0\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \beta_i & \mathfrak{b}_l \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{i}{\sqrt{2}}\quad 0\quad 0 \ldots \beta_m \\
\mathfrak{b}_k \ldots 0\quad 0\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \beta_k & \mathfrak{b}_m \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{-i}{\sqrt{2}}\quad 0\quad 0 \ldots \beta_l
\end{array}$$

$$(\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k) = e = (12) \qquad , \qquad (\mathfrak{b}_l\ \mathfrak{b}_m) = e' = (12)';$$

$S^2 = [-1\ -2\ 3\ 4]_1 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(180^0)}$ ist die Umwendung um die Axe.

6) $\beta_2^{(1)}$) 12 vierzählige Drehspiegelungen. Die beiden Punkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ und die beiden Hauptkugeln β_k, β_i in 6$\beta_1^{(1)}$) vertauschen sich, so dass $\mathfrak{b}_k$ fest bleibt, $\mathfrak{b}_i$ in den Gegenpunkt übergeht und β_i die spiegelnde Hauptkugel ist.

$$\text{Z. B. } S = [2\ -1\ -4\ -3]_1 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)}\ |\ \beta_i\ |$$
$$S^3 = [-2\ 1\ -4\ -3]_1 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)}\ |\ \beta_i\ |,$$

S^2 stimmt mit demjenigen in 6$\beta_1^{(1)}$) überein.

6) $\beta_1^{(2)}$) 12+24 = 36 vierzählige Drehspiegelungen. Die Beschaffenheit dieser Drehspiegelungen ist dieselbe, wie unter 6$\beta_1^{(1)}$); für die erste

Gruppe von 12 Drehspiegelungen bleibt von den beiden Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_k$ eines Hauptkreises e (e') $\mathfrak{a}_i$ fest, $\mathfrak{a}_k$ geht in den Gegenpunkt über und α_k ist die festbleibende Spiegelhauptkugel, für die zweite Gruppe von 24 Drehspiegelungen bleibt von den beiden Punkten $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_k$ eines Hauptkreises $e^{(1)}(e^{(1)'})$ $\mathfrak{c}_i$ fest, $\mathfrak{c}_k$ geht in den Gegenpunkt über und γ_k (die Polarhauptkugel zu $\mathfrak{c}_k$) ist die festbleibende Spiegelhauptkugel.

$$\text{Z. B.} \left\{ \begin{array}{l} S \;\;= [1\ {-2}\ 4\ {-3}]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k)_{(90^0)} \mid \alpha_k \mid, \\ S^3 = [1\ {-2}\ {-4}\ 3]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k)_{(-90^0)} \mid \alpha_k \mid \end{array} \right\}$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{a}_i \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \alpha_i \\ \mathfrak{a}_k \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ldots \alpha_k \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{b}_l \ldots 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \beta_m \\ \mathfrak{b}_m \ldots 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-i}{\sqrt{2}} \ldots \beta_l \end{array} \right|$$

$$(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k) = e = (12) \qquad\qquad (\mathfrak{b}_l\ \mathfrak{b}_m) = e' = (12)',$$

$S^2 = [1\ 2\ {-3}\ {-4}]_1$ ist die Umwendung um die Axe $e = (\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2)$;

$$\text{und} \left\{ \begin{array}{l} S \;\;= [-3\ 4\ 2\ {-1}]_1 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k)_{(90^0)} \mid \gamma_k \mid \\ S^3 = [-4\ 3\ {-1}\ 2]_1 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k)_{(-90^0)} \mid \gamma_k \mid, \end{array} \right.$$

$$S^2 = [-2\ {-1}\ 4\ 3]_1 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k)_{(180^0)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{c}_i \ldots -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \ldots \gamma_i \\ \mathfrak{c}_k \ldots \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \ldots \gamma_k \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{c}_l \ldots \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{i}{2} \quad \frac{i}{2} \ldots \gamma_m \\ \mathfrak{c}_m \ldots \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{i}{2} \quad -\frac{i}{2} \ldots \gamma_l \end{array} \right|$$

$$(\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k) = e = (36) \qquad\qquad (\mathfrak{c}_l\ \mathfrak{c}_m) = e' = (36)'.$$

$6\,\beta_2^{(2)}$) $12 + 24 = 36$ vierzählige Drehspiegelungen. Bei der ersten Gruppe bleibt $\mathfrak{a}_k$ fest, $\mathfrak{a}_i$ geht in den Gegenpunkt über und α_i ist die Spiegelhauptkugel, bei der zweiten Gruppe bleibt $\mathfrak{c}_k$ fest, $\mathfrak{c}_i$ geht in den Gegenpunkt über und γ_i ist die Spiegelhauptkugel.

$$\text{Z. B.} \left\{ \begin{array}{l} S \;\;= [-1\ 2\ {-4}\ 3]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k)_{(-90^0)} \mid \alpha_i \mid \\ S^3 = [-1\ 2\ 4\ {-3}]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k)_{(90^0)} \mid \alpha_i \mid \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_k \text{ und } S^2 \text{ wie} \\ \text{unter } 6\,\beta_1^{(2)}); \end{array}$$

$$\text{und} \left\{ \begin{array}{l} S \;\;= [3\ {-4}\ {-2}\ 1]_1 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k)_{(-90^0)} \mid \gamma_i \mid \\ S^3 = [4\ {-3}\ 1\ {-2}]_1 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{c}_k)_{(90^0)} \mid \gamma_i \mid \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \mathfrak{c}_i,\ \mathfrak{c}_k \text{ und } S^2 \text{ wie} \\ \text{unter } 6\,\beta_1^{(2)}). \end{array}$$

Die sämmtlichen vierzähligen Drehspiegelungen, welche oben durch Drehung um eine Axe von der Amplitude 90^0 und Spiegelung an der zu der Axe normalen Hauptkugel dargestellt sind, lassen sich auch auf unzählige Arten durch drei aufeinanderfolgende einfache Spiegelungen an drei sich in dem festbleibenden Punkte schneidenden Hauptkugeln erzeugen.

Die dreiflächige sphärische Ecke muss nur der Bedingung entsprechen, dass das Produkt der Sinus zweier Hauptkugelwinkel in den Sinus des eingeschlossenen Hauptkreiswinkels einen constanten Werth, welcher hier $= \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, besitzt. Dieser Bedingung wird durch eine sphärische Ecke, bei welcher zwei Hauptkugelwinkel 90^0 sind, der dritte 45^0 beträgt, genügt oder auch durch eine sphärische Ecke, deren Hauptkugelwinkel 90^0, 60^0, 60^0 sind, während die gegenüberliegenden Hauptkreiswinkel $180^0 - 2\eta$, η, η betragen. Diese letztere Darstellung ist für die Drehspiegelungen der zweiten Gruppe in $6\beta_1^{(2)}$) und $6\beta_2^{(2)}$) desshalb von Wichtigkeit, weil die oben benutzten Spiegelhauptkugeln γ_i und γ_k von vorneherein in der Figur der Gewebe G_2 und G'_2 nicht auftreten, während die drei Hauptkugeln, welche die angegebene sphärische Ecke bilden, durch drei sich in $\mathfrak{c}_i$ oder $\mathfrak{c}_k$ schneidende Hauptkugeln β repräsentirt sind.

$7\alpha_1$) $2 \,.\, 16 = 32$ sechszählige Drehspiegelungen. Von den beiden Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{d}_l$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $l = 1, 2 \ldots, 16$), welche auf einem der 16 Hauptkreise k', der Axe der 120^0 betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{d}_l$ fest, $\mathfrak{a}_i$ geht in den Gegenpunkt über, die Spiegelhauptkugel α_i, welche durch die reciproke Polare k, deren imaginäre unendlich ferne Punkte $\mathfrak{k}_0$ fest bleiben, hindurchgeht, bleibt fest, während bei δ_l die Innen- mit der Aussenseite vertauscht wird. Erzeugt man eine solche sechszählige Drehspiegelung durch drei aufeinander folgende einfache Spiegelungen, so bietet sich als sphärische Ecke mit dem Scheitelpunkt $\mathfrak{d}_l$ z. B. eine solche dar, deren Hauptkugeln zwei Hauptkugeln β und die Hauptkugel α_i sind, welche auf den ersteren senkrecht steht, während der Neigungswinkel derselben 60^0 beträgt. Das Produkt aus den Sinus zweier Hauptkugelwinkel in den Sinus des eingeschlossenen Hauptkreiswinkels erhält für jede solche sphärische Ecke den Werth $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{Z. B.} \begin{cases} S = [-1\ 3\ 4\ 2]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{d}_l)_{(120^0)} \mid \alpha_i \mid \\ S^5 = [-1\ 4\ 2\ 3]_1 = (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{d}_l)_{(-120^0)} \mid \alpha_i \mid \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l}
\mathfrak{a}_i \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \alpha_i & \mathfrak{k}_0^{(1)} \ldots 0 \quad 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \ldots \varkappa_0^{(2)} \\
\mathfrak{d}_l \ldots 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots \delta_i & \mathfrak{k}_0^{(2)} \ldots 0 \quad 1 \quad \alpha^2 \quad \alpha \ldots \varkappa_0^{(1)} \\
(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{d}_l) = k' \ldots \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & (\mathfrak{k}_0^{(1)} \mathfrak{k}_0^{(2)}) = k \ldots \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.
\end{array}$$

$S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1 = k'_{(-120^0)}$ und $S^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1 = k'_{(120^0)}$ sind die einfachen dreizähligen Drehungen um k' (vgl. unter A), $2\alpha_1$)) $S^3 = [-1\ 2\ 3\ 4]_1 = |\alpha_1|$ die einfache Spiegelung an α_1 (vgl. unter B) $6\alpha_1^{(1)}$).

$7\alpha_2$) 2 . 16 = 32 sechszählige Drehspiegelungen. Es bleibt $\mathfrak{a}_i$ fest, während $\mathfrak{b}_l$ in den Gegenpunkt übergeht, δ_l (die Polarhauptkugel zu $\mathfrak{b}_l$) ist die Spiegelhauptkugel, die Drehung um die Axe k' beträgt 60^0 (bezw. -60^0). Als sphärische Ecke für die dreifache Spiegelung bietet sich eine solche mit dem Scheitelpunkt $\mathfrak{a}_i$, zwei Hauptkugeln β und einer Hauptkugel α dar, für welche die Hauptkugelwinkel 90^0, 45^0, 60^0, die gegenüberliegenden Hauptkreiswinkel η, $90^0 - \eta$, 45^0 betragen, so dass das constante Produkt den Werth $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ erhält.

$$\text{z. B.} \left\{ \begin{array}{l} S\ = [1\ -3\ -4\ -2]_1 = k'_{(-60^0)}\,|\delta_l| \\ S^5 = [1\ -4\ -2\ -3]_1 = k'_{(60^0)}\,|\delta_l| \end{array} \right\} \text{(vgl. unter } 7\alpha_1\text{).}$$

S^2 und S^4 sind wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um k', dagegen ist $S^3 = [1\ -2\ -3\ -4]_1 = k'_{(180^0)}\,|\delta_l|$ die Inversionsspiegelung (vgl. unter $6\alpha_2^{(1)}$).

Damit sind auch die 192 ein- und dreifachen Spiegelungen, durch welche die Gewebe G_2 und G'_2 in sich übergehen, vollständig aufgestellt.

A') Correlationen, den eigentlich orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend.

$1\alpha_1'$) Die Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}\infty$:
$S' = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$ (oder $S' = [\underline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$);
$1\alpha_2'$) Die inverse Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}\infty$:
$S' = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1$ [1]).
} vgl. § 31 unter 1).

$1\beta_1'$) 9 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die Projectionen der Flächen zweiter Ordnung $F_2^{(1)} \ldots F_{10}^{(1)}$ auf S_3, z. B. $S' = [\overline{1\ 2\ -3\ -4}]_1$ in Bezug auf $\mathfrak{F}_2^{(1)}$;
$1\beta_2'$) 9 inverse eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf dieselben sphärischen Flächen, z. B. $S' = [\overline{-1\ -2\ 3\ 4}]_1$ in Bezug auf $\mathfrak{F}_2^{(1)}$.
} vergl. § 31 unter 2).

1) Es möge genügen, eine Correlation durch eine der beiden Darstellungen zu charakterisiren.

$1\gamma'_1$) und $1\gamma'_2$) 2 . 6 = 12 vierzählige Null-Correlationen, deren zugehöriger sphärischer (mit seinem polaren zusammenfallender) Complex je einer der 6 sphärischen Fundamental-Complexe $\mathfrak{x}_i = 0$ ist (vgl. § 31 unter 3)).

z. B. $\left\{ \begin{array}{l} S' = [\overline{2\ -1\ 4\ -3}]_1 \\ S'^3 = [\overline{-2\ 1\ -4\ 3}]_1 \end{array} \right\}$ in Bezug auf $\mathfrak{x}_1 = 0$,

$S'^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ bedeutet die Inversion.

$2\alpha'_1$) 2 . 16 = 32 sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{k}_{(0)}$ und $\mathfrak{k}_0$ von k und k' zu Eckpunkten hat (vgl. § 8 III unter (49η) und (49ϑ)). Die geraden Potenzen von S' bedeuten die einfachen dreizähligen Drehungen um k' (vgl. unter $2\alpha_1$), S'^3 bedeutet die Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 31 unter 4a)).

z. B. $S' = [\overline{1\ 3\ 4\ 2}]_1$, $S'^5 = [\overline{1\ 4\ 2\ 3}]_1$;
$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1$, $S'^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1$; $S'^3 = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$.

$2\alpha'^2$) 2 . 16 = 32 sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bez. dasselbe, wie unter $2\alpha'_1$) ist; S'^2 und S'^4 bedeuten wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um k', dagegen S'^3 die inverse Polarreciprocität $1\alpha'_2$).

z. B. $S' = [\overline{-1\ -3\ -4\ -2}]_1$, $S'^5 = [\overline{-1\ -4\ -2\ -3}]_1$;
$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1$, $S'^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1$, $S'^3 = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1$.

$3\alpha'_1$) 12 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die sphärischen Flächen $\mathfrak{F}^{(4)}$ z. B. $S' = [\overline{-1\ 2\ 4\ 3}]_1$;
$3\alpha'_2$) 12 eigentliche inverse Polar-Correlationen in Bezug auf die sphärischen Flächen $\mathfrak{F}^{(4)}$ z. B. $S' = [\overline{1\ -2\ -4\ -3}]_1$;
(vergl. § 31 unter 2).)

$3\beta'_1$) 2 . 6 = 12 vierzählige Axencorrelationen der ersten Art mit reellem Axenpaar e (e'). Es bleiben die Hauptkreise der beiden sphärischen Strahlbüschel ($\mathfrak{a}_i$, α_k) und ($\mathfrak{a}_k$, α_i) fest. S'^2 bedeutet die Umwendung um die Axe e. (Vgl. § 31 unter 4 a α)).

z. B. $S' = [\overline{1\ 2\ -4\ 3}]_1$, $S'^3 = [\overline{1\ 2\ 4\ -3}]_1$; $S'^2 = e_{(180^0)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{a}_i \ldots 0\ 0\ 1\ 0 \ldots \alpha_i \\ \mathfrak{a}_k \ldots 0\ 0\ 0\ 1 \ldots \alpha_k; \end{array} \right.$

$3\beta'_2$) 2 . 6 = 12 inverse vierzählige Axencorrelationen der ersten Art (vgl. § 31 unter 4 a β)).

z. B. $S' = [\overline{-1\ -2\ 4\ -3}]_1$, $S'^3 = [\overline{-1\ -2\ -4\ 3}]_1$; S'^2 und $\mathfrak{a}_i$, α_i; $\mathfrak{a}_k$, α_k wie unter $3\beta'_1$).

$3\gamma'_1$) und $3\gamma'_2$) $4 \,.\, 12 = 48$ achtzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{F}^{(3)}$ (vgl. § 31 unter $6\,a$)). S'^2 und S'^6 bedeuten wie unter $3\gamma_1$), $3\gamma_2$) die vierzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz bilden (vgl. $1\gamma_1$), $1\gamma_2$)). S'^4 bedeutet die Inversion.

Z. B. $S' = [\overline{3\ 4\ -2\ 1}]_1$, $S'^3 = [\overline{-4\ 3\ -1\ -2}]_1$, $S'^5 = [\overline{-3\ -4\ 2\ -1}]_1$, $S'^7 = [\overline{4\ -3\ 1\ 2}]_1$. Die festbleibenden Leithauptkreise der beiden speciellen Complexe und zugleich der linearen Congruenz für S'^2 und S'^6 sind die beiden imaginären Hauptkreise $e^{(2)}$ mit den $\mathfrak{x}_i$-Coordinaten: $0\ 0\ 1\ 0\ \pm i\ 0$.

Damit sind die 192 eigentlichen Correlationen, durch welche die Gewebe G_2 und G'_2 in sich übergehen, vollständig aufgestellt.

B') Correlationen, den uneigentlich orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend.

$6\alpha_1^{(1)\prime}$) 4 uneigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die Projectionen $\mathfrak{F}^{(2)}$ der vier Flächen $F^{(2)}$ (§ 7 unter 2)), welche das Fundamentaltetraeder T_1 als Polartetraeder gemein haben, auf S_3; jede dieser Flächen erzeugt eine bestimmte Kleinkugel (nebst Gegenkugel) (vgl. § 32 unter 1)).

Z. B. $S' = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1$, $F_1^{(2)} \ldots -z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + z_4{}^2 = 0$.

$6\alpha_1^{(2)\prime}$) 12 uneigentliche Polar-Correlationen; die zugehörigen Flächen $F^{(2)}$ haben zu je vier die Fundamentaltetraeder T_4, T_5, T_6 als Polartetraeder gemein.

Z. B. $S' = [\overline{1\ 2\ 4\ 3}]_1$, $F^{(2)} \ldots z_1{}^2 + z_2{}^2 + 2\,z_3\,z_4 = 0$.

$6\alpha_2^{(1)\prime}$) 4 inverse uneigentliche Polar-Correlationen;
z. B. $S' = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_1$; Flächen wie unter $6\alpha_1^{(1)\prime}$.

$6\alpha_2^{(2)\prime}$) 12 inverse uneigentliche Polar-Correlationen;
z. B. $S' = [\overline{-1\ -2\ -4\ -3}]_1$, Flächen wie unter $6\alpha_1^{(2)\prime}$.

$6\beta_1^{(1)\prime}$) 12 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art mit reellem Axenpaar e (e') (vergl. § 32 unter $2\,a$)). Die Mittelpunkte der festbleibenden sphärischen Strahlbüschel sind zwei Punkte $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_k$, welche bez. um Achtelskreise von den Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ (vgl. $6\beta_1^{(1)}$) abstehen.

Z. B. $S' = [\overline{-2\ 1\ 4\ 3}]_1$, $S'^3 = [\overline{2\ -1\ 4\ 3}]_1$ $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}_i \ldots 0\ 0\ 1\ 0 \ldots \alpha_i \\ \mathfrak{a}_k \ldots 0\ 0\ 0\ 1 \ldots \alpha_k \end{matrix}\right\}$,

$S'^2 = [-1\ -2\ 3\ 4]_1$ ist die Umwendung um die Axe $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k)$.

$6\beta_2^{(1)\prime}$) 12 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art. Dieselben sind die inversen der unter $6\beta_1^{(1)\prime}$), insofern die Gegenpunkte $\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{a}'_k$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln α_i, α_k auftreten.

Z. B. $S' = [\overline{2\ {-1}\ {-4}\ {-3}}]_1$, $S'^3 = [\overline{-2\ 1\ {-4}\ {-3}}]_1$.

$6\beta_1^{(2)\prime}$) 12+24 = 36 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art. Für die erste Gruppe von 12 Correlationen mit Axenpaar e (e') sind je zwei Punkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$, für die zweite Gruppe von 24 Correlationen mit Axenpaar $e^{(1)}$ ($e^{(1)\prime}$) je zwei Punkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche von den Punkten $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_k$ bez. um einen Achtelskreis abstehen, die Mittelpunkte der festbleibenden sphärischen Strahlbüschel.

Z. B. $S' = [\overline{1\ {-2}\ 4\ {-3}}]_1$, $S'^3 = [\overline{1\ {-2}\ {-4}\ 3}]_1$ $\left\{\begin{vmatrix} \mathfrak{b}_i \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \ldots \beta_i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_k \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \ldots \beta_k \end{vmatrix}\right.$

$S'^2 = [1\ 2\ {-3}\ {-4}]_1$, Umwendung um ($\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k$);

und $S' = [\overline{-3\ 4\ 2\ {-1}}]_1$, $S'^3 = [\overline{-4\ 3\ {-1}\ 2}]_1$ $\left\{\begin{vmatrix} \mathfrak{b}_i \ldots 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \beta_i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_k \ldots 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \beta_k \end{vmatrix}\right.$

$S'^2 = [-2\ {-1}\ 4\ 3]_1$, Umwendung um ($\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k$).

$6\beta_2^{(2)\prime}$) 12+24 = 36 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art, nämlich die inversen derjenigen unter $6\beta_1^{(2)\prime}$).

Z. B. $S' = [\overline{-1\ 2\ {-4}\ 3}]_1$, $S'^3 = [\overline{-1\ 2\ 4\ {-3}}]_1$
und $S' = [\overline{3\ {-4}\ {-2}\ 1}]_1$, $S'^3 = [\overline{4\ {-3}\ 1\ {-2}}]_1$ } $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ und S'^2 wie oben.

$7\alpha'_1$) 2 . 16 = 32 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen. Die beiden imaginären Eckpunkte (und Hauptkugeln) des Haupttetraeders sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung (vgl. $7\alpha_1$)), nämlich 2 Punkte $\mathfrak{k}_0$ (2 Hauptkugeln $\varkappa_0$) auf k, dagegen stehen die beiden reellen Eckpunkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ von denjenigen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_l$ um je einen Achtelskreis ab (vgl. § 32 unter 2b)). Die Elemente des entsprechenden Haupttetraeders sind bereits früher § 8 unter (50ζ), (50η) angegeben worden.

Z. B. $S' = [\overline{-1\ 3\ 4\ 2}]_1$, $S'^5 = [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_1$.

$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1$ und $S'^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1$ sind die dreizähligen einfachen Drehungen $k'_{(-120^0)}$ und $k'_{(120^0)}$, $S'^3 = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_1$ ist die Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ (vgl. $6\alpha_1^{(1)\prime}$); $F_1^{(2)} \ldots -z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 = 0$.

$7\alpha'_2$) 2 . 16 = 32 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen, nämlich die inversen derjenigen unter $7\alpha'_1$).

Z. B. $S' = [\overline{1\ -3\ -4\ -2}]_1$ $S'^5 = [\overline{1\ -4\ -2\ -3}]$; S'^2 und S'^4 sind dieselben, wie unter $7\alpha'_1$), dagegen bedeutet $S'^3 = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_1$ die inverse Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ (vgl. $6\,\alpha_2^{(1)'}$).

Damit sind endlich auch die 192 uneigentlichen Correlationen, durch welche die Gewebe G_2 und G'_2 in sich übergehen, vollständig angegeben.

Die eigentlichen und uneigentlichen Collineationen und Correlationen, durch welche die diesen Geweben ein- und umgeschriebenen Polytope P_2 und P_2' in sich übergehen, sind damit unmittelbar gegeben (vgl. § 33).

§ 37.

Sphärisches Zellgewebe G_3 des regulären Vierundzwanzigzells und das ihm conjugirte G'_3.

1) Das sphärische Gewebe G_3, welchem ein reguläres Vierundzwanzigzell (Ikositetratop) sowohl ein- als umgeschrieben ist, entsteht, wie bereits in § 35 unter 3) bemerkt wurde, durch Zusammenfassen von je 16 in einem Punkte $\mathfrak{b}$ zusammenstossenden Elementartetraedern. Dasselbe setzt sich aus 24 regulären sphärischen Oktaedern zusammen mit je zwei gegenüberliegenden Eckpunkten $\mathfrak{a}$ und 4 Eckpunkten $\mathfrak{c}$, während die 32 Punkte $\mathfrak{d}$ die Mittelpunkte der sphärischen Kanten $k' = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{c})$, die 24 Punkte $\mathfrak{b}$ die Polyedermittelpunkte bilden. Die Grenzflächen sind reguläre sphärische Dreiecke, welche sämmtlich den Hauptkugeln β angehören, mit den Seiten (Bogen der Hauptkreise k') $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = 60^0$ und den Winkeln $180^0 - 2\eta$ (vgl. Fig. 2). Von den 24 sphärischen Grenzoktaedern stossen in jeder der 96 Kanten 8, in jeder der 96 Grenzflächen 2 und in jeder der 24 Ecken 6 Oktaeder zusammen. Es ist also, entsprechend den Bezeichnungen in § 34

$$a_3 = 60^0,\ A_3 = 180^0 - 2\eta,\ \mathfrak{A}_3 = 120^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100a)$$

Die Mittelpunkte der 8 übrigen Kanten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ jedes Oktaeders, sowie die 96 Flächenmittelpunkte treten in der Figur des Gewebes G_3 erst auf, wenn die 8 Hauptkugeln γ, die Polarhauptkugeln zu den Punkten $\mathfrak{c}$ construirt sind; dieselben bilden mit den 4 Hauptkugeln β, wie nachher bemerkt

werden wird, die Seitenflächen des conjugirten Gewebes G'_3, dessen Eckpunkte die 24 Punkte $\mathfrak{b}$ sind.

Das dem regulären Gewebe G_3 eingeschriebene Polytop ist das reguläre Vierundzwanzigzell P_3, dessen Beschaffenheit sich in einfacher Weise aus derjenigen des Gewebes G_3 ergiebt. Für den Eckradius $r_e = 1$ erhält man für die Abstände r_k, r_f, r_p der Kanten, Seitenflächen und Grenzräume:

$$r_e = 1,\ r_k = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ r_f = \sqrt{\frac{2}{3}},\ r_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100\beta)$$

und für die Länge $\mathfrak{K}_3$ einer der 96 Kanten, den Inhalt $\mathfrak{F}_3$ einer der 96 Seitenflächen, den Inhalt $\mathfrak{P}_3$ eines der 24 Oktaeder und den Inhalt $\mathfrak{R}_3$ eines der 24 Räume, welche durch Verbindung eines Oktaeders mit dem Mittelpunkte O entstehen, in den bezüglichen Maasseinheiten:

$$\mathfrak{K}_3 = 1,\ \mathfrak{F}_3 = \frac{1}{4}\sqrt{3},\ \mathfrak{P}_3 = \frac{1}{3}\sqrt{2},\ \mathfrak{R}_3 = \frac{1}{12}, \quad \ldots\ldots \quad (100\gamma)$$

so dass der „Umfang“ (die Grenze) des Vierundzwanzigzells $8\sqrt{2}$, der Inhalt 2 beträgt, während das Volumen eines sphärischen Oktaeders $\frac{\pi^2}{12}$ ist.

2) Analoge Betrachtungen zu den in § 34 2), 3), angestellten ergeben nun leicht, dass das dem Gewebe G_3 umgeschriebene Polytop P_3 ebenfalls ein reguläres Vierundzwanzigzell ist, dessen 24 Eckpunkte die Pole der oktaedrischen Grenzräume des eingeschriebenen P_3 in Bezug auf S_3 sind und dessen 96 Kanten, 96 Grenzflächen bezw. polar den 96 Grenzflächen, 96 Kanten von P_3 entsprechen. Für die Abstände r'_e, r'_k, r'_f, r'_p und für die Grössen $\mathfrak{K}'_3$, $\mathfrak{F}'_3$, $\mathfrak{P}'_3$, $\mathfrak{R}'_3$ ergiebt sich (vgl. (100β) und (100γ)):

$$r'_e = \frac{1}{r_p} = \sqrt{2},\ r_{k'} = \frac{1}{r_f} = \sqrt{\frac{3}{2}},\ r_{f'} = \frac{1}{r_k} = \frac{2}{\sqrt{3}},\ r_{p'} = \frac{1}{r_e} = 1 \quad \ldots \quad (100\beta')$$

$$\mathfrak{K}'_3 = \sqrt{2},\ \mathfrak{F}'_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \mathfrak{P}'_3 = \frac{4}{3},\ \mathfrak{R}'_3 = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100\gamma')$$

Auch analytisch mit Benutzung des vierfach rechtwinkligen Coordinatensystems können die Eigenschaften und polaren Beziehungen von P_3 und P'_3 sehr einfach erhalten werden.

Durch die 24 Eckpunkte von P'_3 ist auf dem mit S_3 concentrischen Raume S'_3 mit dem Radius $r_{e'} = \sqrt{2}$ ein reguläres sphärisches Gewebe G''_3 bestimmt, welchem P'_3 eingeschrieben ist. Dieses Gewebe G''_3 ist dem Gewebe G_3 vollständig ähnlich und wird durch die vier Hauptkugeln a' und

die acht Hauptkugeln γ' gebildet, welche die Schnitte von S'_3 mit den 4+8 Euklidschen Räumen sind, die S_3 in den 4 Hauptkugeln α und den 8 Hauptkugeln γ schneiden. Es ist also (vgl. (100α))

$$\alpha'_3 = 60^0,\ A'_3 = 180^0 - 2\eta,\ \mathfrak{A}'_3 = 120^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100\alpha')$$

und für die Neigungswinkel $W_{p'_3}$, $W_{f'_3}$, $W_{k'_3}$ (vgl. § 34 unter 3)) ergiebt sich

$$W_{p'_3} = 120^0,\ W_{f'_3} = 2\eta,\quad W_{k'_3} = 60^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100\delta)$$

Das dem Gewebe G''_3 umgeschriebene Polytop ist wiederum ein dem ersteren P'_3 concentrisches reguläres Vierundzwanzigzell, für welches W_{p_3}, W_{f_3}, W_{k_3} bez. dieselben Werthe haben, wie $W_{p'_3}$, $W_{f'_3}$, $W_{k'_3}$.

Das durch die Hauptkugeln α und γ auf dem sphärischen Raume S_3 erzeugte, dem G''_3 concentrische und ähnliche Gewebe G'_3 endlich, welches dem Gewebe G_3 congruent ist, soll auch hier das zu G_3 conjugirte genannt werden. Die Eckpunkte $\mathfrak{b}$ dieses Gewebes G'_3 sind die Mittelpunkte der Polyeder von G_3, die Kantenmittelpunkte (Flächenmittelpunkte) von G'_3 sind die Flächen- (Kanten-) Mittelpunkte von G_3 und die Polyedermittelpunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ von G'_3 die Eckpunkte von G_3. Die Kanten gehören sämmtlich den Hauptkreisen k an. (Vgl. **Fig. 4** und **Fig. 5**, in welchen bez. ein schraffirtes reguläres Dreieck $\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}$ eine Grenzfläche des sphärischen Oktaeders darstellt.)

3) Die 4 Hauptkugeln α, die 8 Hauptkugeln γ und die 12 Hauptkugeln β, welche bez. die beiden conjugirten Gewebe G'_3 und G_3 mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ erzeugen, können als die Projectionen der 6 Fundamentaltetraeder $T_1 \ldots T_6$ von O aus auf S_3 aufgefasst werden, während die $8 + 16 + 24 = 48$ Eckpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ (nebst Gegenpunkten) als Projectionen den 24 Eckpunkten dieser Tetraeder — für den hier vorausgesetzten Fall der Regelmässigkeit der sphärischen Gebilde — entsprechen.

§ 38.

Vollständige Figur der beiden regulären Gewebe G_3 und G'_3.

1) Zu der in § 35 betrachteten vollständigen, durch die Hauptkugeln α und β gebildeten Figur treten hier noch die 8 Hauptkugeln γ hinzu. Die 24 Hauptkugeln schneiden sich (vgl. (99ι)):

zu je vieren ($\alpha\ \alpha\ \beta\ \beta$) in 6 Hauptkreisen e, e', entsprechend den 6 Kanten e von T_1,	(100ε)
zu je vieren ($\beta\ \beta\ \gamma\ \gamma$) in 12 Hauptkreisen $e^{(1)}$, $e^{(1)'}$, entsprechend den übrigen 12 reellen Geraden e,	

zu je dreien $(\beta\,\beta\,\beta)$ in 16 Hauptkreisen k', entsprechend den 16 Geraden k',
zu je dreien $(\alpha\,\gamma\,\gamma)$ in 16 Hauptkreisen k, entsprechend den 16 Geraden k,
zu je zweien $(\alpha,\,\beta)$ in 24 Hauptkreisen d, d', entsprechend den 24 Geraden d,
zu je zweien $(\beta,\,\gamma)$ in 48 Hauptkreisen $d^{(1)}$, $d^{(1)'}$, entsprechend den 48 übrigen reellen Geraden d, (100ε)

womit alle Schnitthauptkreise angegeben sind, da

$$6\binom{4}{2} + 12\binom{4}{2} + 16\binom{3}{2} + 16\binom{3}{2} + 24\binom{2}{2} + 48\binom{2}{2} = 276 = \binom{24}{2} \text{ ist.}$$

Die Schnittpunkte der 24 Hauptkugeln sind (vgl. (99ϰ)): (100ζ)

4 Punkte $\mathfrak{a}_1 \,..\, \mathfrak{a}_4$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{a}'_1 \,..\, \mathfrak{a}'_4$), entsprechend $\mathfrak{e}_1 \,..\, \mathfrak{e}_4$, in denen sich	3 Hauptkugeln α 6 „ β
8 Punkte $\mathfrak{c}_1 \,..\, \mathfrak{c}_8$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{c}'_1 \,..\, \mathfrak{c}'_8$), entsprechend $\mathfrak{e}_5 \,..\, \mathfrak{e}_{12}$, in denen sich	3 Hauptkugeln α 6 „ β
12 Punkte $\mathfrak{b}_1 \,..\, \mathfrak{b}_{12}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{b}'_1 \,..\, \mathfrak{b}'_{12}$), entsprechend $\mathfrak{e}_{13} \,..\, \mathfrak{e}_{24}$, in denen sich	2 Hauptkugeln α 3 „ β 4 „ γ
16 Punkte $\mathfrak{d}_1 \,..\, \mathfrak{d}_{16}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{d}'_1 \,..\, \mathfrak{d}'_{16}$), entsprechend $\mathfrak{d}_1 \,..\, \mathfrak{d}_{16}$, in denen sich	1 Hauptkugel α 3 Hauptkugeln β
32 Punkte $\mathfrak{d}^{(1)}_1 \,..\, \mathfrak{d}^{(1)}_{32}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{d}^{(1)'}_1 \,..\, \mathfrak{d}^{(1)'}_{32}$), entsprechend $\mathfrak{d}_{17} \,..\, \mathfrak{d}_{48}$, in denen sich	1 Hauptkugel γ 3 Hauptkugeln β
48 Punkte $\mathfrak{d}^{(2)}_1 \,..\, \mathfrak{d}^{(2)}_{48}$ (und Gegenpunkte $\mathfrak{d}^{(2)'}_1 \,..\, \mathfrak{d}^{(2)'}_{48}$), entsprechend $\mathfrak{d}_{49} \,..\, \mathfrak{d}_{96}$, in denen sich	1 Hauptkugel α 1 „ β 2 Hauptkugeln γ

vereinigen.

Die Summe dieser Schnittpunkte:

$$4\binom{9}{3} + 8\binom{6}{3} + 12\binom{9}{3} + 96\binom{4}{3} = 24\binom{9}{3} + 96\binom{4}{3} = 2400$$

muss noch, da auf jedem der 6 Hauptkreise e, e' vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, ebenso auf jedem der 12 Hauptkreise $e^{(1)}$, $e^{(1)'}$ vier Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$, ferner auf jedem der 16 Hauptkreise k' sechs Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$, und ebenso auf jedem der 16 Hauptkreise k sechs Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$ liegen, um

$$18\,(4-1)\binom{4}{3} + 32\,(6-1)\binom{3}{3} = 376$$

vermindert werden, so dass die Anzahl der Schnittpunkte aller Hauptkugeln

$$2024 = \binom{24}{3}$$

resultirt.

Die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ (vergl. § 3 unter (12α)) und der Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}^{(1)}$, $\mathfrak{d}^{(2)}$ (vergl. § 3 unter (12ϑ)) sind bez. folgende (aus den angeführten durch alle Permutationen und Zeichencombinationen herzuleitende):

$$\left.\begin{array}{lcccclcccc} \mathfrak{a}\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{d}\ldots\ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mathfrak{c}\ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathfrak{d}^{(1)}\ldots & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mathfrak{b}\ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \mathfrak{d}^{(2)}\ldots & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{array}\right\} \quad (100\eta)$$

In dem Gewebe G_3 mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ und den Polyedermittelpunkten $\mathfrak{b}$ treten, wie bereits erwähnt, die 32 Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ als Mittelpunkte der Kanten $k' = |\mathfrak{c}\mathfrak{c}|$ der sphärischen Oktaeder, ferner die 64 Punkte $\mathfrak{d}^{(1)}$, $\mathfrak{d}^{(2)\prime}$ als Mittelpunkte der Kanten $k' = |\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ und die 96 Punkte $\mathfrak{d}^{(2)}$, $\mathfrak{d}^{(2)\prime}$ als Flächenmittelpunkte auf. Für das conjugirte Gewebe G'_3 mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}$ und den Polyedermittelpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ sind die 96 Punkte $\mathfrak{d}^{(2)}$, $\mathfrak{d}^{(2)\prime}$ die Mittelpunkte derjenigen Flächen der Oktaeder, welche den Hauptkugeln α angehören, die 64 Punkte $\mathfrak{d}^{(1)}$, $\mathfrak{d}^{(1)\prime}$ die Mittelpunkte der Flächen, welche den Hauptkugeln γ angehören. Es giebt 16 Oktaeder mit je vier Flächen α und γ und einem Polyedermittelpunkte $\mathfrak{c}$, 8 Oktaeder mit 8 Seitenflächen γ und einem Polyedermittelpunkte $\mathfrak{a}$.

Auf jeder der 4 Hauptkugeln α treten zu den 3 Hauptkreisen e und und den 6 Hauptkreisen d noch 4 Hauptkreise k hinzu, welche auf der Hauptkugel die Aequatoren zu den Punkten $\mathfrak{d}$ sind und die 6 Hauptkreise d in 12 Punkten $\mathfrak{d}^{(2)}$ und deren Gegenpunkten $\mathfrak{d}^{(2)\prime}$ schneiden. Vgl. **Fig. 4.** Auf jedem der 6 Hauptkreise $d = |\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}^{(2)}|$ ist

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b} = \eta \\ \mathfrak{d}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}^{(2)} = 90^0 - \eta \\ \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{d} = 2\eta - 90^0; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100\vartheta)$$

auf jedem der 4 Hauptkreise $k = |\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}|$ ist

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)} = \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b} = 30^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100\iota)$$

Die regulären Dreiecke (von welchen eines in Fig. 4 schraffirt ist) mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}$, den Kantenmittelpunkten $\mathfrak{d}^{(2)}$ und dem Flächenmittelpunkt $\mathfrak{d}$ sind Grenzflächen von 8 sphärischen Oktaedern des Gewebes G'_3.

Auf jeder der 8 Hauptkugeln γ treten 3 Hauptkreise $e^{(1)}$, 6 Hauptkreise $d^{(1)}$ und 4 Hauptkreise k auf, welche auf der Hauptkugel bezw. die Aequatoren zu den Punkten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}^{(1)}$ sind. Vergl. **Fig. 5.** Auf jedem Hauptkreise $e^{(1)} = |\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,|$ ist $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = 45^0$, auf jedem der Hauptkreise $d^{(1)} = |\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{d}^{(1)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(1)}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,|$ ist

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{(1)} = \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b} = \eta \\ \mathfrak{d}^{(1)}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{(2)} = 90^0 - \eta \\ \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{d}^{(2)} = 2\eta - 90^0,\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100\vartheta')$$

und auf jedem der Hauptkreise $k = |\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)}\,|$ wiederum

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}^{(2)} = \mathfrak{d}^{(2)}\,\mathfrak{b} = 30^0 \quad \ldots \quad (100\iota').$$

Die Grenzfläche eines sphärischen Oktaeders ist ein (schraffirtes) Dreieck $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}$.

Endlich treten auf jeder der 12 Hauptkugeln β zu dem Hauptkreis e, den beiden Hauptkreisen $e^{(1)}$, den beiden Hauptkreisen d und den vier Hauptkreisen k' noch vier Hauptkreise $d^{(1)}$ hinzu, welche auf der Hauptkugel die Aequatoren zu den Punkten $\mathfrak{c}$ sind. Vgl. **Fig. 6.** Die Eintheilung dieser sämmtlichen Hauptkreise ist entsprechend die nämliche, wie auf den Hauptkugeln α und γ. Die Grenzfläche eines sphärischen Oktaeders ist ein (schraffirtes) Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}$; dieselbe beträgt keinen aliquoten Theil einer Hauptkugelfläche.

Auf jeder der 4 Hauptkugeln α, der 8 Hauptkugeln γ und der 12 Hauptkugeln β ist sonach dieselbe Eintheilung durch $3+6+4 = 13$ Hauptkreise vorhanden; und die 4 Punkte $\mathfrak{a}$, 8 Punkte $\mathfrak{c}$, 12 Punkte $\mathfrak{b}$ (nebst Gegenpunkten), andererseits die 16 Punkte $\mathfrak{d}$, 32 Punkte $\mathfrak{d}^{(1)}$ und 48 Punkte $\mathfrak{d}^{(2)}$ (nebst Gegenpunkten) treten als gleichberechtigt auf, ebenso wie die 6 Hauptkreise e, e', und die 12 Hauptkreise $e^{(1)}$, $e^{(1)'}$ und andererseits die 24 Hauptkreise d, d' und die 48 Hauptkreise $d^{(1)}$, $d^{(1)'}$.

2) Durch die 24 Hauptkugeln α, β, γ wird der sphärische Raum in 1152 Elementartetraeder $\mathfrak{T}_3$ getheilt, indem jedes der 24 sphärischen Oktaeder des Gewebes G_3, wie des conjugirten Gewebes G'_3 durch die $3+6=9$ Symmetriehauptkugeln in 48 solcher Tetraeder zerlegt wird. Für jedes der 24 Oktaeder des Gewebes G_3 sind diese Symmetriehauptkugeln 3 Haupt-

kugeln β, 2 Hauptkugeln α und 4 Hauptkugeln γ, für die 16 Oktaeder des Gewebes G'_3 mit je 4 Seitenflächen α und γ 3 Hauptkugeln γ und 6 Hauptkugeln β, für die 8 Oktaeder von G'_3 mit 8 Seitenflächen γ 3 Hauptkugeln α und 6 Hauptkugeln β.

Diese 1152 einander congruenten Elementartetraeder $\mathfrak{T}_3$ zerfallen in drei Gruppen von je 384 Tetraedern. Je drei dieser Tetraeder $\mathfrak{T}_3^{(1)}$, $\mathfrak{T}_3^{(2)}$, $\mathfrak{T}_3^{(3)}$, von welchen jedes einer der drei Gruppen angehört, bilden zusammen eins der 384 Elementartetraeder $\mathfrak{T}_2$ der Gewebe G_2 und G'_2 (vgl. § 35 unter 2)), da jedes dieser letzteren Tetraeder $\mathfrak{T}_2$ durch zwei Hauptkugeln γ in drei Tetraeder $\mathfrak{T}_3^{(1)}$, $\mathfrak{T}_3^{(2)}$, $\mathfrak{T}_3^{(3)}$ zerlegt wird. (Vergl. **Fig. 7**, welche eine schematische Zeichnung eines derartig in drei Theiltetraeder zerlegten Tetraeders darstellt.) Als Beispiel werde das in § 35 2) betrachtete Tetraeder $\mathfrak{T}_2$: $\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_7\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1$ gewählt, welches durch die beiden Hauptkugeln γ_2 und γ_3 in die drei Theiltetraeder:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\mathfrak{T}_3^{(1)} \ldots & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_7 & \mathfrak{d}_1^{(1)} & \mathfrak{d}_1^{(2)} \ldots & \gamma_2 & \beta_6 & \alpha_1 & \beta_2 \\
\mathfrak{T}_3^{(2)} \ldots & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{b}_7 & \mathfrak{d}_1^{(1)} & \mathfrak{d}_1^{(2)} \ldots & \gamma_2 & \beta_6 & \gamma_3 & \beta_8 \\
\mathfrak{T}_3^{(3)} \ldots & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{b}_7 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_1^{(2)} \ldots & \alpha_1 & \beta_6 & \gamma_3 & \beta_8
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (100\varkappa)$$

zerlegt wird. Die Seitenflächen sind schraffirt in den **Fig. 4, 5, 6** angegeben.

Die rechtwinkligen Coordinaten von $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_7$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ und von β_8, β_6, α_1, β_2 sind in (99ν) (§ 35), diejenigen von $\mathfrak{d}_1^{(1)}$, $\mathfrak{d}_1^{(2)}$ unter (100η) (dieses §) angegeben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{d}_1^{(1)} \ldots & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\
\mathfrak{d}_1^{(2)} \ldots & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}};
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (100\lambda_1)$$

die Coordinaten von γ_2 und γ_3 sind:

$$\left.\begin{array}{lcccc}
\gamma_2 \ldots \text{(vgl. } \bar{2} \text{ unter } T_2 \text{ in (79}\varepsilon\text{) § 10)} \ldots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\gamma_3 \ldots \text{(vgl. } \bar{2} \text{ „ } T_3 \ldots\ldots \text{)} \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (100\lambda_2)$$

Die Elemente eines jeden der drei Tetraeder $\mathfrak{T}_3^{(1)}$, $\mathfrak{T}_3^{(2)}$, $\mathfrak{T}_3^{(3)}$ sind aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

Centriwinkel einer sphärischen Kante:	Hauptkreis:	Neigungswinkel der Hauptkugeln an dieser Kante:
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_7} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_7} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_7} = 45^0$	... e oder $e^{(1)}$...	$\widehat{\alpha_1\,\beta_2} = \widehat{\gamma_3\,\beta_8} = \widehat{\gamma_3\,\beta_8} = 45^0$
$\overline{\mathfrak{d}_1^{(1)}\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{d}_1^{(1)}\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = 2\eta - 90^0$	... $d^{(1)}$ oder d ...	$\widehat{\gamma_2\,\beta_6} = \widehat{\gamma_2\,\beta_6} = \widehat{\alpha_1\,\beta_6} = 90^0$
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{d}_1^{(1)}} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1^{(1)}} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1} = 30^0$	... k' ...	$\widehat{\beta_6\,\beta_2} = \widehat{\beta_6\,\beta_8} = \widehat{\beta_6\,\beta_8} = 60^0$
$\overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = 30^0$	... k ...	$\widehat{\gamma_2\,\alpha_1} = \widehat{\gamma_2\,\gamma_3} = \widehat{\alpha_1\,\gamma_3} = 60^0$
$\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = \overline{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1^{(2)}} = 90^0 - \eta$	... d oder $d^{(1)}$...	$\widehat{\beta_6\,\alpha_1} = \widehat{\beta_6\,\gamma_3} = \widehat{\beta_6\,\gamma_3} = 90^0$
$\overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1^{(1)}} = \overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1^{(1)}} = \overline{\mathfrak{b}_7\,\mathfrak{d}_1} = 90 - \eta$	... d ...	$\widehat{\gamma_2\,\beta_2} = \widehat{\gamma_2\,\beta_8} = \widehat{\alpha_1\,\beta_8} = 90^0$

Neigungswinkel der Hauptkreise an den Ecken von $\mathfrak{T}_3^{(1)}$:

(für $\mathfrak{T}_3^{(2)}$, $\mathfrak{T}_3^{(3)}$ durch Vertauschung aus (100κ) entsprechend zu erhalten)

$\mathfrak{d}_1^{(2)}\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{d}_1^{(1)} = 90^0 - \eta$	$\mathfrak{d}_1^{(2)}\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{d}_1^{(1)} = 90^0 - \eta$	$\mathfrak{d}_1^{(2)}\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(1)}}\,\mathfrak{b}_7 = 60^0$	$\mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(2)}}\,\mathfrak{d}_1^{(1)} = 90^0$
$\mathfrak{d}_1^{(1)}\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{b}_7 = \eta$	$\mathfrak{d}_1^{(1)}\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{a}_2 = 45^0$	$\mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(1)}}\,\mathfrak{a}_2 = 90^0$	$\mathfrak{d}_1\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(2)}}\,\mathfrak{a}_2 = 60^0$
$\mathfrak{b}_7\,\widehat{\mathfrak{a}_2}\,\mathfrak{d}_1^{(2)} = 45^0$,	$\mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{b}_7}\,\mathfrak{d}_1^{(2)} = \eta$,	$\mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(1)}}\,\mathfrak{d}_1^{(2)} = 90^0$,	$\mathfrak{a}_2\,\widehat{\mathfrak{d}_1^{(2)}}\,\mathfrak{b}_7 = 90^0$.

(100μ)

Man erkennt leicht hieraus, dass die beiden rechtwinkligen sphärischen Grenzflächen, welche bei $\mathfrak{T}_3^{(1)}$ und $\mathfrak{T}_3^{(2)}$ die Kante $\mathfrak{d}_1^{(1)}\,\mathfrak{d}_1^{(2)}$, bei $\mathfrak{T}_3^{(2)}$ die Kante $\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_1^{(2)}$ gemein haben, congruent sind, ebenso dass die beiden rechtwinkligen Grenzflächen, welche die Gegenkante, bei $\mathfrak{T}_3^{(1)}$ die Kante $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_7$, bei $\mathfrak{T}_3^{(2)}$ und $\mathfrak{T}_3^{(3)}$ die Kante $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_7$ gemein haben, congruent sind. Der Excess der ersteren Grenzfläche, welche den 6ten Theil der Grenzfläche eines der sphärischen Oktaeder beträgt, ist $= 60^0 - \eta$, der Excess der anderen Grenzfläche ist gleich $\eta - 45^0$, also beträgt die Summe der vier Grenzflächen eines Elementartetraeders $\mathfrak{T}_3$ oder der Umfang 30^0, d. h. den 24ten Theil einer Hauptkugel. Als Summe der Umfänge der vier Grenzdreiecke ergiebt sich 390^0 und als Summe der Excesse der 4 sphärischen Ecken 150^0 oder $\frac{5}{24}$ einer Hauptkugel (vgl. § 35 unter 2)), während das Volumen eines sphärischen Tetraeders $\mathfrak{T}_3$ $\frac{1}{1152}$ des Volumen des sphärischen Raumes S_3, also $\frac{\pi^2}{576}$ beträgt. Als Modulus des sphärischen Tetraeders (vgl. (100μ)) ergiebt sich $\frac{1}{3} = \sin(2\eta - 90^0) = -\cos 2\eta$.

3) Werden je 48 der um jeden der 24 Punkte $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) herumliegenden Elementartetraeder zusammengefasst, so resultirt das reguläre Gewebe G_3, dessen Eckpunkte, Kanten-, Flächen- und Polyeder-Mittelpunkte bezw. die Punkte $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}+\mathfrak{d}^{(1)}$, $\mathfrak{d}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}$ sind, während durch das Zusammenfassen von

je 48 um jeden der 8 Punkte $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}'$) und der 16 Punkte $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}'$) herumliegenden Elementartetraedern das conjugirte reguläre Gewebe G'_3 erhalten wird, dessen Eckpunkte, Kanten-, Flächen- und Polyeder-Mittelpunkte bezw. die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}^{(2)}$, $\mathfrak{d}+\mathfrak{d}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ sind. Wenn je 12 der in jedem der 96 Punkte $\mathfrak{d}^{(2)}$ ($\mathfrak{d}^{(2)\prime}$) zusammenstossenden Elementartetraeder zusammengefasst werden, so resultirt ein festes, gleichzelliges Gewebe, welches von 96 congruenten, dreiseitigen sphärischen Doppelpyramiden begrenzt wird. Die dreiseitige Basis einer solchen Doppelpyramide hat zwei Eckpunkte $\mathfrak{c}$ und einen Eckpunkt $\mathfrak{a}$, in deren jedem 12 Polyeder zusammenstossen, und 2 Spitzen $\mathfrak{b}$, in deren jeder 8 Doppelpyramiden zusammenstossen. Ein gleiches festes, gleichzelliges Gewebe ergibt sich, wenn je 12 der in jedem der 32 Punkte $\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{d}'$) und der 64 Punkte $\mathfrak{d}^{(1)}$ ($\mathfrak{d}^{(1)\prime}$) zusammenstossenden Elementartetraeder vereinigt werden; die dreiseitige Basis einer Doppelpyramide hat dann drei Eckpunkte $\mathfrak{b}$ und je eine Spitze $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Bei dem ersteren Gewebe bilden die Polyeder-Mittelpunkte des zweiten, bei dem zweiten die Polyeder-Mittelpunkte des ersteren die Halbirungspunkte der Kanten, welche die Basen der Doppelpyramiden darstellen. Jedem der beiden gleichzelligen Gewebe entspricht ein zugeordnetes festes gleicheckiges Gewebe, dessen 96 Eckpunkte die Polyeder-Mittelpunkte $\mathfrak{d}^{(2)}$, bezw. $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}^{(1)}$ sind; in jedem Eckpunkte stossen 3 sphärische Kubooktaeder und 2 reguläre sphärische Hexaeder zusammen. Das erstere besteht aus $(8+16)$ Kubooktaedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ und aus 24 Hexaedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{b}$, das zweite aus 24 Kubooktaedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{b}$ und aus $(8+16)$ Hexaedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$.

Die Beschaffenheit der diesen gleichzelligen Geweben umgeschriebenen und der den gleicheckigen eingeschriebenen Polytope ergiebt sich leicht aus dem Gesagten.

4) Auch für die durch die beiden conjugirten Gewebe G_3 und G'_3 bestimmten sphärischen Figuren sind noch einige weiteren Punkte, Hauptkreise und Hauptkugeln zu berücksichtigen, welche zu den unter § 35 4) aufgeführten hinzutreten und ebenfalls Projectionen von Punkten, Geraden und Ebenen sind, die bereits bei den entsprechenden dreidimensionalen Figuren bestimmt wurden.

Ausser den Projectionen der reellen Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}=\mathfrak{f}_0^{(d)}$ (§ 2 2) u. (10γ)),

welche auf den 6 Hauptkreisen e und den 12 Hauptkreisen $e^{(1)}$ zu je vier (nebst Gegenpunkten), die Oktanten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ halbirend auftreten, ausser den Projectionen der beiden reellen Punkte $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{i}_0^{(d)}$ (§ 2, § 3 (12γ)), welche nebst Gegenpunkten auf den 24 Hauptkreisen d, die Quadranten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}$ halbirend auftreten, und endlich ausser den Projectionen der Punkte $\mathfrak{p}$ (§ 4 7) und 13 ι)), welche zu je sechs nebst Gegenpunkten auf den 16 Hauptkreisen k', die Bogen $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ halbirend, auftreten, erhält man noch auf jedem der 48 Hauptkreise $d^{(1)}$ und $d^{(1)'}$ je zwei Punkte $\mathfrak{d}_0$ (nebst Gegenpunkten), welche, wie die ersteren Punkte $\mathfrak{d}_0$, hier als Halbirungspunkte der sphärischen Kanten mit den Centriwinkeln $2\eta - 90^0$ auftreten (vgl. (100μ)) und endlich auf jedem der 16 Hauptkreise k ebenfalls je 6 Punkte $\mathfrak{p}$ (nebst Gegenpunkten), während die Halbirungspunkte der Bogen mit den Centriwinkeln $90^0 - \eta$ der 24 Hauptkreise d und der 48 Hauptkreise $d^{(1)}$ für das Folgende nicht in Betracht kommen. (Vgl. **Fig. 7**α).)

Je vier Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und $\mathfrak{d}_0$ (nebst Gegenpunkten) liegen wiederum auf einem Hauptkreise d_0, deren es 72 giebt, so dass jeder Hauptkreis durch die abwechselnd aufeinander folgenden Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ und $\mathfrak{d}_0$ in 16 gleiche Bogen ($= 22^1/_2{}^0$) getheilt wird und jedem der 1152 Elementartetraeder ein solcher Bogen zukommt, welcher die Gegenkanten e oder $e^{(1)}$ und d oder $d^{(1)}$ halbirt und rechtwinklig schneidet. Durch jeden der 72 Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)}$ (und deren Gegenpunkt) gehen 4 Hauptkreise d_0, durch jeden der 144 Punkte $\mathfrak{d}_0$ (und deren Gegenpunkt) gehen 2 Hauptkreise d_0 hindurch.

§ 39.

I. Transformationen der beiden regulären Gewebe G_3 und G'_3 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst.

Die Gesammtheit der Transformationen, durch welche die durch den Verein der beiden conjugirten regulären Gewebe G_3 und G'_3 bestimmte Figur in sich übergeht, ergiebt sich aus den Substitutionen der in § 23 II) betrachteten Gruppe $G^{(1)}_{2304}$ (bez. $G^{(1)c}_{1152}$), welche die harmonische Configuration in sich überführen, durch den Process der Uebertragung aus dem Raume R_3 in den sphärischen S_3 und umfasst 2304 Collineationen und ebensoviele Correlationen. Die Substitutionen der Untergruppe $G^{(1)}_{1152}$ (bez. $G^{(1)c}_{576}$), durch

welche die drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 in sich und in einander übergehen oder die Reye'sche Configuration in sich transformirt wird, liefern die 1152 Collineationen und ebensoviele Correlationen, durch welche das Gewebe G_3 allein und die ihm zugehörigen regelmässigen (und theilweise regelmässigen) Polytope in sich übergehen.

Diese beiden Gruppen enthalten die weitere Untergruppe $G_{384}^{(1)}$ (bez. $G_{192}^{(1)c}$), welche die in § 36 aufgeführten 384 Collineationen und 384 Correlationen für die Gewebe G_2 und G_3 ergiebt. Um daher zunächst die sämmtlichen Transformationen, welche aus $G_{1152}^{(1)}$ für G_3 allein resultiren, anzugeben, sind zu den in § 36 aus 1), 2a), 3a); 6a), 6d), 7a) der Tabelle $G_{2304}^{(1)}$ in § 23 II) abgeleiteten Transformationen noch die aus 2b), 2c), 3b), 3c), 4); 6b), 6c) und 7b), 7c), 7d) resultirenden hinzuzufügen.

I) Transformationen, durch welche G_3 in sich übergeht.

A) Bewegungen (zwei- oder vierfache Spiegelungen).

Zu den in § 36 unter A) $1\alpha_1$), $1\alpha_2$), $1\beta_1$), $1\beta_2$), $1\gamma_1$), $1\gamma_2$), $2a_1$), $2a_2$), $3\alpha_1$), $3\alpha_2$), $3\beta_1$), $3\beta_2$) und $3\gamma_1$), $3\gamma_2$) aufgeführten 192 Bewegungen treten folgende 384 hinzu:

$2b_1$) und $2c_1$) 2 . 16 = 32 dreizählige einfache Drehungen um je einen der 16 Hauptkreise k (alle Punkte von k und die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{k}_0$ der reciproken Polare k' bleiben fest).

Z. B. $S = [-1\ -2\ -3\ -4]_2 = k_{(120^0)}$, $S^2 = [1\ 2\ 3\ 4]_3 = k_{(-120^0)}$.

Vgl. § 28 unter $c\alpha$) und § 14 (83α) Formeln (96π), (96ϱ).

$2b_2$) und $2c_2$) 2 . 16 = 32 besondere sechszählige Doppeldrehungen (Drehung nebst Umwendung), nämlich Drehung von 60^0 oder -60^0 um k und Umwendung um k'.

Z. B. $S = [1\ 2\ 3\ 4]_2 = k_{(-60^0)}\ k'_{(180^0)}$, $S^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_3 = k_{(60^0)}\ k'_{(180^0)}$.

S^2 und S^4 sind die dreizähligen einfachen Drehungen $2b_1$), $2c_1$), S^3 ist die Inversion. Vgl. § 28 unter $c\beta$), Formeln (96χ) und § 14 (83α).

$3\alpha_1^{(1)}$) 24 Umwendungen um je einen der 24 Hauptkreise $d^{(1)}$.

Z. B. $S = [1\ -2\ -4\ -3]_2$ und $S = [-1\ 2\ 4\ 3]_3$ (vgl. § 28 (96τ), (96ω)).

$3\alpha_2^{(1)}$) 24 Umwendungen um je einen der 24 Hauptkreise $d^{(1)\prime}$).

Z. B. $S = [-1\ 2\ 4\ 3]_2$ und $S = [1\ -2\ -4\ -3]_3$ (vgl. § 28 (96τ), (96ω).

$3\beta_1^{(1)}$) 2 . 12 = 24 vierzählige einfache Drehungen um je einen der 12 Hauptkreise $e^{(1)}$ und $e^{(1)'}$; vgl. § 28 cα).

Z. B.

$$\begin{array}{lcl} S = [3\ \ 4\ \ 2\ -1]_2 = e^{(1)}_{(90^0)} & \text{und} & S = [3\ -4\ -2\ -1]_3 = e^{(1)'}_{(90^0)} \\ S^3 = [4\ \ 3\ -1\ \ 2]_2 = e^{(1)}_{(-90^0)} & & S^3 = [4\ -3\ -1\ -2]_3 = e^{(1)'}_{(-90^0)} \\ S^2 = [2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)}_{(180^0)} & & S^2 = [-2\ -1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)'}_{(180^0)} \\ \overline{S} = [-1\ \ 2\ -4\ -3]_2 = e^{(1)'}_{(90^0)} & & \overline{S} = [-1\ \ 2\ -4\ -3]_3 = e^{(1)}_{(90^0)} \\ S^3 = [2\ -1\ -3\ -4]_2 = e^{(1)'}_{(-90^0)} & & S^3 = [2\ -1\ \ 3\ \ 4]_3 = e^{(1)}_{(-90^0)} \\ S^2 = [-2\ -1\ -4\ -3]_1 = e^{(1)'}_{(180^0)} & & S^2 = [2\ \ 1\ -4\ -3]_1 = e^{(1)}_{(180^0)} \\ e^{(1)} = (45) \text{ vgl. } (80\gamma) \text{ in § 11} & & e^{(1)} = (36) \text{ vgl. } (80\gamma) \text{ in § 11.} \end{array}$$

$3\beta_2^{(1)}$) 2 . 12 = 24 besondere vierzählige Doppeldrehungen, nämlich Drehung von 90^0 oder -90^0 um $e^{(1)}$ ($e^{(1)'}$) und Umwendung um $e^{(1)'}$ ($e^{(1)}$); vgl. § 28 cβ).

Z. B.

$$\begin{array}{lcl} S = [-3\ -4\ -2\ \ 1]_2 = e^{(1)}_{(90^0)}\ e^{(1)'}_{(180^0)} & \text{und} & S = [-3\ \ 4\ \ 2\ \ 1]_3 = e^{(1)'}_{(90^0)}\ e^{(1)}_{(180^0)} \\ S^3 = [-4\ -3\ \ 1\ -2]_2 = e^{(1)}_{(-90^0)}\ e^{(1)'}_{(180^0)} & & S^3 = [-4\ \ 3\ \ 1\ \ 2]_3 = e^{(1)'}_{(-90)}\ e^{(1)}_{(180^0)} \\ S^2 = [2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)}_{(180^0)} & & S^2 = [-2\ -1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)'}_{(180^0)} \\ \overline{S} = [1\ -2\ \ 4\ \ 3]_2 = e^{(1)'}_{(90^0)}\ e^{(1)}_{(180^0)} & & \overline{S} = [1\ -2\ \ 4\ \ 3]_3 = e^{(1)}_{(90^0)}\ e^{(1)'}_{(180^0)} \\ S^3 = [-2\ \ 1\ \ 3\ \ 4]_2 = e^{(1)'}_{(-90^0)}\ e^{(1)}_{(180^0)} & & S^3 = [-2\ \ 1\ -3\ -4]_3 = e^{(1)}_{(-90^0)}\ e^{(1)'}_{(180^0)} \\ S^2 = [-2\ -1\ -4\ -3]_1 = e^{(1)'}_{(180^0)} & & S^2 = [2\ \ 1\ -4\ -3]_1 = e^{(1)}_{(180^0)}\ . \end{array}$$

$3\gamma_1^{(1)}$) und $3\gamma_2^{(1)}$) 4 . 24 = 96 allgemeine achtzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreis d_0 und dessen reciproke Polare d'_0 sind. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders, dessen Eckpunkte 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{i}^{(e)}_0 = \mathfrak{f}^{(d)}_0$, dessen Hauptkugeln 4 imaginäre Hauptkugeln $\iota^{(e)}_0 = \varphi^{(d)}_0$ und dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen d_0, d'_0 je ein imaginäres Hauptkreispaar d_0, d'_0 und $e^{(2)}$, $e^{(2)'}$ sind, finden sich bei den folgenden Beispielen angegeben (vgl. § 8 C I unter 2)).

Erstes Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} S = [1\ \ 4\ \ 3\ -2]_2 = d_0'{}_{(45^0)}\ d_{0(135^0)}, \\ S^5 = [-1\ -4\ -3\ \ 2]_2 = d'_{0(-135^0)}\ d_{0(-45^0)}, \end{array}\right. & \begin{array}{l} S^3 = [-4\ \ 1\ \ 2\ \ 3]_2 = d'_{0(135^0)}\ d_{0(45^0)}, \\ S^7 = [4\ -1\ -2\ -3]_2 = d'_{0(-45^0)}\ d_{0(-135^0)} \end{array}\right\} \\ S^2 = [-2\ \ 1\ -4\ \ 3]_1 = d'_{0(90^0)}\ d_{0(-90^0)}, & S^6 = [2\ -1\ \ 4\ -3]_1 = d'_{0(-90^0)}\ d_{0(90^0)}\ . \end{array}\right.$$

bedeuten wiederum (vgl. § 36 unter $3\gamma_1$), $3\gamma_2$) die vierzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz bilden, $S^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ bedeutet die Inversion. Das zugehörige festbleibende Tetraeder hat folgende Eckpunkte, Hauptkugeln und sphärische Kanten, deren orthogonale Coordinaten, für die Kanten in $\mathfrak{p}_{ik}$-Coordinaten angegeben sind:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{z}_1 \dots & 1 & i & -i(\sqrt{2}+1) & \sqrt{2}+1 & \dots \zeta_4\\
\mathfrak{z}_2 \dots & 1 & i & i(\sqrt{2}-1) & -(\sqrt{2}-1) & \dots \zeta_3\\
\mathfrak{z}_3 \dots & 1 & -i & -i(\sqrt{2}-1) & -(\sqrt{2}-1) & \dots \zeta_2\\
\mathfrak{z}_4 \dots & 1 & -i & i(\sqrt{2}+1) & \sqrt{2}+1 & \dots \zeta_1
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2| = |\zeta_3\,\zeta_4| \dots \begin{vmatrix}0 & 1 & i\\ 0 & 1 & i\end{vmatrix}\\
|\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_4| = |\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2| \dots \begin{vmatrix}0 & 1 & -i\\ 0 & 1 & -i\end{vmatrix}
\end{array}\right\} \dots e^{(2)} \dots (35)$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_3| = |\zeta_4\,\zeta_2| \dots \begin{vmatrix}1 & -1 & -i\sqrt{2}\\ -1 & 1 & i\sqrt{2}\end{vmatrix}\\
|\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_2| = |\zeta_1\,\zeta_3| \dots \begin{vmatrix}1 & -1 & i\sqrt{2}\\ -1 & 1 & -i\sqrt{2}\end{vmatrix}
\end{array}\right\} \text{Imaginäre, sich selbst conjugirte Hauptkreise } d_0$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_4| = |\zeta_2\,\zeta_3| \dots \begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix} \dots d_0\\
|\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3| = |\zeta_1\,\zeta_4| \dots \begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix} \dots d'_0
\end{array}\right\} \text{Schraubenaxen}$$

Zweites Beispiel:

$$\left\{\begin{array}{l}
S = [3\ -1\ 4\ 2]_3 = d'_{0(45^0)}\, d_{0(135^0)},\\
S^5 = [-3\ 1\ -4\ -2]_3 = d'_{0(-135^0)}\, d_{0(-45^0)},
\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l}
S^3 = [1\ 3\ -2\ 4]_3 = d'_{0(135^0)}\, d_{0(45^0)},\\
S^7 = [-1\ -3\ 2\ -4]_3 = d'_{0(-45^0)}\, d_{0(-135^0)}
\end{array}\right\};$$

$$S^2 = [-2\ 1\ -4\ 3]_1 = d'_{0(90^0)}\, d_{0(-90^0)}, \quad S^6 = [2\ -1\ 4\ -3]_1 = d'_{0(-90^0)}\, d_{0(90^0)}$$

sind wiederum (vergleiche oben) die vierzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz bilden, $S^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ ist die Inversion.

Festbleibendes Tetraeder:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{z}_1 \dots & 1 & i & \sqrt{2}-1 & i(\sqrt{2}-1) & \dots \zeta_4\\
\mathfrak{z}_2 \dots & 1 & i & -(\sqrt{2}+1) & -i(\sqrt{2}+1) & \dots \zeta_3\\
\mathfrak{z}_3 \dots & 1 & -i & -(\sqrt{2}+1) & i(\sqrt{2}+1) & \dots \zeta_2\\
\mathfrak{z}_4 \dots & 1 & -i & \sqrt{2}-1 & -i(\sqrt{2}-1) & \dots \zeta_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2| = |\zeta_3\,\zeta_4| \dots \begin{vmatrix}0 & 1 & i\\ 0 & 1 & i\end{vmatrix} \dots e^{(2)}\\
|\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_4| = |\zeta_1\,\zeta_2| \dots \begin{vmatrix}0 & 1 & -i\\ 0 & 1 & -i\end{vmatrix} \dots (35)
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_3| = |\zeta_4\,\zeta_2| \dots \begin{vmatrix}1 & i\sqrt{2} & -1\\ -1 & -i\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}\\
|\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_2| = |\zeta_1\,\zeta_3| \dots \begin{vmatrix}1 & -i\sqrt{2} & -1\\ -1 & i\sqrt{2} & -1\end{vmatrix}
\end{array}\right\} \text{Imaginäre, sich selbst conjugirte Hauptkreise } d_0$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_4| = |\zeta_2\,\zeta_3| \dots \begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{vmatrix} \dots d_0\\
|\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3| = |\zeta_1\,\zeta_4| \dots \begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{vmatrix} \dots d'_0
\end{array}\right\} \text{Schraubenaxen}$$

$4\alpha_1$) 16 dreizählige, $4\alpha_2$) 16 sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar k_0 (vgl. § 6 am Ende) bilden. (Vgl. § 28 unter dβ) und (96h), (96l)) und wobei die geraden Potenzen von S

$$= k_{(60^\circ)}\, k'_{(60^\circ)} \text{ oder } k_{(60^\circ)}\, k'_{(-60^\circ)},$$
$$= h_{(60^\circ)}\, h'_{(60^\circ)} \text{ oder } h_{(60^\circ)}\, h'_{(-60^\circ)},$$
$$= l_{(60^\circ)}\, l'_{(60^\circ)} \text{ oder } l_{(60^\circ)}\, l'_{(-60^\circ)}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die dreizähligen Doppeldrehungen darstellen.

Z. B. (vgl. § 12 A 1)):

$$S = [1\ 3\ 4\ 2]_2,\ S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_3,\ S^3 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1 \text{ (Inversion)},$$
$$S^4 = [-1\ -3\ -4\ -2]_2,\ S^5 = [-1\ -4\ -2\ -3]_3.$$

Axen k_0 der Congruenz (vgl. (81γ)) in $\mathfrak{x}_i$-Coordinaten:

$$\begin{cases} 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0. \end{cases}$$

$4\beta_1$) und $4\beta_2$) 4 . 24 = 96 allgemeine zwölfzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreis h und dessen reciproke Polare h' sind; $S = h_{(30^\circ)}\, h'_{(150^\circ)}$ oder $h_{(30^\circ)}\, h'_{(-150^\circ)}$. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders, dessen Eckpunkte 4 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{k}_0^{(k)}$, dessen Hauptkugeln 4 imaginäre Hauptkugeln $\zeta_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$ und dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen h, h' je ein imaginäres Hauptkreispaar k_0 und $e^{(2)}$ sind, entsprechen genau den früher (§ 8 C I unter 8) (36γ) und (36δ)) angegebenen.

Z. B. (vgl. § 12 A 2):

$S = [3\ -1\ -2\ 4]_2 = h_{(30^\circ)}\, h'_{(150^\circ)}$	$S^2 = [-1\ -4\ -2\ -3]_3 = h_{(60^\circ)}\, h'_{(-60^\circ)}$
$S^5 = [-4\ 1\ 3\ -2]_3 = h_{(150^\circ)}\, h'_{(30^\circ)}$	$S^4 = [-1\ -3\ -4\ -2]_2 = h_{(120^\circ)}\, h'_{(-120^\circ)}$
$S^7 = [-3\ 1\ 2\ -4]_2 = h_{(-150^\circ)}\, h'_{(-30^\circ)}$	$S^8 = [1\ \ 4\ \ 2\ \ 3]_3 = h_{(-120^\circ)}\, h'_{(120^\circ)}$
$S^{11} = [4\ -1\ -3\ 2]_3 = h_{(-30^\circ)}\, h'_{(-150^\circ)}$;	$S^{10} = [1\ \ 3\ \ 4\ \ 2]_2 = h_{(-60^\circ)}\, h'_{(60^\circ)}$

sind die sechszähligen, unter $4\alpha_2$) aufgeführten Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem Axenpaar k_0 bilden;

$$S^3 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = h_{(90^\circ)}\, h'_{(90^\circ)},$$
$$S^9 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = h_{(-90^\circ)}\, h'_{(-90^\circ)}$$

sind vierzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem Axenpaar $e^{(2)} = (46)$ bilden (vgl. § 36 unter A $1\gamma_1$) und $1\gamma_2$);

$S^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1 = h_{(180^\circ)}\, h'_{(180^\circ)}$ ist die Inversion.

Damit sind die $192 + 384 = 576$ Bewegungen, welche das Gewebe G_3 in sich überführen, sämmtlich aufgestellt.[1])

B) Ein- oder dreifache Spiegelungen, welche das Gewebe G_3 in sich überführen.

Zu den in § 36 unter B) $6\alpha_1^{(1)}) \ldots \alpha_2^{(2)}$, $\beta_1^{(1)} \ldots \beta_2^{(2)}$, $7a_1$) und $7a_2$) aufgeführten 192 ein- und dreifachen Spiegelungen treten folgende 384 hinzu:

$6\alpha_1^{(3)}$) 8 einfache Spiegelungen an je einer der Hauptkugeln $\gamma_1 \ldots \gamma_8$.

Z. B. $S = [-1\ 2\ 3\ 4]_3$ Spiegelung an $\gamma_i \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots (\varepsilon_5)$

$S = [1\ -2\ -3\ -4]_2$ „ „ $\gamma_i \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots (\varepsilon_9)$ } vgl. § 29aα).

$6\alpha_2^{(3)}$) 8 Inversionsspiegelungen (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch $\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_8$) z. B.:

$S = [1\ -2\ -3\ -4]_3$, $\mathfrak{c}_i \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$

und $S = [-1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]_2$, $\mathfrak{c}_i \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}$ } vgl. § 29aβ).

$6\beta_1^{(3)}$) 24 vierzählige Drehspiegelungen (dreifache Spiegelungen) vgl. § 29b).

Von den beiden Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche auf einem der 12 Hauptkreise $e^{(1)}$, $(e^{(1)\prime})$, der Axe der 90^0 betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{b}_i$ fest, während $\mathfrak{b}_k$ in den Gegenpunkt übergeht; die durch die reciproke Polare $e^{(1)\prime}$ $(e^{(1)})$, deren imaginäre unendlich ferne Punkte festbleiben, hindurchgehende Spiegelhauptkugel β_k bleibt fest, während β_i die Innen- und Aussenseite vertauscht.

$6\beta_2^{(3)}$) 24 vierzählige Drehspiegelungen. Die Punkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ und die Hauptkugeln β_k und β_i in $6\beta_1^{(3)}$) vertauschen sich.

Beispiele zu $6\beta_1^{(3)}$:	Beispiele zu $6\beta_2^{(3)}$:
$S\ = [1\ -2\ 3\ 4]_2 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)} \mid \beta_k \mid$,	$S\ = [-1\ 2\ -3\ -4]_2 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)} \mid \beta_i \mid$,
$S^3 = [2\ -1\ -4\ -3]_2 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)} \mid \beta_k \mid$,	$S^3 = [-2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]_2 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)} \mid \beta_i \mid$,

$S^2 = [-2\ -1\ -4\ -3]_1$ (Umwendung um Axe).

[1]) Vgl. van Oss l. c. S. 32.

Elemente des Tetraeders:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|}
\begin{array}{lcccccl}
\mathfrak{b}_i & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \beta_i \\
\mathfrak{b}_k & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots \beta_k \\
\mathfrak{b}_l & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \dots \beta_m \\
\mathfrak{b}_m & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \dots \beta_l
\end{array}
&
\begin{array}{l}
(\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k) \dots \\[2em]
(\mathfrak{b}_l\ \mathfrak{b}_m) \dots
\end{array}
&
\begin{array}{ccc}
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\dots e^{(1)} \\[2em]
\dots e^{(1)\prime}
\end{array}
\right\}(45)$$

Die beiden anderen Kantenpaare sind zwei imaginäre Hauptkreispaare d.

$S = [1\ -2\ 3\ 4]_3 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)}\mid\beta_k\mid$, | $S = [-1\ 2\ -3\ -4]_3 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)}\mid\beta_k\mid$,

$S^3 = [-2\ 1\ -4\ -3]_3 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(-90^0)}\mid\beta_k\mid$, | $S^3 = [2\ -1\ 4\ 3]_3 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k)_{(90^0)}\mid\beta_i\mid$,

$S^2 = [2\ 1\ -4\ -3]_1$ (Umwendung um Axe).

Elemente des Tetraeders:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|}
\begin{array}{lcccccl}
\mathfrak{b}_i & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots \beta_i \\
\mathfrak{b}_k & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \beta_k \\
\mathfrak{b}_l & \dots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \dots \beta_m \\
\mathfrak{b}_m & \dots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \dots \beta_l
\end{array}
&
\begin{array}{l}
(\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k) \dots \\[2em]
(\mathfrak{b}_l\ \mathfrak{b}_m) \dots
\end{array}
&
\begin{array}{ccc}
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\dots e^{(1)} \\[2em]
\dots e^{(1)\prime}
\end{array}
\right\}(36)$$

Ueber die Darstellung dieser Drehspiegelungen durch drei aufeinander folgende einfache Spiegelungen an drei sich in dem festbleibenden Punkte schneidenden Hauptkugeln und die Beschaffenheit einer derartigen dreiflächigen sphärischen Ecke ist das in § 36 unter $6\beta_2^{(2)}$) am Ende Gesagte zu vergleichen.

$7\mathfrak{b}_1$) und $7\mathfrak{c}_1$) $2 \cdot 32 = 64$ sechszählige Drehspiegelungen. Von je zwei Punkten $\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{b}_l^{(1)}$ ($i = 1, \dots 8$, $l = 1, \dots 32$), welche auf einem der 16 Hauptkreise k', der Axe der 120^0 betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{b}_l^{(1)}$ fest, $\mathfrak{c}_i$ geht in den Gegenpunkt über, die Spiegelhauptkugel γ_i, welche durch die reciproke Polare k mit den beiden imaginären, unendlich fernen festbleibenden Punkten $\mathfrak{k}_0$ hindurchgeht, bleibt fest, während sich bei $\delta_l^{(1)}$ die Aussen- und Innenseite vertauscht. Die Darstellung einer solchen Drehspiegelung durch drei aufeinander folgende einfache Spiegelungen und die Beschaffenheit einer derartigen dreiflächigen sphärischen Ecke ist in § 36 unter $7\mathfrak{a}_1$) besprochen worden.

Beispiel zu $7\mathfrak{b}_1$):

$$S\ = [1\ -3\ -4\ -2]_2 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)})_{(120^0)}\ |\ \gamma_i\ |\ ,$$
$$S^5 = [1\ -4\ -2\ -3]_2 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)})_{(-120^0)}\ |\ \gamma_i\ |\ ,$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lcccccl} \mathfrak{c}_i & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots\ \gamma_i \\ \mathfrak{d}_l^{(1)} & \dots & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \dots\ \delta_l^{(1)} \\ \hline (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)}) & \dots\ k'\ \dots & & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \end{array} & \begin{array}{lccccl} \mathfrak{k}_0^{(1)} & \dots\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots\ \varkappa_0^{(2)} \\ \mathfrak{k}_0^{(2)} & \dots\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha & \dots\ \varkappa_0^{(1)} \\ \hline (k_0^{(1)}\ k_0^{(2)}) & \dots\ k\ \dots & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & ; \end{array} \end{array}$$

$$S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1 = k'_{(-120^0)} \text{ und } S^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1 = k'_{(120^0)}$$

sind die einfachen dreizähligen Drehungen um k' (vgl. § 36 A $2a_1$)),

$S^3 = [1\ -2\ -3\ -4]_2 = |\ \gamma_i\ |$ ist die einfache Spiegelung an γ_i.

Beispiel zu $7\mathfrak{c}_1$):

$$S\ = [-1\ 3\ 4\ 2]_3 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)})_{(120^0)}\ |\ \gamma_i\ |\ ,$$
$$S^5 = [-1\ 4\ 2\ 3]_3 = (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)})_{(-120^0)}\ |\ \gamma_i\ |\ ,$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lcccccl} \mathfrak{c}_i & \dots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots\ \gamma_i \\ \mathfrak{d}_l^{(1)} & \dots & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \dots\ \delta_l^{(1)} \\ \hline (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{d}_l^{(1)}) & \dots\ k'\ \dots & & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \end{array} & \begin{array}{lccccl} \mathfrak{k}_0^{(1)} & \dots\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots\ \varkappa_0^{(2)} \\ \mathfrak{k}_0^{(2)} & \dots\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha & \dots\ \varkappa_0^{(1)} \\ \hline (k_0^{(1)}\ k_0^{(2)}) & \dots\ k\ \dots & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & ; \end{array} \end{array}$$

$$S^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1 = k'_{(-120^0)} \text{ und } S^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1 = k'_{(120^0)},\ S^3 = [-1\ 2\ 3\ 4]_3 = |\ \gamma_i\ |.$$

$7\mathfrak{b}_2$) und $7\mathfrak{c}_2$) $2\,.\,32 = 64$ sechszählige Drehspiegelungen. Bei diesen bleibt $\mathfrak{c}_i$ fest, während $\mathfrak{d}_l^{(1)}$ in den Gegenpunkt übergeht, $\delta_l^{(1)}$ ist Spiegelhauptkugel und die Drehung um die Axe k' beträgt 60^0 (bez. -60^0). S^2 und S^4 sind wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um k', dagegen bedeutet S^3 die Inversionsspiegelung. Wegen der Beschaffenheit der dreiflächigen sphärischen Ecke, durch Spiegelung an deren Hauptkugeln die Drehspiegelung erzeugt werden kann, ist das in § 36 unter $7a_2$) Gesagte zu vergleichen.

Beispiel zu $7\mathfrak{b}_2$):

$$S\ = [-1\ 3\ 4\ 2]_2 = k'_{(-60^0)}\ |\ \delta_l^{(1)}\ |\ ,$$
$$S^5 = [-1\ 4\ 2\ 3]_2 = k'_{(60^0)}\ |\ \delta_l^{(1)}\ |\ ,$$

S^2 und S^4, Tetraeder wie unter $7\mathfrak{b}_1$), $S^3 = [-1\ 2\ 3\ 4]_2 = k'_{(180^0)}\ |\ \delta_l^{(1)}\ |$ die In-

versionsspiegelung (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch $\mathfrak{c}_i$).

Beispiel zu 7 $\mathfrak{c}_2$):

$$S = [1\ -3\ -4\ -2]_3 = k'_{(-60^0)} \mid \delta_l^{(1)} \mid ,$$

$$S^5 = [1\ -4\ -2\ -3]_3 = k'_{(60^0)} \mid \delta_l^{(1)} \mid ,$$

S^2 und S^4, Tetraeder wie unter 7 $\mathfrak{c}_1$), $S^3 = [1\ -2\ -3\ -4]_3 = k'_{(180^0)} \mid \delta_l^{(1)} \mid$ die Inversionsspiegelung (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch $\mathfrak{c}_i$).

7 $\mathfrak{d}_1$) 2 . 48 = 96 sechszählige Drehspiegelungen, deren Beschaffenheit im Wesentlichen dieselbe, wie der unter 7 $\mathfrak{a}_1$), 7 $\mathfrak{b}_1$), 7 $\mathfrak{c}_1$) betrachteten ist. Von den beiden Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{d}_l^{(2)}$ ($i = 1, \ldots 12,\ l = 1, \ldots 48$), welche auf einem der 16 Hauptkreise k, der Axe der 120^0 betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{d}_l^{(2)}$ fest, während $\mathfrak{b}_i$ in den Gegenpunkt übergeht, die festbleibende Spiegelhauptkugel β_i geht durch die reciproke Polare k' mit den imaginären, unendlich fernen, festbleibenden Punkten $\mathfrak{k}_{(0)}$ (vergl. § 3 (12β)) hindurch.

Beispiel: $S = [1\ \ 2\ \ 4\ \ 3]_3 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{d}_l^{(2)})_{(120^0)} \mid \beta_i \mid ,$

$$S^5 = [-1\ -2\ -4\ -3]_2 = (\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{d}_l^{(2)})_{(-120^0)} \mid \beta_i \mid ,$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{b}_i \ \ldots\ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \ldots\ \beta_i \\ \mathfrak{d}_l^{(2)} \ \ldots\ 0 \ -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ \ldots\ \delta_l^{(2)} \\ \hline \mathfrak{b}_i\ \mathfrak{d}_l^{(2)}) = k \ \ldots \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathfrak{k}_{(0)}^{(1)} \ \ldots\ \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ \ldots\ \varkappa_0^{(2)} \\ \mathfrak{k}_{(0)}^{(2)} \ \ldots\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ \ldots\ \varkappa_0^{(1)} \\ \hline (\mathfrak{k}_{(0)}^{(1)}\ \mathfrak{k}_{(0)}^{(2)}) \ ..\ k' \ \ldots \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| ; \end{array} \right.$$

$S^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_2 = k_{(-120^0)}$, $S^4 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]_3 = k'_{(120^0)}$, $S^3 = [1\ \ 2\ \ 4\ \ 3]_1 = \mid \beta_i \mid$.

7 $\mathfrak{d}_2$) 2 . 48 = 96 sechszählige Drehspiegelungen. Die Punkte $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{d}_l^{(2)}$ vertauschen sich, insofern $\mathfrak{b}_i$ fest bleibt, $\mathfrak{d}_l^{(2)}$ in den Gegenpunkt übergeht, $\delta_l^{(2)}$ wird die Spiegelhauptkugel und die Drehungen um die Axe k betragen 60^0 (bez. -60^0). S^3 bedeutet die Inversionsspiegelung.

Beispiel: $S = [-1\ -2\ -4\ -3]_3 = k_{(-60^0)} \mid \delta_l^{(2)} \mid ,$

$$S^5 = [1\ \ 2\ \ 4\ \ 3] = k_{(60^0)} \mid \delta_l^{(2)} \mid ,$$

S^2 u. S^4 wie unter 7 $\mathfrak{d}_1$), ebenso das Tetraeder. $S^3 = [-1\ -2\ -4\ -3]_1 = k_{(180^0)} \mid \delta_l^{(2)} \mid$ ist die Inversionsspiegelung an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch $\mathfrak{b}_i$.

Damit sind auch die $192 + 384 = 576$ einfachen und dreifachen Spiegelungen, welche das Gewebe G_3 in sich überführen, vollständig angegeben.

A') Correlationen, welche eigentlich orthogonalen Substitutionen entsprechen.

Zu den in § 36 unter A) $1\alpha'_1$), $1\alpha'_2$), $1\beta'_1$), $1\beta'_2$), $1\gamma'_1$), $1\gamma'_2$), $2\mathrm{a}'_1$), $2\mathrm{a}'_2$), $3\alpha'_1$), $3\alpha'_2$), $3\beta'_1$), $3\beta'_2$), $3\gamma'_1$), $3\gamma'_2$) aufgeführten 192 derartigen Correlationen treten folgende 384 hinzu.

$2\mathrm{b}'_1$) und $2\mathrm{c}'_1$) $2 \,.\, 16 = 32$ sechszählige allgemeine Correlationen (vgl. § 36 A') $2\mathrm{a}'_1$). Das Haupttetraeder hat ebenfalls die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{k}_{(0)}$ und $\mathfrak{k}_0$ von k und k' zu Eckpunkten (vgl. § 8 III (49η) und (49ϑ)), die geraden Potenzen von S' bedeuten hier die einfachen dreizähligen Drehungen um k (vgl. unter $2\,\mathrm{b}_1$), $2\,\mathrm{c}_1$), S'^3 bedeutet die Polarreciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}\infty$.

Z. B. $S' = \overline{[-1 \; -2 \; -3 \; -4]}_2$, $S'^5 = \overline{[1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]}_3$;

$S'^2 = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]_3$, $S'^4 = [-1 \; -2 \; -3 \; -4]_2$; $S'^3 = \overline{[1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]}_1$.

$2\mathrm{b}'_2$) und $2\mathrm{c}'_2$) $2 \,.\, 16 = 32$ sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bez. dasselbe wie unter $2\mathrm{b}'_1$), $2\mathrm{c}'_1$) ist; S'^2 und S'^4 sind wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um k, S'^3 dagegen bedeutet die inverse Polarreciprocität $1\alpha'_2$) (§ 36).

Z. B. $S' = \overline{[1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]}_2$; $S'^5 = \overline{[-1 \; -2 \; -3 \; -4]}_3$;

$S'^2 = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]_3$, $S'^4 = [-1 \; -2 \; -3 \; -4]_2$; $S'^3 = \overline{[-1 \; -2 \; -3 \; -4]}_1$.

$3\alpha_1{}^{(1)'}$) 24 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die sphärischen Flächen $\mathfrak{F}^{(4)}$ (vgl. § 31 unter 2)), z. B.

$S' = \overline{[1 \; -2 \; -4 \; -3]}_2$ und $S' = \overline{[-1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3]}_3$.

$3\alpha_2{}^{(1)'}$) 24 eigentliche inverse Polar-Correlationen in Bezug auf die sphärischen Flächen $\mathfrak{F}^{(4)}$, z. B.

$S' = \overline{[-1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3]}_2$ und $S' = \overline{[1 \; -2 \; -4 \; -3]}_3$.

$3\beta_1{}^{(1)'}$) $2 \,.\, 12 = 24$ vierzählige Axencorrelationen der ersten Art mit reellem Axenpaar $e^{(1)}$ ($e^{(1)'}$). Es bleiben die Hauptkreise der beiden sphärischen Strahlbüschel ($\mathfrak{c}_i$, γ_k) und ($\mathfrak{c}_k$, γ_i) fest. S'^2 ist die Umwendung um die Axe $e^{(1)}$.

z. B. $S' = \overline{[3\ \ 4\ \ 2\ -1]}_2$ und $S' = \overline{[3\ -4\ -2\ -1]}_3$

$S'^3 = \overline{[2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]}_2$; $S'^3 = [4\ -3\ -1\ -2]_3$;

$\overline{S'^2} = [2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)}_{(180^0)}$ $\overline{S'^2} = [-2\ -1\ \ 4\ \ 3]_1 = e^{(1)'}_{(180^0)}$

$\mathfrak{c}_i \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \gamma_i$ $\mathfrak{c}_i \ldots -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \gamma_i$

$\mathfrak{c}_k \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \gamma_k$ $\mathfrak{c}_k \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \gamma_k$

$e^{(1)} = (45)$ $e^{(1)} = (36)$.

$3\beta_2{}^{(1)'}$) 2 . 12 = 24 inverse vierzählige Axencorrelationen der ersten Art z. B.

$S' = \overline{[-3\ -4\ -2\ \ 1]}_2$, $S'^3 = \overline{[-2\ -1\ -4\ -3]}_2$ und $S' = \overline{[-3\ \ 4\ \ 2\ \ 1]}_3$, $S'^3 = \overline{[-4\ \ 3\ \ 1\ \ 2]}_3$.

S'^2 und $\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_k$; γ_i, γ_k wie bez. unter $3\beta_1{}^{(1)'}$).

$3\gamma_1{}^{(1)'}$) und $3\gamma_2{}^{(1)'}$) 4 . 24 = 96 achtzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{F}^{(3)}$ (vgl. § 31 unter 6a)); S'^2 und S'^6 bedeuten die vierzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz bilden (vgl. $3\gamma_1{}^{(1)}$ und $3\gamma_1{}^{(2)}$), S'^4 bedeutet die Inversion.

z. B. $S' = \overline{[1\ 4\ 3\ -2]}_2$, $S'^3 = \overline{[-4\ 1\ 2\ 3]}_2$, $S'^5 = \overline{[-1\ -4\ -3\ 2]}_2$, $S'^7 = \overline{[4\ -1\ -2\ -3]}_2$;

$S'^2 = [-2\ 1\ -4\ 3]_1 = d'_{0(90^0)}\ d_{0(-90^0)}$, $S'^6 = [2\ -1\ 4\ -3]_1 = d'_{0(-90^0)}\ d_{0(90^0)}$,

$S'^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$;

$$F^{(3)} \ldots z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2\,z_1\,z_4 + 2\,z_2\,z_3 = 0.$$

und $S' = \overline{[3\ -1\ 4\ 2]}_3$, $S'^3 = \overline{[1\ 3\ -2\ 4]}_3$, $S'^5 = \overline{[-3\ 1\ -4\ -2]}_3$, $S'^7 = \overline{[-1\ -3\ 2\ -4]}_3$;

$S'^2 = [-2\ 1\ -4\ 3]_1 = d'_{0(90^0)}\ d_{0(-90^0)}$, $S'^6 = [2\ -1\ 4\ -3]_1 = d'_{0(-90^0)}\ d_{0(90^0)}$;

$S'^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$;

$$F^{(3)} \ldots z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + 2\,z_1\,z_3 + 2\,z_4\,z_2 = 0.$$

Die festbleibenden Leithauptkreise der beiden speciellen Complexe und zugleich der linearen Congruenzen für S'^2 und S'^4 sind die beiden imaginären Hauptkreise $e^{(2)} = (35)$.

$4\alpha'$) 4 . 8 = 32 zwölfzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{K}_\infty$; S'^4 und S'^8 bedeuten die dreizähligen, S'^2 und S'^{10} die sechszähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar k_0 bilden (vergl. unter $4\alpha_1$) und $4\alpha_2$)), S'^6 bedeutet die Inversion, S'^9 und S'^3 bedeuten die Polarreciprocität und die inverse Polar-Correlation in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 36 unter A' $1\alpha'_1$), $1\alpha'_2$)).

Z. B. $S' = [\overline{1\ 3\ 4\ 2}]_2$, $S'^5 = [\overline{-1\ -4\ -2\ -3}]_3$, $S'^7 = [\overline{-1\ -3\ -4\ -2}]_2$, $S'^{11} = [\overline{1\ 4\ 2\ 3}]_3$;
$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_3$, $S'^4 = [-1\ -3\ -4\ -2]_2$, $S'^8 = [-1\ -4\ -2\ -3]_3$, $S'^{10} = [1\ 3\ 4\ 2]_2$;
$S'^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$; $S'^3 = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1$, $S'^9 = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$.

$4\beta'$) 4 . 24 zwölfzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{F}^{(6)}$ (vgl. § 7 unter 6)); die geraden Potenzen von S' haben dieselbe Bedeutung, wie unter $4\alpha'$), dagegen bedeuten S'^3 und S'^9 vierzählige Null-Correlationen, deren zugehöriger sphärischer Complex je ein Fundamental-Complex $\mathfrak{x}_i = 0$ ist (vergl. § 36 unter A') $1\gamma'_1$), $1\gamma'_2$)).

Z. B. $S' = [\overline{3\ -1\ -2\ 4}]_2$, $S'^5 = [\overline{4\ -1\ -3\ 2}]_3$, $S'^7 = [\overline{-3\ 1\ 2\ -4}]_2$, $S'^{11} = [\overline{-4\ 1\ 3\ -2}]_3$;
$S'^2 = [-1\ -4\ -2\ -3]_3$, $S'^4 = [-1\ -3\ -4\ -2]_2$, $S'^8 = [1\ 4\ 2\ 3]_3$, $S'^{10} = [1\ 3\ 4\ 2]_2$;
$S'^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$; $S'^3 = [\overline{-2\ 1\ 4\ -3}]_1$, $S'^9 = [\overline{2\ -1\ -4\ 3}]_1$;

$$F^{(6)} \ \ldots \ z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2 z_1 z_3 + 2 z_1 z_4 + 2 z_4 z_2 + 2 z_2 z_3 = 0.$$

Damit sind die $192 + 384 = 576$ eigentlichen Correlationen, welche das Gewebe G_3 in sich überführen, vollständig angegeben.

B') Correlationen, welche uneigentlich orthogonalen Substitutionen entsprechen.

Zu den in § 36 unter B') $6\alpha'_1$) .. $6\alpha'_2$), $\beta_1^{(1)'}$.. $\beta_2^{(2)'}$, $7a'_1$) und $7a'_2$) angegebenen 192 uneigentlichen Correlationen treten folgende 384 hinzu.

$6\alpha_1^{(3)'}$) 8 uneigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die Projectionen der 8 Flächen $F^{(2)}$ (§ 7 unter 2)), welche zu je vier das Fundamentaltetraeder T_2 oder T_3 als Polartetraeder gemein haben, auf S_3.

z. B. $S' = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_3$,

$$F^{(2)} \ \ldots \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 2 z_1 z_2 + 2 z_1 z_3 + 2 z_1 z_4 - 2 z_3 z_4 - 2 z_4 z_2 - 2 z_2 z_3 = 0$$

und $S' = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_2$,

$$F^{(2)} \ \ldots \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2 z_1 z_2 - 2 z_1 z_3 - 2 z_1 z_4 - 2 z_3 z_4 - 2 z_4 z_2 - 2 z_2 z_3 = 0.$$

$6\alpha_2^{(3)'}$) 8 inverse uneigentliche Polarcorrelationen; Flächen wie unter $6\alpha_1^{(3)'}$.

Z. B. $S' = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_3$ und $S' = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_2$.

$6\beta_1^{(3)'}$) 24 vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art mit reellem Axenpaar $e^{(1)}$ ($e^{(1)'}$). Die Mittelpunkte der festbleibenden sphärischen Strahlbüschel sind zwei Punkte $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_k$, welche bez. um Achtelskreise von den Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ (vgl. $6\beta_1^{(3)}$) abstehen (vgl. § 32 II B unter 2a)).

$6\beta_2^{(3)\prime}$) 24 vierzählige Axencorrelationen der zweiten Art. Dieselben sind die inversen der unter $6\beta_1^{(3)\prime}$), insofern die Gegenpunkte $\mathfrak{c}'_i$, $\mathfrak{c}'_k$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln γ_i, γ_k auftreten.

Beispiele zu $6\beta_1^{(3)\prime}$):

$$S' = \overline{[1\ -2\ 3\ 4]}_2,\ S'^3 = \overline{[2\ -1\ -4\ -3]}_2 \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{c}_i \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \gamma_i \\ \mathfrak{c}_k \ldots \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \gamma_k \end{array} \right.$$

$S'^2 = [-2\ -1\ -4\ -3]_1$ Umwendung um Axe $(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_k) = (45)$ und

$$S' = \overline{[1\ -2\ 3\ 4]}_3,\ S'^3 = \overline{[-2\ 1\ -4\ -3]}_3 \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{c}_i \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \gamma_i \\ \mathfrak{c}_k \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \ldots \gamma_k \end{array} \right.$$

$S'^2 = [2\ 1\ -4\ -3]_1$ Umwendung um Axe $(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_k) = (36)$.

Beispiele zu $6\beta_2^{(3)\prime}$):

$S' = \overline{[-1\ 2\ -3\ -4]}_2$, $S'^3 = \overline{[-2\ 1\ 4\ 3]}_2$, S'^2 und $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_k$ wie bez. unter $6\beta_1^{(3)\prime}$)
und $S' = \overline{[-1\ 2\ -3\ -4]}_3$, $S'^3 = \overline{[2\ -1\ 4\ 3]}_3$, „ „ „ „ „ .

$7\mathfrak{b}'_1$) und $7\mathfrak{c}'_1$) $2 \cdot 32 = 64$ sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen. Die beiden imaginären Eckpunkte (und Hauptkugeln) des Haupttetraeders sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung (vgl. $7\mathfrak{b}_1$) und $7\mathfrak{c}_1$), nämlich 2 Punkte $\mathfrak{k}_0$ (2 Hauptkugeln $\varkappa_0$) auf k, während die beiden reellen Eckpunkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ von denjenigen $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{d}_l^{(1)}$ um einen Achtelskreis abstehen; S'^2 und S'^4 sind die dreizähligen einfachen Drehungen um k', S'^3 die Polar-Correlation in Bezug auf die Projection $\mathfrak{F}^{(2)}$ einer Fläche $F^{(2)}$ auf S_3.

Beispiel zu $7\mathfrak{b}'_1$):

$$S' = \overline{[1\ -3\ -4\ -2]}_2,\ S'^5 = \overline{[1\ -4\ -2\ -3]}_2;$$
$$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1 = k'_{(-120^\circ)},\ S'^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1 = k'_{(120^\circ)};$$
$$S'^3 = \overline{[1\ -2\ -3\ -4]}_2;$$

Elemente des Haupttetraeders:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{p}_i \ldots \frac{1}{2}c_1\ \ \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}} \ldots \pi_i \\ \mathfrak{p}_k \ldots -\frac{1}{2}c_2\ \ \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}} \ldots \pi_k \\ \hline (\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = k' \ldots \left| \frac{1}{\sqrt{3}}_0\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}_0\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}_0 \right| \end{array} \right\} \text{vgl. § 2 } (8\gamma) \text{ § 4 } (13\vartheta)$$

$$F^{(2)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-2z_1z_2-2z_1z_3-2z_1z_4-2z_3z_4-2z_4z_2-2z_2z_3=0.$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{k}_0^{(1)} \ldots 0 \quad 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \ \ldots \varkappa_0^{(2)} \\ \mathfrak{k}_0^{(2)} \ldots 0 \quad 1 \quad \alpha^2 \quad \alpha \ \ldots \varkappa_0^{(1)} \\ \hline (\mathfrak{k}_0^{(1)}\mathfrak{k}_0^{(2)}) = k \ldots \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}. \end{array}$$

Die beiden anderen Kantenpaare des Tetraeders sind 2 imaginäre Hauptkreispaare t (vgl. § 4 unter 7)).

Beispiel zu $7c'_1$):

$S' = [\overline{-1\ 3\ 4\ 2}]_3$, $S'^5 = [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_5$;
$S'^2 = [1\ 4\ 2\ 3]_1$, $S'^4 = [1\ 3\ 4\ 2]_1$;
$S'^3 = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_3$;

Elemente des Haupttetraeders:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{p}_i \ \ldots \ \frac{1}{2}c_2 \quad \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{3}} \ldots \pi_i \\ \mathfrak{p}_k \ \ldots -\frac{1}{2}c_1 \quad \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2}\frac{c_2}{\sqrt{3}} \ldots \pi_k \\ \hline (\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k) = k' \ldots \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$F^{(2)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+2z_1z_2+2z_1z_3+2z_1z_4-2z_3z_4-2z_4z_2-2z_2z_3=0;$$

$\mathfrak{k}_0^{(1)}$, $\mathfrak{k}_0^{(2)}$ wie unter $7b'_1$).

$7b'_2$) und $7c'_2$) 2 . 32 = 64 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen derjenigen unter $7b'_1$), $7c'_1$) sind. S' und S'^5 werden einfach durch Umkehrung aller Vorzeichen aus S' und S'^5 in $7b'_1$) und $7c'_1$) erhalten, S'^2 und S'^4 sind dieselben, wie in $7b'_1$), $7c'_1$), dagegen bedeutet S'^3 (in den Beispielen

$$S'^3 = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_2 \text{ und } S'^3 = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_3)$$

die inverse Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(2)}$.

$7d'_1$) 2 . 48 = 96 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen. Die Beschaffenheit derselben ist im Wesentlichen mit derjenigen der unter $7a'_1$), $7b'_1$), $7c'_1$) betrachteten übereinstimmend. Die beiden imaginären Eckpunkte (Hauptkugeln) des Haupttetraeders sind zwei Punkte $\mathfrak{k}_0$ (zwei Hauptkugeln $\varkappa_0$) (vgl. unter $7d_1$)), die beiden reellen Punkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ stehen von den Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_l^{(2)}$ um einen Achtelskreis ab. S'^2 und S'^4 sind einfache dreizählige Drehungen um k, S'^3 ist die Polar-Correlation in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(2)}$.

Z. B. $S' = [\overline{1\ 2\ 4\ 3}]_3,\ S'^5 = [\overline{-1\ -2\ -4\ -3}]_2;$

$$S'^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_2 = k_{(-120^0)},\ S'^4 = [1\ 2\ 4\ 3]_3 = k_{(120^0)};$$

$$S'^3 = [\overline{1\ 2\ 4\ 3}]_1;$$

$$F^{(2)}\ \ldots\ z_1^2 + z_2^2 + 2\,z_3\,z_4 = 0.$$

Elemente des Haupttetraeders:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{p}_i\ \ldots\ 0\quad \sqrt{\frac{1}{3}}\quad -\frac{c_1}{\sqrt{6}}\quad \frac{c_2}{\sqrt{6}}\ \ldots\ \pi_i \\ \mathfrak{p}_k\ \ldots\ 0\quad \sqrt{\frac{1}{3}}\quad \frac{c_2}{\sqrt{6}}\quad -\frac{c_1}{\sqrt{6}}\ \ldots\ \pi_k \\ \hline (\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) = k\ \ldots\ \left| \begin{matrix} \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \overset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{matrix} \right| \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{f}^{(1)}_0\ \ldots\ \frac{i}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ldots\ \varkappa^{(2)}_{(0)} \\ \mathfrak{f}^{(1)}_0\ \ldots\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ldots\ \varkappa^{(1)}_{(0)} \\ \hline (\mathfrak{f}^{(1)}_0\ \mathfrak{f}^{(2)}_0) = k'\ \ldots\ \left| \begin{matrix} \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} & \underset{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{matrix} \right|. \end{array}$$

Die beiden anderen Kantenpaare des Haupttetraeders sind zwei Hauptkreispaare t (vgl. § 7 unter 7)).

7d'$_2$) 2 . 48 = 96 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen der vorhergehenden 7d'$_1$) sind. Vgl. die Bemerkungen zu 7b'$_2$) und 7c'$_2$).

Damit sind auch die 192 + 384 = 576 uneigentlichen Correlationen, welche das Gewebe G_3 in sich überführen, vollständig aufgestellt.

§ 40.

II. Transformationen, durch welche der Verein der beiden conjugirten Gewebe G_3 und G'_3 in sich übergeht.

Die Gesammtheit dieser Transformationen (vergl. § 39 am Anfang) umfasst 2304 Collineationen und ebensoviele Correlationen, welche sich durch den Process der Uebertragung aus dem Raum R_3 in den sphärischen S_3 aus den Substitutionen der in § 23 II) betrachteten Gruppe $G^{(1)}_{2304}$ (bezw. $G^{(1)c}_{1152}$) ergeben. Die Substitutionen der Untergruppe $G^{(1)}_{1152}$ (bez. $G^{(1)c}_{576}$), welche die 1152 Collineationen und ebenso viele Correlationen als Transformationen des Gewebes G_3 in sich liefern, sind im Vorhergehenden betrachtet worden. Es treten also zu diesen noch 1152 Collineationen und ebenso viele Correlationen hinzu, welche aus 8a), 8b), 8c), 9a), 9b), 9c) und aus 5a), 5b), 5c) der Tabelle $G^{(1)}_{2304}$ in § 23 II) resultiren. Die bezüglichen Substitutionen in orthogonalen Coordinaten beziehen sich im Anschluss an die früheren Bezeichnungen auf die drei Fundamentaltetraeder T_4, T_5, T_6.

A) Bewegungen (zwei- oder vierfache Spiegelungen).

$8\alpha_1$) 3 . 12 = 36 Umwendungen um je einen der 36 reellen Hauptkreise d_0 (vgl. § 38 unter 4)).

z. B. $S = [2\ -1\ 4\ 3]_4$ um sphärischen Hauptkreis d_0 mit $\mathfrak{p}_{ik}$-Coordinaten:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

(vgl. § 17 A 1) unter (86α)).

$8\alpha_2$) 3 . 12 = 36 Umwendungen um je einen der 36 reellen Hauptkreise d'_0.

z. B. $S = [-2\ 1\ -4\ -3]_4$ um sphärischen Hauptkreis d'_0 mit $\mathfrak{p}_{ik}$-Coordinaten:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Weitere Beispiele siehe in § 17 unter (86α).

$8\beta_1$) und $8\beta_2$) 2 . 12 = 24 vierzählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der Schraubenaxen eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise zwei der 24 imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise $d_0^{(1)}$ sind (vgl. § 17, ($86\alpha'$) und § 28 unter d).

z. B. $\left\{\begin{array}{l} S = [-2\ 1\ 4\ 3]_4 = e_{(90^0)}\ e'_{(90^0)} \ldots \\ S^3 = [2\ -1\ -4\ -3]_4 = e_{(-90^0)}\ e'_{(-90^0)} \ldots \end{array}\right\}$ Leithauptkreise $d_0^{(1)} \ldots \begin{vmatrix} \pm\frac{i}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \mp\frac{i}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$.

$S^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ ist die Inversion.

$8\gamma_1$) und $8\gamma_2$) 4 . 6 = 24 achtzählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der Schraubenaxen eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise zwei der 12 imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise $e^{(2)}$ sind. (Vgl. § 28 unter $d\beta$) und § 17 A 2) unter (86β)).

z. B. $\left\{\begin{array}{l} S = [3\ -4\ 1\ 2]_4,\ S^3 = [-4\ -3\ -2\ 1]_4,\ S^5 = [-3\ 4\ -1\ -2]_4,\ S^7 = [4\ 3\ 2\ -1]_4, \\ = e_{(45^0)}\ e'_{(-135^0)} \ldots,\ = e_{(135^0)}\ e'_{(-45^0)} \ldots,\ = e_{(-135^0)}\ e'_{(45^0)} \ldots,\ = e_{(-45^0)}\ e'_{(135^0)} \ldots; \end{array}\right\}$

$S^2 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = e_{(90^0)}\ e'_{(-90^0)} \ldots$ und $S^6 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = e_{(-90^0)}\ e'_{(90^0)} \ldots$

sind vierzählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der Schraubenaxen dieselbe lineare Congruenz mit den Leithauptkreisen $e^{(2)}$, deren $\mathfrak{x}_i$-Coordinaten $0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \pm i \ldots$ (46) sind, bildet (vergl. § 36 unter A $1\gamma_1$), $1\gamma_2$)); $S^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ ist die Inversion.

$8\delta_1$) und $8\delta_2$) 4 . 18 = 72 allgemeine achtzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen zwei reelle Hauptkreise e, e' sind, während das festbleibende imaginäre Tetraeder eines der 9 imaginären Fundamentaltetraeder $T_7 \,..\, T_{15}$ ist. Die geraden Potenzen S^2, S^6 bedeuten wiederum, wie unter $8\gamma_1$), $8\gamma_2$) vierzählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem der imaginären Hauptkreispaare $e^{(2)}$ des festbleibenden Tetraeders bildet, S^4 ist die Inversion. Vgl. § 17 A 3) unter (86δ).

$$\text{Z. B.} \begin{cases} S = [-1\ 2\ 3\ 4]_4, & S^3 = [-2\ -1\ 4\ -3]_4, & S^5 = [1\ -2\ -3\ -4]_4, & S^7 = [2\ 1\ -4\ 3]_4 \\ \quad = e_{(-45^0)}\ e'_{(-135^0)}, & \quad = e_{(-135^0)}\ e'_{(-45^0)}, & \quad = e_{(135^0)}\ e'_{(45^0)}, & \quad = e_{(45^0)}\ e'_{(135^0)} \end{cases};$$

$$S^2 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = e_{(-90^0)}\ e'_{(90^0)},\quad S^6 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = e_{(90^0)}\ e'_{(-90^0)}$$

(vgl. unter $8\gamma_1$) $8\gamma_2$)); $S^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ Inversion.
Die Elemente des Haupttetraeders sind diejenigen von T_{15} (vgl. § 10 (79ε)). Die Schraubenaxen sind die beiden Hauptkreise (23), die Leithauptkreise die beiden Hauptkreise (46).

$9\alpha_1$) und $9\alpha_2$) 4 . 48 = 192 allgemeine zwölfzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen zwei reelle Hauptkreise l, l' (vgl. § 38 unter 4) sind. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders, dessen Eckpunkte 4 imaginäre Punkte $\mathfrak{h}_0^{(d)} = \mathfrak{i}_0^{(k)}$, dessen Hauptkugeln vier imaginäre Hauptkugeln $\zeta_0^{(d)} = \iota_0^{(k)}$ und dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen l, l' je ein imaginäres Hauptkreispaar k_0 und d_0 sind, entsprechen genau den früher (§ 8 C I unter 10) angegebenen.

$$\text{Z. B.} \begin{cases} S = [-1\ 4\ 2\ 3]_4, & S^5 = [-3\ 1\ 2\ -4]_5, & S^7 = [1\ -4\ -2\ -3]_4, & S^{11} = [3\ -1\ -2\ 4]_5 \\ \quad = l_{(30^0)}\ l'_{(150^0)}, & \quad = l_{(150^0)}\ l'_{(30^0)}, & \quad = l_{(-150^0)}\ l'_{(-30^0)}, & \quad = l_{(-30^0)}\ l'_{(-150^0)} \end{cases} \text{vgl. } (89\alpha);$$

$$\begin{aligned} S^2 &= [2\ -3\ -1\ 4]_3, & S^4 &= [-2\ -4\ 3\ 1]_2, & S^8 &= [-2\ 3\ 1\ -4]_3, & S^{10} &= [2\ 4\ -3\ -1]_2 \\ &= l_{(60^0)}\ l'_{(-60^0)}, & &= l_{(120^0)}\ l'_{(-120^0)}, & &= l_{(-120^0)}\ l'_{(120^0)}, & &= l_{(-60^0)}\ l'_{(60^0)} \end{aligned}$$

sind sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Hauptkreiskantenpaar k_0 bilden (vgl. § 39 unter $4\alpha_1$) und $4\alpha_2$)) und wobei S^4, S^8 dreizählige Doppeldrehungen darstellen;

$$\begin{aligned} S^3 &= [-4\ 3\ 2\ 1]_6, & S^9 &= [4\ -3\ -2\ -1]_6 \\ &= l_{(90^0)}\ l'_{(90^0)}, & &= l_{(-90^0)}\ l'_{(-90^0)} \end{aligned}$$

bedeuten vierzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Hauptkreiskantenpaar d_0 bilden (vgl. $8\beta_1$) und $8\beta_2$)), und endlich $S^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1 = l_{(180^0)}\ l'_{(180^0)}$ bedeutet die Inversion.

$9\beta_1$) und $9\beta_2$) $8 . 24 = 192$ allgemeine 24-zählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen zwei reelle Hauptkreise h, h' sind. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders sind dieselben, wie für die § 39 unter $4\beta_1$) $4\beta_2$) betrachteten zwölfzähligen Doppeldrehungen, welche durch die geraden Potenzen S^2, S^{10}, S^{14}, S^{22} einer vierundzwanzigzähligen Substitution S dargestellt werden. Die Potenzen S^4, S^8, S^{16}, S^{20} sind sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Hauptkreisaxenpaar k_0 (vgl. § 39 unter $4\alpha_2$)), die Potenzen S^6, S^{18} vierzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Axenpaar $e^{(2)}$ bilden (vgl. § 36 unter A $1\gamma_1$) $1\gamma_2$)), S^{12} ist die Inversion. Die ungeraden Potenzen S^3, S^9, S^{15}, S^{21} bedeuten die unter $8\gamma_1$), $8\gamma_2$)) betrachteten achtzähligen Doppeldrehungen, bei welchen die Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Axenpaar $e^{(2)}$ bilden. Z. B. (vgl. § 20 unter A 2)):

$$\left.\begin{array}{llll} S = [1\ 4\ {-2}\ 3]_4, & S^5 = [4\ 2\ {-1}\ 3]_5, & S^7 = [-3\ {-2}\ {-4}\ 1]_4, & S^{11} = [-3\ {-1}\ {-2}\ 4]_5 \\ \quad = h_{(15^0)}\, h'_{(75^0)}, & \quad = h_{(75^0)}\, h'_{(15^0)}, & \quad = h_{(105^0)}\, h'_{(165^0)}, & \quad = h_{(165^0)}\, h'_{(105^0)} \\ S^{13} = [-1\ {-4}\ 2\ {-3}]_4, & S^{17} = [-4\ {-2}\ 1\ {-3}]_5, & S^{19} = [3\ 2\ 4\ {-1}]_4, & S^{23} = [3\ 1\ 2\ {-4}]_5 \\ \quad = h_{(-165^0)}\, h'_{(-105^0)}, & \quad = h_{(-105^0)}\, h'_{(-165^0)}, & \quad = h_{(-75^0)}\, h'_{(-15^0)}, & \quad = h_{(-15^0)}\, h'_{(-75^0)} \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{llll} S^2 = [1\ {-4}\ {-2}\ 3]_3, & S^{10} = [4\ 2\ 1\ 3]_2, & S^{14} = [-1\ 4\ 2\ {-3}]_3, & S^{22} = [-4\ {-2}\ {-1}\ {-3}]_2 \\ \quad = h_{(30^0)}\, h'_{(150^0)}, & \quad = h_{(150^0)}\, h'_{(30^0)}, & \quad = h_{(-150^0)}\, h'_{(-30^0)}, & \quad = h_{(-30^0)}\, h'_{(-150^0)} \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{llll} S^4 = [3\ {-1}\ 2\ {-4}]_2, & S^8 = [-3\ {-2}\ 4\ 1]_3, & S^{16} = [-3\ 1\ {-2}\ 4]_2, & S^{20} = [3\ 2\ {-4}\ {-1}]_3 \\ \quad = h_{(60^0)}\, h'_{(-60^0)}, & \quad = h_{(120^0)}\, h'_{(-120^0)}, & \quad = h_{(-120^0)}\, h'_{(120^0)}, & \quad = h_{(-60^0)}\, h'_{(60^0)} \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{ll} S^6 = [-4\ 3\ {-2}\ 1]_1, & S^{18} = [4\ {-3}\ 2\ {-1}]_1 \\ \quad = h_{(90^0)}\, h'_{(90^0)}, & \quad = h_{(-90^0)}\, h'_{(-90^0)} \end{array}\right\};$$

$$S^{12} = [-1\ {-2}\ {-3}\ {-4}]_1 = h_{(180^0)}\, h'_{(180^0)};$$

$$\left.\begin{array}{llll} S^3 = [-3\ {-4}\ 1\ {-2}]_6, & S^9 = [2\ 1\ 4\ {-3}]_6, & S^{15} = [3\ 4\ {-1}\ 2]_6, & S^{21} = [-2\ {-1}\ {-4}\ 3]_6 \\ \quad = h_{(45^0)}\, h'_{(-135^0)} & \quad = h_{(135^0)}\, h'_{(-45^0)} & \quad = h_{(-135^0)}\, h'_{(45^0)} & \quad = h_{(-45^0)}\, h'_{(135^0)} \end{array}\right\}.$$

Hiermit sind die 576 hierher gehörigen Bewegungen vollständig angegeben.

B) Ein- und dreifache Spiegelungen.

$5\alpha_1$) $2 . 72 = 144$ vierzählige Drehspiegelungen. Von den beiden Punkten $\mathfrak{d}_0^{(i)}$, $\mathfrak{d}_0^{(k)}$ (vgl. § 3 (12γ)), welche auf einem der $24 + 48 = 72$ Hauptkreise d (d'), der Axe der 90^0 betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{d}_0^{(i)}$ fest, während $\mathfrak{d}_0^{(k)}$ in den Gegenpunkt übergeht; die durch die reciproke Polare d' (d), deren imaginäre unendlich ferne Punkte festbleiben, hindurchgehende Spiegelhauptkugel $\delta_0^{(k)}$ bleibt fest, während $\delta_0^{(i)}$ die Innen- und

Aussenseite vertauscht. S^2 ist die Umwendung um die Axe d (vgl. $3\alpha_1$) in § 36 und $3\alpha_1^{(1)}$) in § 39).

$5\alpha_2$) $2 \cdot 72 = 144$ vierzählige Drehspiegelungen. Die Punkte $\mathfrak{d}_0^{(i)}$, $\mathfrak{d}_0^{(k)}$ und die Hauptkugeln $\delta_0^{(k)}$ und $\delta_0^{(i)}$ in $5\alpha_1$) tauschen bez. ihre Rollen.

Erstes Beispiel zu $5\alpha_1$) (vgl. § 15 A 1) (84α) u. § 8 C I) unter (33γ), (33δ)):

$$S = [1\ 2\ 3\ 4]_6 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(90^\circ)} \mid \delta_0^{(k)} \mid,$$
$$S^3 = [4\ 2\ {-3}\ 1]_6 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(-90^\circ)} \mid \delta_0^{(k)} \mid.$$

Erstes Beispiel zu $5\alpha_2$):

$$S = [-1\ {-2}\ {-3}\ {-4}]_6 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(-90^\circ)} \mid \delta_0^{(i)} \mid,$$
$$S^3 = [-4\ {-2}\ 3\ {-1}]_6 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(90^\circ)} \mid \delta_0^{(i)} \mid$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{d}_0^{(i)} \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{1}{2} \ldots \delta_0^{(i)} \\ \mathfrak{d}_0^{(k)} \ldots \frac{1}{2}\ {-\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \ 0\ \ \frac{1}{2} \ldots \delta_0^{(k)} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \mathfrak{d}_0^{(l)'} \ldots -\frac{1}{2}\ \ 0\ \ \frac{i}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2} \ldots \delta_0^{(m)'} \\ \mathfrak{d}_0^{(m)'} \ldots -\frac{1}{2}\ \ 0\ {-\frac{i}{\sqrt{2}}}\ \ \frac{1}{2} \ldots \delta_0^{(l)'} \end{array}$$

$$(\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)}) = d \ldots \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right|, \quad (\mathfrak{d}_0^{(l)'}\ \mathfrak{d}_0^{(m)'}) = d' \ldots \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{array} \right|,$$

$$S^2 = [4\ 2\ {-3}\ 1]_1 = d_{(180^\circ)}.$$

Zweites Beispiel zu $5\alpha_1$):

$$S = [1\ {-4}\ {-2}\ {-3}]_4 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(90^\circ)} \mid \delta_0^{(k)} \mid,$$
$$S^3 = [1\ 3\ 2\ {-4}]_5 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(-90^\circ)} \mid \delta_0^{(k)} \mid$$

Zweites Beispiel zu $5\alpha_2$):

$$S = [-1\ 4\ 2\ 3]_4 = (\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(-90^\circ)} \mid \delta_0^{(i)} \mid,$$
$$S^3 = [-1\ {-3}\ {-2}\ 4]_5 = (\mathfrak{d}^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)})_{(90^\circ)} \mid \delta_0^{(i)} \mid$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{d}_0^{(i)} \ldots \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ {-\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\ \ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\ \ {-\frac{1}{2\sqrt{2}}} \ldots \delta_0^{(i)} \\ \mathfrak{d}_0^{(k)} \ldots \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\ \ {-\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\ \ {-\frac{1}{2\sqrt{2}}} \ldots \delta_0^{(k)} \end{array}$$

$$(\mathfrak{d}_0^{(i)}\ \mathfrak{d}_0^{(k)}) = d \ldots \left| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{d}_0^{(l)'} \ldots \frac{i\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{i\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \ldots \delta_0^{(m)'} \\ \mathfrak{d}_0^{(m)'} \ldots -\frac{i\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ {-\frac{i\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \ldots \delta_0^{(l)'} \end{array}$$

$$(\mathfrak{d}_0^{(l)'}\ \mathfrak{d}_0^{(m)'}) = d' \ldots \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right|$$

$$S^2 = [1\ {-3}\ {-2}\ {-4}]_3 = d_{(180^\circ)}.$$

Dem ersten Beispiel entsprechen die 48 vierzähligen Drehspiegelungen mit den 24 Axen $d\ (d')$, dem zweiten Beispiele die 96 vierzähligen Drehspiegelungen mit den 48 Axen $d^{(1)}\ (d^{(1)'})$.

$5\beta_1$) 4 . 36 = 144 achtzählige Drehspiegelungen. Von den beiden Punkten $\mathfrak{i}_0^{(e)_i}$, $\mathfrak{i}_0^{(e)_k}$ (vergl. § 3 (12ε)), welche auf einem der 6+12 = 18 Hauptkreise e (e') und $e^{(1)}$ ($e^{(1)'}$) liegen, bleibt $\mathfrak{i}_0^{(e)_i}$ fest, $\mathfrak{i}_0^{(e)_k}$ geht in den Gegenpunkt über; die durch die reciproke Polare e' (e) oder $e^{(1)'}$ ($e^{(1)}$), deren unendlich ferne imaginäre Punkte $\mathfrak{e}_0$ fest bleiben, hindurchgehende Spiegelhauptkugel $\iota_0^{(e)_k}$ bleibt fest, $\iota_0^{(e)_i}$ vertauscht die Innen- mit der Aussenseite.

Die geraden Potenzen S^2, S^6 stellen die einfachen vierzähligen Drehungen um die Axe dar (vgl. § 36 $3\beta_1$) und § 39 $3\beta_1^{(1)}$)). S^4 bedeutet die Umwendung um die Axe.

$5\beta_2$) 4 . 36 = 144 achtzählige Drehspiegelungen. Die Punkte $\mathfrak{i}_0^{(e)_i}$, $\mathfrak{i}_0^{(e)_k}$ und die Hauptkugeln $\iota_0^{(e)_k}$, $\iota_0^{(e)_i}$ tauschen bez. ihre Rollen.

Erstes Beispiel zu $5\beta_1$) (vgl. § 15 A 2) (84ε) und § 8 unter I (34γ), (34δ)).

$$\left\{\begin{array}{llll} S=[3\;4\;1\;2]_6, & S^3=[-2\;4\;1\;3]_6, & S^5=[-3\;4\;1\;-2]_6, & S^7=[2\;4\;1\;-3]_6 \\ \quad = e_{(45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(-135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(-45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,| \end{array}\right\};$$

$$\begin{array}{lll} S^2=[-4\;2\;3\;1]_1, & S^4=[-1\;2\;3\;-4]_1, & S^6=[4\;2\;3\;-1]_1 \\ \quad = e_{(90^0)}, & \quad = e_{(180^0)}, & \quad = e_{(-90^0)}, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{i}_0^{(e)_i} \ldots 0 \quad \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad 0 \ldots \iota_0^{(e)_i} \\ \mathfrak{i}_0^{(e)_k} \ldots 0 \quad \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad 0 \ldots \iota_0^{(e)_k} \end{array} \quad \left|\; . \; \begin{array}{l} \mathfrak{e}_i \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \varepsilon_k \\ \mathfrak{e}_k \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \varepsilon_i \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{vgl. § 10} \\ (79\varepsilon) \end{array}$$

$$(\mathfrak{i}_0^{(e)_i}\;\mathfrak{i}_0^{(e)_k}) = e \ldots \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \ldots (56) \ldots \quad (\mathfrak{e}_i\;\mathfrak{e}_k) = e \ldots \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Erstes Beispiel zu $5\beta_2$):

$$\left\{\begin{array}{llll} S=[-3\;-4\;-1\;-2]_6, & S^3=[2\;-4\;-1\;-3]_6, & S^5=[3\;-4\;-1\;2]_6, & S^7=[-2\;-4\;-1\;3]_6 \\ \quad = e_{(-45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_i}\,|, & \quad = e_{(-135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_i}\,|, & \quad = e_{(135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_i}\,|, & \quad = e_{(45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_i}\,| \end{array}\right\};$$

S^2, S^4, S^6 wie bei $5\beta_1$).

Zweites Beispiel zu $5\beta_1$):

$$\left\{\begin{array}{llll} S=[1\;4\;-2\;-3]_4, & S^3=[4\;2\;-3\;1]_5, & S^5=[3\;-2\;4\;-1]_4, & S^7=[-1\;-3\;2\;-4]_5 \\ \quad = e_{(45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(-135^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,|, & \quad = e_{(-45^0)}\,|\,\iota_0^{(e)_k}\,| \end{array}\right\},$$

$$\begin{array}{lll} S^2=[2\;-4\;-1\;-3]_3, & S^4=[-4\;3\;2\;-1]_1, & S^6=[3\;-1\;-4\;-2]_3 \\ \quad = e_{(90^0)}, & \quad = e_{(180^0)}, & \quad = e_{(-90^0)}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{i}_0^{(e)_i} \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \ldots \iota_0^{(e)_i} \\ \mathfrak{i}_0^{(e)_k} \ldots -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \ldots \iota_0^{(e)_k} \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathfrak{e}_i \ldots \frac{1}{2} \; -\frac{i}{2} \;\; \frac{i}{2} \;\; \frac{1}{2} \ldots \varepsilon_k \\ \mathfrak{e}_k \ldots \frac{1}{2} \;\; \frac{i}{2} \; -\frac{i}{2} \;\; \frac{1}{2} \ldots \varepsilon_i \end{array} \right.$$

$$(\mathfrak{i}_0^{(e)_i}\;\mathfrak{i}_0^{(e)}) = e \ldots \left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right| \ldots (14) \ldots \quad (\mathfrak{e}_i\;\mathfrak{e}_k) = e' \ldots \left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right|.$$

Zweites Beispiel zu $5\beta_2$):

$$\left\{\begin{array}{llll} S = [-1\ -4\ 2\ 3]_4, & S^3 = [-4\ -2\ 3\ -1]_5, & S^5 = [-3\ 2\ -4\ 1]_4, & S^7 = [1\ 3\ -2\ 4]_5 \\ \quad = e_{(-45^0)} \mid \iota^{(e)}_{0}{}_i \mid, & \quad = e_{(-135^0)} \mid \iota^{(e)}_{0}{}_i \mid, & \quad = e_{(135^0)} \mid \iota^{(e)}_{0}{}_i \mid, & \quad = e_{(45^0)} \mid \iota^{(e)}_{0}{}_i \mid \end{array}\right\};$$

S^2, S^4, S^6 wie bei $5\beta_1$).

Damit sind die 576 hierhergehörigen Drehspiegelungen vollständig angegeben.

A') Correlationen, welche eigentlich orthogonalen Substitutionen entsprechen.

$8\alpha'_1$) $3 \,.\, 12 = 36$ eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die Projectionen der 36 reellen Flächen $F^{(3)}$ zweiter Ordnung (vgl. § 7 unter 3)) auf S_3 (vgl. § 17 B 3), (86μ)). Z. B. $S' = [\overline{2\ -1\ 4\ 3}]_4$ in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(3)}$, wobei $F^{(3)} \ldots z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_4 z_2 - z_2 z_3 = 0$ ist.

$8\alpha'_2$) $3 \,.\, 12 = 36$ inverse eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf dieselben sphärischen Flächen; z. B. $S' = [\overline{-2\ 1\ -4\ -3}]_4$ in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(3}$ (vgl. unter $8\alpha'_1$)).

$8\beta'_1$) und $8\beta'_2$) $2 \,.\, 12 = 24$ vierzählige Null-Correlationen, deren zugehörige (mit ihren polaren bezw. zusammenfallende) Complexe die zwölf sphärischen Complexe $\mathfrak{x}_{i_1} \pm \mathfrak{x}_{i_2} = 0$ sind (vergl. § 31 unter 3)). S'^2 bedeutet die Inversion.

z. B. $\left.\begin{array}{l} S' = [\overline{-2\ 1\ 4\ 3}]_4 \\ S'^3 = [2\ -1\ -4\ -3]_4 \end{array}\right\}$ in Bezug auf $\mathfrak{x}_4 + \mathfrak{x}_6 = 0$, $S'^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$;

und $\left.\begin{array}{l} S' = [\overline{1\ 2\ -3\ 4}]_4 \\ S'^3 = [\overline{-1\ -2\ 3\ -4}]_4 \end{array}\right\}$ in Bezug auf $\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_6 = 0$, $S'^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$.
(Vgl. § 17 (86λ)).

$8\gamma'_1$) und $8\gamma'_2$) $4 \,.\, 6 = 24$ achtzählige Correlationen mit zusammenfallender (imaginärer) Kernfläche $\mathfrak{F}^{(1)}_1 = \mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 31 unter 5b); S'^2 und S'^6 bedeuten vierzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar $e^{(2)}$ bilden, S'^4 bedeutet die Inversion (vgl. § 17 B 1b)).

Z. B. $S' = [\overline{3\ -4\ 1\ 2}]_4$, $S'^3 = [\overline{4\ 3\ 2\ -1}]_4$, $S'^5 = [\overline{-3\ 4\ -1\ -2}]_4$, $S'^7 = [\overline{-4\ -3\ -2\ 1}]_4$,
$S'^2 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1$, $S'^6 = [2\ -1\ -4\ 3]_1$; $S'^4 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (vgl. unt. $8\gamma_1$), $8\gamma_2$) dies. §).
$= e_{(-90^0)}\, e'_{(90^0)}$, $= e_{(90^0)}\, e'_{(-90^0)}$, $e^{(2)} \ldots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \pm i \ldots (46)$.

$8\delta'_1$) und $8\delta'_2$) $4 \,.\, 18 = 72$ achtzählige Correlationen mit zusammenfallender (reeller) Kernfläche $\mathfrak{F}^{(1)}_2 \ldots \mathfrak{F}^{(1)}_{10}$ (vgl. § 31 unter 6a)). S'^2 und S'^6 bedeuten wiederum vierzählige Doppeldrehungen, deren Schrauben-

axen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar $e^{(2)}$ bilden, S'^4 bedeutet wiederum die Inversion (vgl. § 17 B 1a) und (86$\varkappa$)).

Z. B. $S' = [\overline{-1\ 2\ 3\ 4}]_4$, $S'^3 = [\overline{2\ 1\ -4\ 3}]_4$, $S'^5 = [\overline{1\ -2\ -3\ -4}]_4$, $S'^7 = [\overline{-2\ -1\ 4\ -3}]_4$;
$S'^2 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = e_{(90^\circ)}\, e'_{(-90^\circ)}$, $S'^6 = [-2\ 1\ 4\ 3]_1 = e_{(-90^\circ)}\, e'_{(90^\circ)}$, $S'^4 = [-1 -2 -3 -4]_1$,
$e^{(2)} \ldots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \pm i \ldots$ (46).

$9\alpha'_1$) und $9\alpha'_2$) $4 \,.\, 48 = 192$ zwölfzählige Correlationen mit zusammenfallender reeller Kernfläche $\mathfrak{F}^{(7)}$ (vergl. § 7 unter 7)), welche die Projection je einer der 48 reellen Flächen $F^{(7)}$ auf S_3 ist. Die Potenzen S'^3 und S'^9 bedeuten vierzählige Null-Correlationen, deren zugehöriger Complex einer der zwölf sphärischen Complexe $\mathfrak{x}_{i_1} \pm \mathfrak{x}_{i_2}$ ist (vgl. unter $8\beta'_1$) und $8\beta'_2$) dieses §). Die geraden Potenzen S'^4, S'^8 bedeuten dreizählige, S'^2, S'^{10} bedeuten sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar k_0 bilden (wie unter $9\alpha_1$) und $9\alpha_2$)), S'^6 endlich bedeutet die Inversion.

Z. B. $S' = [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_4$, $S'^5 = [\overline{-3\ 1\ 2\ -4}]_5$, $S'^7 = [\overline{1\ -4\ -2\ -3}]_4$, $S'^{11} = [\overline{3\ -1\ -2\ -4}]_5$
$S'^2 = [2\ -3\ -1\ 4]_3$, $S'^4 = [-2\ -4\ 3\ 1]_2$, $S'^8 = [-2\ 3\ 1\ -4]_3$, $S'^{10} = [2\ 4\ -3\ -1]_2$
$= l_{(60^\circ)}\, l'_{(-60^\circ)}$, $= l_{(120^\circ)}\, l'_{(-120^\circ)}$, $= l_{(-120^\circ)}\, l'_{(120^\circ)}$, $= l_{(-60^\circ)}\, l'_{(60^\circ)}$; vgl. $9\alpha_1$), $9\alpha_2$)
$S'^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1 = l_{(180^\circ)}\, l'_{(180^\circ)}$;

$S'^3 = [\overline{-4\ 3\ 2\ 1}]_6$, $S'^9 = [\overline{4\ -3\ -2\ -1}]_6$: vierzählige Nullcorrelationen, Complex $\ldots\ \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4 = 0$.

$9\beta'_1$) und $9\beta'_2$) $8 \,.\, 24 = 192$ vierundzwanzigzählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bez. dasselbe ist, wie für die unter $9\beta_1$) und $9\beta_2$) betrachteten allgemeinen 24-zähligen Doppeldrehungen. Die geraden Potenzen von S' haben bezw. dieselbe Bedeutung, wie für die Collineationen unter $9\beta_1$), $9\beta_2$), nämlich S'^2, S'^{10}, S'^{14}, S'^{22} sind zwölfzählige Doppeldrehungen mit demselben Haupttetraeder, S'^4, S'^8, S'^{16}, S'^{20} sind sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Hauptkreispaar d_0, S'^6, S^{18} sind vierzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Kantenpaar $e^{(2)}$ bilden, S'^{12} endlich ist die Inversion. Dagegen bedeuten die ungeraden Potenzen S'^3, S'^9, S'^{15}, S'^{21} die unter $8\gamma'_1$), $8\gamma'_2$) betrachteten achtzähligen Correlationen mit zusammenfallender imaginärer Kernfläche $\mathfrak{F}_1^{(1)} = \mathfrak{K}_\infty$.

Z. B. $S' = [\overline{1\ 4\ -2\ 3}]_4,\ S'^5 = [\overline{4\ 2\ -1\ 3}]_5,\ S'^7 = [\overline{-3\ -2\ -4\ 1}]_4,\ S'^{11} = [\overline{-3\ -1\ -2\ 4}]_5$
$S'^{13} = [\overline{-1\ -4\ 2\ -3}]_4,\ S'^{17} = [\overline{-4\ -2\ 1\ -3}]_5,\ S'^{19} = [\overline{3\ 2\ 4\ -1}]_4,\ S'^{23} = [\overline{3\ 1\ 2\ -4}]_5;$
$S'^3 = [\overline{-3\ -4\ 1\ -2}]_6,\ S'^9 = [\overline{2\ 1\ 4\ -3}]_6,\ S'^{15} = [\overline{3\ 4\ -1\ 2}]_6,\ S'^{21} = [\overline{-2\ 1\ -4\ 3}]_6,$

während die geraden Potenzen genau die entsprechenden geraden Potenzen von S in $9\beta_1$), $9\beta_2$) sind.

Damit sind die 576 hierhergehörigen eigentlichen Correlationen vollständig aufgeführt.

B') Correlationen, welche uneigentlich orthogonalen Substitutionen entsprechen.

$5\alpha'_1$) 2 . 72 = 144 vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art mit reellem Axenpaar d (d'). Die Mittelpunkte der fest bleibenden sphärischen Strahlbüschel sind zwei Punkte $\mathfrak{e}_i$ oder $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche bezw. um Achtelskreise von den Punkten $\mathfrak{d}_0^{(i)}$, $\mathfrak{d}_0^{(k)}$ (vgl. unter $5\alpha_1$)) abstehen.

$5\alpha'_2$) 2 . 72 = 144 vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art, nämlich die inversen derjenigen unter $5\alpha'_1$); hier treten die Gegenpunkte $\mathfrak{e}'_i$ oder $\mathfrak{c}'_i$, $\mathfrak{b}'_k$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln ε_i oder γ_i und β_k auf.

Erstes Beispiel zu $5\alpha'_1$):

$S' = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_6,\ S'^3 = [\overline{4\ 2\ -3\ 1}]_6$

Erstes Beispiel zu $5\alpha'_2$):

$S' = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_6,\ S'^3 = [\overline{-4\ 2\ 3\ -1}]_6$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{e}_i \ \dots\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ \dots\ \varepsilon_i \\ \mathfrak{b}_k \ \dots\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ \dots\ \beta_k \\ S'^2 = [4\ 2\ -3\ 1]_1, \text{ Umwendung um Axe:} \\ (\mathfrak{e}_i\ \mathfrak{b}_k) = d \ \dots \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right| . \end{array}\right.$$

Zweites Beispiel zu $5\alpha'_1$):

$S' = [\overline{1\ -4\ -2\ 3}]_4,\ S'^3 = [\overline{1\ 3\ 2\ -4}]_5$

Zweites Beispiel zu $5\alpha'_2$):

$S' = [\overline{-1\ 4\ 2\ -3}]_4,\ S'^3 = [\overline{-1\ -3\ -2\ 4}]_5$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{c}_i \ \dots\ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ \dots\ \gamma_i \\ \mathfrak{b}_k \ \dots\ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \ \dots\ \beta_k \\ S'^2 = [1 -3 -2 -4]_3, \text{ Umwendung um Axe:} \\ (\mathfrak{c}_i\ \mathfrak{b}_k) = d \ \dots \left| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right| . \end{array}\right.$$

Dem ersten Beispiel entsprechen die 48 vierzähligen Axen-Correlationen zweiter Art mit den 24 Axen d (d'), dem zweiten die 96 mit den 48 Axen $d^{(1)}$ $(d^{(1)\prime})$.

$5\beta'_1$) 4 . 36 = 144 achtzählige allgemeine uneigentliche Correlationen. Die beiden imaginären Eckpunkte (und Hauptkugeln) des Haupttetraeders sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung $5\beta_1$), nämlich zwei Punkte $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{e}_k$ (zwei Hauptkugeln ε_i, ε_k), während die beiden reellen Eckpunkte $\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_l$, $\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_m$ von denjenigen $\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_i$, $\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_k$ um einen Achtelskreis abstehen. Die geraden Potenzen S'^2, S'^6 stellen wie S^2, S^6 (vergl. $5\beta_1$)) die einfachen vierzähligen Drehungen um die Axe e (e') dar, S'^4 die Umwendung um dieselbe.

$5\beta'_2$) 4 . 36 = 144 achtzählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen der vorigen sind.

Erstes Beispiel zu $5\beta'_1$):

$S' = [\overline{3\ 4\ 1\ 2}]_6$, $S'^3 = [\overline{-2\ 4\ 1\ 3}]_6$, $S'^5 = [\overline{-3\ 4\ 1\ -2}]_6$, $S'^7 = [\overline{2\ 4\ 1\ -3}]_6$;

S'^2, S'^4, S'^6 wie S^2, S^4, S^6 für das entsprechende erste Beispiel zu $5\beta_1$);

$$\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_l \ldots 0 \quad \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad 0 \ldots \underset{0}{\iota}^{(e)}{}_l \qquad \Bigg| \qquad \mathfrak{e}_i \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \varepsilon_k$$

$$\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_m \ldots 0 \quad \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad 0 \ldots \underset{0}{\iota}^{(e)}{}_m \qquad \Bigg| \qquad \mathfrak{e}_k \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{i}{\sqrt{2}} \ldots \varepsilon_i;$$

Kantenpaare des Haupttetraeders: 1 reelles Hauptkreispaar e (e') (56) und zwei imaginäre Hauptkreispaare q (vgl. § 7 unter 5)).

Erstes Beispiel zu $5\beta'_2$)):

$S' = [\overline{-3\ -4\ -1\ -2}]_6$, $S'^3 = [\overline{2\ -4\ -1\ -3}]_6$, $S'^5 = [\overline{3\ -4\ -1\ 2}]_6$, $S'^7 = [\overline{-2\ -4\ -1\ 3}]_6$;

Alles Uebrige wie unter $5\beta'_1$).

Zweites Beispiel zu $5\beta'_1$):

$S' = [\overline{1\ 4\ -2\ -3}]_4$, $S'^3 = [\overline{4\ 2\ -3\ 1}]_5$, $S'^5 = [\overline{3\ -2\ 4\ -1}]_4$, $S'^7 = [\overline{-1\ -3\ 2\ -4}]_5$;

S'^2, S'^4, S'^6 wie S^2, S^4, S^6 für das entsprechende zweite Beispiel zu $5\beta_1$).

$$\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_l \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \ldots \underset{0}{\iota}^{(e)}{}_l$$

$$\underset{0}{\mathfrak{i}}^{(e)}{}_m \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \ldots \underset{0}{\iota}^{(e)}{}_m$$

$$\mathfrak{e}_i \ldots \frac{1}{2} \quad -\frac{i}{2} \quad \frac{i}{2} \quad \frac{1}{2} \ldots \varepsilon_k$$

$$\mathfrak{e}_k \ldots \frac{1}{2} \quad \frac{i}{2} \quad -\frac{i}{2} \quad \frac{1}{2} \ldots \varepsilon_i,$$

Kantenpaare des Haupttetraeders: ein reelles Hauptkreispaar e (e') . . . (14) und zwei imaginäre Hauptkreispaare q.

Zweites Beispiel zu $5\beta'_2$):

$$S' = [\overline{-1\ -4\ 2\ 3}]_4,\quad S'^3 = [\overline{-4\ -2\ 3\ -1}]_5,\quad S'^5 = [\overline{-3\ 2\ -4\ 1}]_4,\quad S'^7 = [\overline{1\ 3\ -2\ 4}]_5;$$

Alles Uebrige wie unter $5\beta'_1$).

Hiermit sind auch endlich die hierhergehörigen 576 uneigentlichen Correlationen vollständig aufgeführt.

Die eigentlichen und uneigentlichen Collineationen und Correlationen, durch welche die den Geweben $\boldsymbol{G}_3$ und $\boldsymbol{G}'_3$ ein- und umgeschriebenen regelmässigen Vierundzwanzig-Zelle $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}'_3$, sowie die theilweise regelmässigen Polytope dieser Gruppe in sich übergehen, sind damit unmittelbar gegeben. (Vgl. § 33).

(Ende des ersten Hauptth eils.)

Zweiter Hauptheil.

Die Configuration Cf. $(60_{15}, 72_5)$ und die zugehörige Gruppe von 14400 Collineationen und ebenso vielen Correlationen. Uebertragung auf den sphärischen Raum S_3 und hierdurch bestimmte regelmässige, linear begrenzte Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

§ 41.

Herleitung der Cf. $(60_{15}, 72_5)$.

Diese interessante Configuration kann als das räumliche Analogon zu der Figur eines ebenen zehnfach Brianchon'schen Sechsecks angesehen werden und ergiebt sich durch ein bereits früher von mir[1]) angegebenes Verfahren leicht aus einem System dreier Tetraeder in desmischer Lage oder aus der hierdurch bestimmten Reye'schen Cf. $(12_6, 16_3)$.

1) Wir betrachten die Cf. $(12_6, 16_3)$, deren Ebenen die Seitenflächen $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_{12}$ der 3 Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3, deren Cf.-Punkte die Eckpunkte $e_{13} \,.\,.\, e_{24}$ der 3 Fundamentaltetraeder T_4, T_5, T_6 (vgl. § 10 (79ε)) sind. In jeder der 12 Seitenflächen bestimmen die Spuren der 11 übrigen Ebenen ein vollständiges Vierseit, in dessen Seiten k sich je 3 Ebenen ε schneiden, während das Diagonaldreieck das Dreieck der betrachteten Seitenfläche ist, dessen Seiten durch je 3 Geraden e gebildet werden. Wenn man nun auf jeder Seite dieses Vierseits die drei durch die Eckpunkte ($e_{13} \,.\,.\, e_{24}$) bestimmten Strecken in demselben Sinne nach dem goldenen Schnitte (im Verhält-

[1]) Vergl. E. Hess: Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder. Math. Ann. Bd. 28. S. 167. § 11.

niss $1 : \operatorname{tg}\varphi)$[1]) theilt, so erhält man 12 Punkte, welche sich in bestimmter Weise als Eckpunkte von 4 Dreiecken gruppiren lassen, zu denen als fünftes Dreieck das Diagonaldreieck hinzutritt. Diese 5 Dreiecke, deren Eckpunkte gleichmässig durch $\mathfrak{B}_i$, deren Seiten durch B_i bezeichnet werden sollen, haben die Eigenschaft, dass je zwei derselben zu einander dreifach perspectiv liegen und zwar so, dass die drei Centra, 3 Punkte $\mathfrak{B}_i$, auf einer Geraden C_k liegen und die drei Perspectivitätsaxen B_i sich in einem Punkt $\mathfrak{C}_k$ schneiden. Die 15 Seiten B_i dieser Dreiecke schneiden sich also zehnmal zu je dreien in den 10 Punkten $\mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{10}$, ferner sechsmal zu je fünfen in den Punkten $\mathfrak{G}_1 \ldots \mathfrak{G}_6$, welche die Eckpunkte von 10 Gruppen je zweier vierfach perspectiven Dreiecke mit je vier Centren $\mathfrak{C}_i$ sind. Die 15 Punkte $\mathfrak{B}_i$ liegen zu je zweien auf den 15 Geraden B_i, zehnmal zu je dreien auf den Geraden C_i und sechsmal zu je fünfen auf Geraden G_i.

Wird die angegebene Construction in jeder der 12 Ebenen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{12}$ ausgeführt, so ergeben sich $12 + 48 = 60$ Eckpunkte $\mathfrak{B}_i$ (12 Eckpunkte $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_{12}$ der drei Fundamental-Tetraeder $T_1 \ldots T_3$ und $\frac{12 \cdot 12}{3} = 48$ weitere Punkte, da in jeder Seite k des Vierseits sich 3 Ebenen ε schneiden), welche ebenso, wie je 15 in jeder der 12 Seitenflächen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{12}$ auch ganz entsprechend in weiteren 48 Ebenen liegen. Diese $12+48 = 60$ Ebenen sollen gleichmässig durch B_i bezeichnet werden. Man kann diese 48 Ebenen auch dadurch erhalten, dass man in jedem der 12 Eckpunkte $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_{12}$ (den Eckpunkten des conjugirten desmischen Systems) die der obigen Construction polar entsprechende ausführt.

2) Analytisch lassen sich diese Beziehungen sehr einfach darstellen, wenn man das Tetraeder T_1 als Coordinatentetraeder wählt; die 60 Ebenen B, welche je 15 Punkte $\mathfrak{B}$ enthalten, sind nichts anderes, als die Polarebenen dieser Punkte in Beziehung auf die Fundamentalfläche:

$$F_1^{(1)} \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0.$$

In der folgenden Zusammenstellung $(1\alpha) \ldots (1\vartheta)$ sind für die 60 Punkte $\mathfrak{B}$ und die 60 Ebenen B die Coordinatenwerthe angegeben, welche mit Rücksicht auf die nachfolgenden Anwendungen mit solchen Factoren multiplicirt sind, dass ihre Quadratsumme gleich eins wird. Die Punkte $\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_{12}$

[1]) Vgl. § 4 Formel (⊙): $\operatorname{tg}\varphi = 2 \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\operatorname{cotg}\varphi = 2 \cos \frac{\pi}{5}$, $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$.

(Ebenen $B_1 \,..\, B_{12}$) sind die Eckpunkte (Seitenflächen) der 3 Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3 (vgl. § 10 unter (79 ε)); in den Formeln (1δ) .. (1η) ergeben sich die Coordinaten der übrigen Punkte (Ebenen) je eines Quadrupels aus den angeführten durch Hinzusetzen der drei anderen Vorzeichencombinationen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_1 \ldots 1\;0\;0\;0 \ldots B_1\\ \mathfrak{B}_2 \ldots 0\;1\;0\;0 \ldots B_2\\ \mathfrak{B}_3 \ldots 0\;0\;1\;0 \ldots B_3\\ \mathfrak{B}_4 \ldots 0\;0\;0\;1 \ldots B_4\end{array}\right\}(1\alpha)\quad \left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_5 \,..\, \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2} \,..\, B_5\\ \mathfrak{B}_6 \,..\, \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; \frac{1}{2} \,..\, B_6\\ \mathfrak{B}_7 \,..\, \frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; \frac{1}{2} \,..\, B_7\\ \mathfrak{B}_8 \,..\, \frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2} \,..\, B_8\end{array}\right\}(1\beta)\quad \left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_9 \,..\, -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2} \,..\, B_9\\ \mathfrak{B}_{10} \,..\, \frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2} \,..\, B_{10}\\ \mathfrak{B}_{11} \,..\, \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2} \,..\, B_{11}\\ \mathfrak{B}_{12} \,..\, \frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; -\frac{1}{2}\; \frac{1}{2} \,..\, B_{12}\end{array}\right\}(1\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_{13} \,..\, \mathfrak{B}_{16} \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \ldots B_{13} \,..\, B_{16}\\ \mathfrak{B}_{17} \,..\, \mathfrak{B}_{20} \ldots 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \ldots B_{17} \,..\, B_{20}\\ \mathfrak{B}_{21} \,..\, \mathfrak{B}_{24} \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \ldots B_{21} \,..\, B_{24}\end{array}\right\}(1\delta)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_{25} \,..\, \mathfrak{B}_{28} \ldots \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \ldots B_{25} \,..\, B_{28}\\ \mathfrak{B}_{29} \,..\, \mathfrak{B}_{32} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \ldots B_{29} \,..\, B_{32}\\ \mathfrak{B}_{33} \,..\, \mathfrak{B}_{36} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2} \ldots B_{33} \,..\, B_{36}\end{array}\right\}(1\varepsilon)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_{37} \,..\, \mathfrak{B}_{40} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \ldots B_{37} \,..\, B_{40}\\ \mathfrak{B}_{41} \,..\, \mathfrak{B}_{44} \ldots \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \ldots B_{41} \,..\, B_{44}\\ \mathfrak{B}_{45} \,..\, \mathfrak{B}_{48} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \frac{1}{2} \ldots B_{45} \,..\, B_{48}\end{array}\right\}(1\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_{49} \,..\, \mathfrak{B}_{52} \ldots \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \ldots B_{49} \,..\, B_{52}\\ \mathfrak{B}_{53} \,..\, \mathfrak{B}_{56} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \ldots B_{53} \,..\, B_{56}\\ \mathfrak{B}_{57} \,..\, \mathfrak{B}_{60} \ldots \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad 0 \ldots B_{57} \,..\, B_{60}\end{array}\right\}(1\eta).$$

Die Vorzeichen-Combinationen in (1δ) .. (1η) haben hierbei durchweg für die drei Werthe $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$ die nachstehende Folge:

für das erste Quadrupel,			für das zweite Quadrupel,			für das dritte Quadrupel			
$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$	
+	+	+	+	+	—	+	—	+	(1ϑ)
+	—	+	+	+	+	+	+	—	
+	+	—	+	—	+	+	+	+	
—	+	+	—	+	+	—	+	+	

Jede Ebene B enthält 15 Punkte $\mathfrak{B}$, z. B. $B_4 \ldots z_4 = 0$ enthält die 5 Punkttripel $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_{49}\,\mathfrak{B}_{53}\,\mathfrak{B}_{57}$, $\mathfrak{B}_{50}\,\mathfrak{B}_{54}\,\mathfrak{B}_{58}$, $\mathfrak{B}_{51}\,\mathfrak{B}_{55}\,\mathfrak{B}_{59}$, $\mathfrak{B}_{52}\,\mathfrak{B}_{56}\,\mathfrak{B}_{60}$, welche in dieser Anordnung 5 Polardreiecke in Beziehung auf den imaginären (Fundamental-) Kegelschnitt:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bilden; entsprechend gehen durch jeden Punkt $\mathfrak{B}$ 15 Ebenen B hindurch.

In jeder Seitenfläche hat man die durch die 5 Polardreiecke bestimmte Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks mit 15 Punkten $\mathfrak{B}$, 10 Punkten $\mathfrak{C}$ und 6 Punkten $\mathfrak{G}$, in welchen sich bezw. je 2, je 3 und je 5 der 15 Verbindungslinien B schneiden, ebenso wie die 15 Punkte $\mathfrak{B}$ ausserdem zehnmal zu dreien auf den Geraden C und sechsmal zu fünfen auf den Geraden G liegen. Analog bestimmen je 16 durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ hindurchgehende Ebenen B eine Raumfigur, deren Projection auf eine concentrische Kugel ein sphärisches zehnfach Pascal'sches Sechsseit ist: die Hauptkreise γ und χ, welche den Ebenen Γ und X, den Polarebenen der Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $F_1^{(1)}$ entsprechen, enthalten resp. je 3 und je 5 Punkte $\mathfrak{B}'$, die Projectionen der Geraden B auf die Kugelfläche u. s. w.

Die Raumfigur enthält $\frac{60 \cdot 5}{4} = 75$ Polartetraeder in Bezug auf $F_1^{(1)}$, welche zu je fünf in einem der 60 Eckpunkte $\mathfrak{B}$ zusammenstossen, während jede Ebene B die Seitenflächen von fünf dieser Tetraeder enthält. Die folgende Tabelle enthält die 75 Polartetraeder durch Angabe der Ziffern, welche als Indices sowohl an B, wie an $\mathfrak{B}$ zu fügen sind, um die Flächen und Eckpunkte jedes Tetraeders zu charakterisiren. Der vorgesetzte Stern * bedeutet, dass den Coordinaten eines Eckpunktes (einer Fläche), z. B. des ersten, die entgegengesetzten Werthe zu ertheilen sind, als die in (1) angegebenen. Alsdann ist bei der gewählten Anordnung der Ecken (Flächen)

für jedes der 75 Polartetraeder die Determinante Δ der positiven Einheit gleich.

Die erste Gruppe T_I umfasst ausser den 3 Fundamental-Tetraedern T_1, T_2, T_3 noch $3 \,.\, 16 = 48$ Tetraeder $T_4 \,..\, T_{51}$, von welchen je eine Ecke und eine Fläche einem der drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 angehört und gliedert sich hiernach in die drei Abtheilungen $T_I^{(1)}, T_I^{(2)}, T_I^{(3)}$; die zweite Gruppe T_{II} enthält die übrigen 24 Tetraeder $T_{52} \,..\, T_{75}$, welche keine Ecke und keine Fläche mit diesen dreien Tetraedern gemein haben.

$\underline{T_1}$...	1	2	3	4		$\underline{T_2}$...	5	6	7	8		$\underline{T_3}$...	9	10	11	12
T_4 ...	1	13	17	21		T_{20} ...	*5	28	52	44		T_{36} ...	*9	27	51	41
T_5 ...	1	14	18	22		T_{21} ...	*5	17	38	54		T_{37} ...	*9	22	34	46
T_6 ...	1	15	19	23		T_{22} ...	*5	15	57	30		T_{38} ...	*9	17	39	53
$\underline{T_7}$...	*1	16	20	24		$\underline{T_{23}}$...	*5	22	33	47		$\underline{T_{39}}$...	*9	15	58	29
T_8 ...	2	25	29	33		T_{24} ...	6	23	34	45		T_{40} ...	10	14	60	30
T_9 ...	2	26	30	34		T_{25} ...	6	14	59	29		T_{41} ...	*10	20	37	55
T_{10} ...	2	27	31	35		T_{26} ...	6	20	40	56		T_{42} ...	10	23	33	48
$\underline{T_{11}}$...	*2	28	32	36	$(T_I^{(1)})$	$\underline{T_{27}}$...	6	27	50	42	$(T_I^{(2)})$	$\underline{T_{43}}$...	*10	28	49	43
T_{12} ...	3	37	41	45		T_{28} ...	7	18	39	55		T_{44} ...	11	21	36	47
T_{13} ...	3	38	42	46		T_{29} ...	7	26	49	41		T_{45} ...	*11	25	50	44
T_{14} ...	3	39	43	47		T_{30} ...	7	21	35	46		T_{46} ...	*11	16	59	31
$\underline{T_{15}}$...	*3	40	44	48		$\underline{T_{31}}$...	7	16	60	32		$\underline{T_{47}}$...	11	18	38	56
T_{16} ...	4	49	53	57		T_{32} ...	8	13	58	31		T_{48} ...	12	19	40	54
T_{17} ...	4	50	54	58		T_{33} ...	8	24	36	48		T_{49} ...	12	13	57	32
T_{18} ...	4	51	55	59		T_{34} ...	8	25	51	43		T_{50} ...	*12	26	52	42
T_{19} ...	*4	52	56	60		T_{35} ...	8	19	37	53		T_{51} ...	*12	24	35	45

$(T_I^{(3)})$

T_{52} ...	*13	33	41	56	T_{60} ...	*19	28	46	59	T_{68} ...	*21	30	40	51	
T_{53} ...	*18	27	48	57	T_{61} ...	*21	29	37	52	T_{69} ...	*16	33	42	53	
T_{54} ...	*20	26	47	58	T_{62} ...	*23	32	38	51	T_{70} ...	*13	34	44	55	
$\underline{T_{55}}$...	*15	36	42	55	$\underline{T_{63}}$...	*17	25	45	60	$\underline{T_{71}}$...	*19	27	47	60	(T_{II})
T_{56} ...	*24	30	39	50	T_{64} ...	*15	35	43	56	T_{72} ...	*24	29	38	49	
T_{57} ...	*16	34	43	54	T_{65} ...	*22	32	37	50	T_{73} ...	*20	25	46	57	
T_{58} ...	*14	35	44	53	T_{66} ...	*17	26	48	59	T_{74} ...	*14	36	41	54	
$\underline{T_{59}}$...	*22	31	40	49	$\underline{T_{67}}$...	*18	28	45	58	$\underline{T_{75}}$...	*23	31	39	52	

Diese 75 Polartetraeder ergeben 25 desmische Systeme von je drei Tetraedern, welche in der folgenden Zusammenstellung aufgeführt sind:

$\underline{D_1} \ldots T_1\ T_2\ T_3$

$D_2 \ldots T_4\ T_{27}\ T_{43}$	$D_6 \ldots T_8\ T_{28}\ T_{48}$	$D_{10} \ldots T_{12}\ T_{22}\ T_{46}$	$D_{14} \ldots T_{16}\ T_{24}\ T_{44}$	
$D_3 \ldots T_5\ T_{34}\ T_{50}$	$D_7 \ldots T_9\ T_{35}\ T_{47}$	$D_{11} \ldots T_{13}\ T_{32}\ T_{40}$	$D_{15} \ldots T_{17}\ T_{30}\ T_{42}$	(D_I)
$D_4 \ldots T_6\ T_{29}\ T_{45}$	$D_8 \ldots T_{10}\ T_{21}\ T_{41}$	$D_{12} \ldots T_{14}\ T_{25}\ T_{49}$	$D_{16} \ldots T_{18}\ T_{23}\ T_{51}$	
$D_5 \ldots T_7\ T_{20}\ T_{36}$	$D_9 \ldots T_{11}\ T_{26}\ T_{38}$	$D_{13} \ldots T_{15}\ T_{31}\ T_{39}$	$D_{17} \ldots T_{19}\ T_{33}\ T_{37}$	

$D_{18} \ldots T_{52}\ T_{56}\ T_{60}$	$D_{22} \ldots T_{64}\ T_{65}\ T_{66}$	(D_{II})
$D_{19} \ldots T_{53}\ T_{57}\ T_{61}$	$D_{23} \ldots T_{67}\ T_{68}\ T_{69}$	
$D_{20} \ldots T_{54}\ T_{58}\ T_{62}$	$D_{24} \ldots T_{70}\ T_{71}\ T_{72}$	
$D_{21} \ldots T_{55}\ T_{59}\ T_{63}$	$D_{25} \ldots T_{73}\ T_{74}\ T_{75}$	

Die desmischen Systeme $D_1 \,..\, D_{17}$ der ersten Gruppe (D_I) setzen sich aus je drei Tetraedern $T_1 \,..\, T_{51}$ der Gruppen (T_I), diejenigen $D_{18} \,..\, D_{25}$ der zweiten Gruppe (D_{II}) aus je drei Tetraedern $T_{52} \,..\, T_{75}$ der Gruppe (T_{II}) zusammen.

3) Um sämmtliche Schnittpunkte und Schnittgeraden der 60 Ebenen B zu erhalten, beachte man, dass in jeder Ebene B die 15 Geraden B, die 10 Geraden C und die 6 Geraden G sich

zu je sechsen	(2 Gerade B, 2 Gerade C, 2 Gerade G)	in den 15 Punkten $\mathfrak{B}$,		(3)
„ fünfen	(5 Gerade B)	„ 6 „ $\mathfrak{G}$,		
„ dreien	(3 Gerade B)	„ 10 „ $\mathfrak{C}$,		
„ dreien	(1 Gerade B, 2 Gerade C)	„ 30 „ $\mathfrak{D}$,		
„ zweien	(1 Gerade B, 1 Gerade C)	„ 30 „ $\mathfrak{E}$,		
„ zweien	(1 Gerade B, 1 Gerade G)	„ 30 „ $\mathfrak{F}$		

schneiden. Unter Berücksichtigung der durch je eine Gerade B, C, G hindurchgehenden Ebenen B erhält man folgende Schnittpunkte der 60 Ebenen:

60 Punkte	$\mathfrak{B}$,	in welchen sich je 15 Ebenen B schneiden,	(4α)
$60+300=360$ „	$\mathfrak{J}=(\mathfrak{G}+\mathfrak{F})$,	„ „ 6 „ B „	
$150+450=600$ „	$\mathfrak{K}=(\mathfrak{C}+\mathfrak{E})$,	„ „ 4 „ B „	
300 „	$\mathfrak{D}$,	„ „ 6 „ B „	

und folgende Schnittlinien der 60 Ebenen B:

(4β)

a) 450 Gerade B, in denen sich je zwei Ebenen B schneiden und deren jede 2 Punkte $\mathfrak{B}$, 4 Punkte $\mathfrak{J}$ (2 Punkte $\mathfrak{G}$, 2 Punkte $\mathfrak{F}$), 4 Punkte $\mathfrak{K}$ (2 Punkte $\mathfrak{C}$, 2 Punkte $\mathfrak{E}$) und 2 Punkte $\mathfrak{D}$ enthält,

b) 200 Gerade C, in denen sich je drei Ebenen B schneiden und deren jede 3 Punkte $\mathfrak{B}$, 3 Punkte $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{E}$) und 6 Punkte $\mathfrak{D}$ enthält,

c) 72 Gerade G, in welchen sich je fünf Ebenen B schneiden und deren jede 5 Punkte $\mathfrak{B}$ und 5 Punkte $\mathfrak{J}$ ($\mathfrak{F}$) enthält.

Man bestätigt leicht, dass hiermit alle Schnittlinien und Schnittpunkte der 60 Ebenen B angegeben sind; denn für die ersteren hat man

$$450 \cdot \binom{2}{2} + 200 \cdot \binom{3}{2} + 72 \cdot \binom{5}{2} = 1770 = \binom{60}{2};$$

von der aus (4α) folgenden Summe der Schnittpunkte

$$60 \cdot \binom{15}{3} + 360 \cdot \binom{6}{3} + 600 \cdot \binom{4}{3} + 300 \cdot \binom{6}{3} = 42900$$

ist zufolge (4β) b) und c) die Summe

$$200 \cdot 11 \cdot \binom{3}{3} + 72 \cdot 9 \cdot \binom{5}{3} = 8680$$

abzuziehen, wodurch sich

$$34220 = \binom{60}{3}$$

ergiebt.

Durch jeden der 60 Punkte 𝔅 gehen 6 Gerade G, 10 Gerade C und 15 Gerade B, durch jeden der 360 Punkte 𝔍, welcher in einer Ebene B als Punkt 𝔊, in 5 Ebenen B als Punkt 𝔉 auftritt, gehen eine Gerade G und fünf Gerade B, durch jeden der 600 Punkte 𝔎, welcher in einer Ebene B als Punkt ℭ, in 3 Ebenen B als Punkt 𝔈 auftritt, gehen eine Gerade 𝔈 und drei Geraden B und durch jeden der 300 Punkte 𝔇 gehen 4 Gerade C und 3 Gerade B hindurch. Daraus erhellt auch die verschiedene Bedeutung der Punkte 𝔍 und der Punkte 𝔇, in deren jedem sich 6 Ebenen B schneiden.

4) In den Formeln (5), (6) und (7) sind die tetraedrischen Coordinaten der Punkte 𝔍, 𝔎 und 𝔇 angegeben. Aus jedem der aufgeführten Systeme von Coordinatenwerthen ergeben sich die übrigen zugehörigen durch Bildung der positiven Permutationen und Hinzusetzen der Vorzeichen-Combinationen; bei zwei oder drei gleichen Coordinatenwerthen treten selbstverständlich alle möglichen Permutationen auf.

1)	$\frac{4!}{2!} \cdot 2 = 24$	Punkte	0	0	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	
2)	$12 \cdot 2^2 = 48$	„	0	$\frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{2}$	$\frac{\sin\varphi}{2}$	$\frac{1}{2\sin\varphi}$	
3)	$12 \cdot 2^2 = 48$	„	0	$\frac{\cos\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi}{2}$	$\frac{1}{2\cos\varphi}$	
4)	$12 \cdot 2^3 = 96$	„	$\frac{\sin\varphi}{2}$	$\frac{\cos\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{2}$	$\cos\varphi$	(5)
5)	$12 \cdot 2^3 = 96$	„	$\frac{\cos\varphi}{2}$	$\frac{\sin\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi}{2}$	$\sin\varphi$	
6)	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^3 = 48$	„	$\frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi}{2}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi}{2}$	

Summe: 360 Punkte 𝔍 = (𝔊+𝔉).

1)	$\frac{4!}{2!} \cdot 2 = 24$ Punkte	0	0	$\sin \psi$	$\cos \psi$ [1]	
2)	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^2 = 16$ „	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ [2]	
3)	$12 \cdot 2^2 = 48$ „	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	
4)	$12 \cdot 2^2 = 48$ „	0	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	
5)	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^3 = 48$ „	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$	
6)	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^3 = 32$ „	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ [2]	(6)
7)	$12 \cdot 2^3 = 96$ „	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	
8)	$12 \cdot 2^3 = 96$ „	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}}$	
9)	$12 \cdot 2^3 = 96$ „	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2\sqrt{3}}$	
10)	$12 \cdot 2^3 = 96$ „	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{3}}$	

Summe: 600 Punkte $\mathfrak{K} = (\mathfrak{C} + \mathfrak{E})$.

1)	$\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2 = 12$ Punkte	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ [3]	
2)	$12 \cdot 2^2 = 48$ „	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2\sqrt{2}}$	
3)	$12 \cdot 2^2 = 48$ „	0	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	
4)	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^3 = 32$ „	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2\sqrt{2}}$	(7)
5)	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^3 = 32$ „	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2\sqrt{2}}$	
6)	$\frac{4!}{3!} \cdot 2^3 = 32$ „	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	
7)	$12 \cdot 2^3 = 96$ „	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}$	

Summe: 300 Punkte $\mathfrak{D}$.

[1] Es ist $\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}}$, $\cos \psi = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{\sqrt{3}}$. Ferner ist $\sqrt{5} = \frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}$.

[2] Diese $16 + 32 = 48$ Punkte $\mathfrak{K}$ sind identisch mit den in § 3 (12ϑ) aufgeführten Punkten $\mathfrak{d}$.

[3] Es sind dies die 12 Punkte $\mathfrak{e}_{13} \ldots \mathfrak{e}_{24}$. Vgl. § 10 ($79\varepsilon$).

5) Die Geraden B, C, G werden am einfachsten durch ihre **Klein**schen Coordinaten x_k dargestellt, aus welchen sich die **Plücker**'schen Liniencoordinaten leicht herleiten lassen (vgl. § 1). Die x_k-Coordinaten der Geraden B, C, G setzen sich aus einem Tripel reeller und einem Tripel rein imaginärer Werthe zusammen; bei den hier in Betracht kommenden, durchweg reellen Geraden nehmen die Werthe des einen Tripels die ungeraden ($k = 1, 3, 5$), die des anderen die geraden ($k = 2, 4, 6$) Stellen ein. Es sind alsdann die (positiven) Permutationen des einen Tripels mit den (positiven) des andern Tripels zu combiniren und mit den möglichen Vorzeichen zu versehen. Wenn die Werthe des einen Tripels sich bezw. nur durch den Factor i von denen des anderen unterscheiden, so ergiebt die Vertauschung der beiden Tripel mit einander kein neues Resultat.

Die x_k-Coordinaten zweier in Beziehung auf die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ **conjugirten** Geraden unterscheiden sich durch die Vorzeichen der rein imaginären Werthe, während für **Plücker**'che Coordinaten die beiden Reihen $p_{12}\ p_{13}\ p_{14}$ und $p_{34}\ p_{42}\ p_{23}$ sich vertauschen.

a) Die **450 Geraden** B setzen sich aus folgenden drei Gruppen zusammen:

a) 1) Aus den **18 reellen Geraden** e **und** $e^{(1)}$ (vgl. § 2, (6_e), § 3 (11)); die beiden Werthetripel sind:

$$1\quad 0\quad 0 \quad \text{und} \quad i\quad 0\quad 0 \qquad \ldots \qquad (8a_1)$$

Z. B. $|\,B_1\ B_2\,| = |\,\mathfrak{B}_3\ \mathfrak{B}_4\,| \ldots 1\ \ i\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$ oder in **Plücker**'schen Coordinaten: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

$|\,B_3\ B_4\,| = |\,\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\,| \ldots 1\ {-i}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

Gesammtzahl $3 \,.\, 3 \,.\, 2 = 18$;

a) 2) Aus den **288 reellen Geraden**, welche aus den beiden Werthetripeln:

$$\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{tg}\varphi\quad 1 \quad \text{und} \quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad i \qquad \ldots \qquad (8a_2)$$

auf die angegebene Art resultiren; z. B.:

$|\,B_1\ B_{23}\,| = |\,\mathfrak{B}_{15}\ \mathfrak{B}_{19}\,| \ldots \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 1\quad i$ oder $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & 1 \end{vmatrix}$

$|\,B_9\ B_{46}\,| = |\,\mathfrak{B}_{22}\ \mathfrak{B}_{36}\,| \ldots \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\quad 1\quad i\operatorname{cotg}\varphi$ „ $\begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{tg}^2\varphi & -\operatorname{tg}\varphi \\ \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi \end{vmatrix}$

$|\,B_5\ B_{54}\,| = |\,\mathfrak{B}_{17}\ \mathfrak{B}_{38}\,| \ldots \operatorname{cotg}\varphi\quad i\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad 1\quad i\operatorname{tg}\varphi$ „ $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & -1 & \operatorname{tg}^2\varphi \\ \operatorname{cotg}^2\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{vmatrix}$

} in **Plücker**'schen Coordinaten

$$|B_1\,B_{13}| = |\mathfrak{B}_{17}\,\mathfrak{B}_{21}| \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad i \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \end{vmatrix}$$

$$|B_{40}\,B_{45}| = |\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_{11}| \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad -i \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad „ \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{tg}\varphi & 0 & \operatorname{cotg}\varphi \end{vmatrix}$$

(in Plücker-schen Coordinaten)

u. s. w.; Gesammtzahl $3 . 3 . 2^5 = 288$;

a) 3) Aus den 144 reellen Geraden, welche aus den beiden Werthetripeln:

$$\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad \text{und} \quad 2i \quad 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8a_3)$$

auf die angegebene Art resultiren; z. B.:

$$|B_{43}\,B_{56}| = |\mathfrak{B}_{16}\,\mathfrak{B}_{33}| \ldots \operatorname{cotg}\varphi \quad 2i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}^2\varphi & \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ \frac{1}{\sin^2\varphi} & \operatorname{tg}\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B_{18}\,B_{45}| = |\mathfrak{B}_{26}\,\mathfrak{B}_{58}| \ldots \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 2i \quad 1 \quad 0 \quad „ \quad \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}\varphi & -\frac{1}{\cos^2\varphi} & 1 \\ \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B_{30}\,B_{40}| = |\mathfrak{B}_{21}\,\mathfrak{B}_{51}| \ldots \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad 2i \quad „ \quad \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & -1 \\ \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & 3 \end{vmatrix}$$

und

$$|B_{16}\,B_{36}| = |\mathfrak{B}_{30}\,\mathfrak{B}_{40}| \ldots 2i \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad „ \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ \operatorname{tg}^2\varphi & -\operatorname{tg}\varphi & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B_{38}\,B_{51}| = |\mathfrak{B}_{23}\,\mathfrak{B}_{32}| \ldots 2i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad „ \quad \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \frac{1}{\cos^2\varphi} & -1 & -\operatorname{cotg}\varphi \end{vmatrix}$$

$$|B_{19}\,B_{26}| = |\mathfrak{B}_{46}\,\mathfrak{B}_{59}| \ldots 2i \quad 1 \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad „ \quad \begin{vmatrix} 3 & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi \\ 1 & -\operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$$

(in Plücker'schen Coordinaten)

u. s. w.; Gesammtzahl $2 . 3 . 3 . 2^3 = 144$.

Aus a_1), a_2), a_3) folgt die Gesammtsumme $18 + 288 + 144 = 450$ der Geraden B.

b) Die 200 Geraden C setzen sich aus folgenden drei Gruppen zusammen:

b_1) Aus den 32 reellen Geraden k und k' (vgl. § 1 und § 3 unter (11δ)); die beiden Werthetripel sind:

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \text{und} \quad i \quad i \quad i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b_1)$$

Z. B. $|B_1\;B_5\;B_9| = |\mathfrak{B}_{15}\,\mathfrak{B}_{17}\,\mathfrak{B}_{22}| \quad 1 \quad i \quad 1 \quad i \quad 1 \quad i$ oder $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$|B_{15}\;B_{17}\;B_{22}| = |\mathfrak{B}_1\;\mathfrak{B}_5\;\mathfrak{B}_9| \quad 1 \; -i \quad 1 \; -i \quad 1 \; -i$ „ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(in Plücker-schen Coordinaten)

Gesammtzahl $1 . 1 . 2^5 = 32$;

b$_2$) Aus den 72 reellen Geraden, welche aus den beiden Werthe-tripeln $0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi$ und $0 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi$ (8b$_2$)
auf die angegebene Art resultiren; z. B.:

$$|B_1\, B_{25}\, B_{28}| = |\mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_{17}\, \mathfrak{B}_{20}| \ldots \; 0 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \text{ oder } \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}\right|$$

$$|B_5\, B_{29}\, B_{37}| = |\mathfrak{B}_8\, \mathfrak{B}_{22}\, \mathfrak{B}_{52}| \ldots \; 0 \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \;\; ,, \;\; \left|\begin{matrix} -\operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} \end{matrix}\right|$$

$$|B_9\, B_{34}\, B_{56}| = |\mathfrak{B}_{11}\, \mathfrak{B}_{15}\, \mathfrak{B}_{41}| \ldots \; 0 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \;\; ,, \;\; \left|\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}\right|$$

(In Plücker'schen Coordinaten)

u. s. w.; Gesammtzahl $3 \,.\, 3 \,.\, 2^3 = 72$;

dieselben enthalten je einen Punkt (je eine Ebene) der drei Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3.

b$_3$) Aus den 96 reellen Geraden, welche aus den beiden Werthe-tripeln $1 \quad 1 \quad 1$ und $i\operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0$ (8b$_3$)
sich ergeben; z. B.:

$$|B_{19}\, B_{31}\, B_{54}| = |\mathfrak{B}_{14}\, \mathfrak{B}_{38}\, \mathfrak{B}_{58}| \ldots \; 1 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 1 \quad 0 \text{ oder } \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}^2\varphi & -\operatorname{tg}\varphi & 1 \\ \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 \end{matrix}\right|$$

u. s. w. und

$$|B_{14}\, B_{39}\, B_{57}| = |\mathfrak{B}_{13}\, \mathfrak{B}_{30}\, \mathfrak{B}_{53}| \ldots \; i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 1 \quad 0 \quad 1 \;\; ,, \;\; \left|\begin{matrix} \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 \\ -\operatorname{tg}^2\varphi & \operatorname{tg}\varphi & -1 \end{matrix}\right|$$

(in Plücker'schen Coordinaten)

u. s. w.; Gesammtzahl $2 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 2^4 = 96$.

Dieselben enthalten keinen Punkt (keine Ebene) von T_1, T_2, T_3, sondern je drei Punkte (je drei Ebenen) der übrigen Polartetraeder.

Aus b$_1$), b$_2$), b$_3$) folgt die Gesammtsumme $32 + 72 + 96 = 200$ der Geraden C.

c) Die 72 Geraden G resultiren auf die angegebene Art aus den beiden Werthetripeln:

$0 \quad 1 \quad \operatorname{tg}\varphi$ und $0 \quad i \quad i\operatorname{tg}\varphi$ (8c)

Z. B. $|B_1\, B_{29}\, B_{30}\, B_{35}\, B_{36}| = |\mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_{14}\, \mathfrak{B}_{15}\, \mathfrak{B}_{21}\, \mathfrak{B}_{24}| \ldots$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \text{ oder } \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}\varphi \end{matrix}\right| \text{ oder } \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{matrix}\right| \quad \text{in Plücker'schen Coordinaten}$$

$|B_2\, B_{14}\, B_{15}\, B_{21}\, B_{24}| = |\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_{29}\, \mathfrak{B}_{30}\, \mathfrak{B}_{35}\, \mathfrak{B}_{36}| \ldots$ (8c$_1$)

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad -i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi \text{ oder } \left|\begin{matrix} 0 & 1 & \operatorname{tg}\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \text{ oder } \left|\begin{matrix} 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \quad ,,$$

$|B_5\, B_{13}\, B_{25}\, B_{48}\, B_{53}| = |\mathfrak{B}_8\, \mathfrak{B}_{17}\, \mathfrak{B}_{33}\, \mathfrak{B}_{44}\, \mathfrak{B}_{57}| \ldots$

$$0 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i \text{ oder } \left|\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & 1 & -\operatorname{tg}^2\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}\right| \quad ,, \qquad (8c_2)$$

$|B_9\, B_{19}\, B_{29}\, B_{47}\, B_{50}| = |\mathfrak{B}_{11}\, \mathfrak{B}_{22}\, \mathfrak{B}_{27}\, \mathfrak{B}_{39}\, \mathfrak{B}_{58}| \ldots$

$$0 \quad i \quad 1 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \text{ oder } \left|\begin{matrix} -1 & \operatorname{tg}^2\varphi & \operatorname{tg}\varphi \\ 1 & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi \end{matrix}\right| \quad ,, \qquad (8c_3)$$

u. s. w.; Gesammtzahl $3 \,.\, 3 \,.\, 2^3 = 72$;

d. h. 3 Gruppen von je 24 Geraden, welche je einen Punkt der Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3 enthalten.

6) Die 60 Ebenen B, die 72 Geraden G und die 60 Punkte $\mathfrak{B}$ bilden die erwähnte Configuration

$$\text{(Cf. } (60_{15},\ 72_5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

nach Reye's Bezeichnung; nach der von J. de Vries[1]) und mir[2]) angegebenen Bezeichnung ist dieselbe mit Rücksicht auf die übrigen auftretenden Configurationsgeraden durch

$$(60_6{}^{15},\ 72_5{}^5 + 200_3{}^3 + 450_2{}^2,\ 60_{15}{}^6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

darzustellen und als eine vollständige, regelmässige, sich selbst reciproke Configuration zu bezeichnen.

Der regelmässige Repräsentant dieser Configuration, welcher der Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe angehört, ergiebt sich leicht dadurch, dass man die (1α) . . (1η) aufgeführten Werthe für die tetraedrischen Coordinaten der Eckpunkte $\mathfrak{B}$ und der Ebenen B mit einem geeigneten Factor multiplicirt und die entsprechenden rechtwinkligen Coordinaten bestimmt.[3])

Die 60 Ebenen der Configuration werden alsdann gebildet:

1) durch die 12 Ebenen eines regulären Pentagondodekaeders P_1, dessen 20 Eckpunkte nicht der Cf. angehören,

2) durch die 20 Ebenen eines regulären, zu P_1 concentrischen Ikosaeders J, dessen Eckpunkte mit den 12 Eckpunkten des durch die Ebenen von P_1 bestimmten Kepler'schen (oder Poinsot'schen) Stern -12-Flachs (oder -Ecks) dritter Art zusammenfallen,

3) durch die 12 Ebenen eines zweiten, zu P_1 und J concentrischen regulären Pentagondodekaeders P_2, dessen Eckpunkte mit den 20 Eckpunkten des durch die Ebenen von P_1 bestimmten Kepler'schen Stern-12-Flachs siebenter Art oder mit den 20 durch die Ebenen von J bestimmten Eckpunkten von zehn regulären Tetraedern (mit je zwei zusammenfallenden Eckpunkten und Seitenflächen) übereinstimmen,

4) durch die 15 gemeinsamen Symmetrie-Ebenen der drei Polyeder P_1, J, P_2,

1) Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Bd. C. Abth. II, Juli 1891.
2) Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. z. Marburg. Mai 1892. S. 86 ff.
3) Vgl. E. Hess a. a. O. S. 92—94.

5) durch die unendlich ferne Ebene E_∞.

Die 60 Eckpunkte der Cf. sind:

1') die 12 Eckpunkte von J,

2') die 20 Eckpunkte von P_2,

3') die 12 Eckpunkte des durch die Ebenen von J bestimmten Poinsot'schen Stern-12-Ecks der siebenten Art oder des durch die Ebenen von P_2 bestimmten Kepler'schen (oder Poinsot'schen) Stern 12-Flachs (oder -Ecks) dritter Art,

4') die 15 unendlich fernen Punkte der Kantenaxen der sämmtlichen concentrischen Polyeder,

5') der gemeinsame Mittelpunkt O derselben.

Jede der 12 Ebenen **1)** von P_1 enthält je fünf der Punkte **1')**, **2')**, **4')**, jede der 20 Ebenen **2)** von J enthält je drei Punkte **1')**, je sechs Punkte **2')**, je drei Punkte **3')** und je drei Punkte **4')**, jede der 12 Ebenen **3)** von P_2 enthält je fünf der Punkte **2')**, **3')**, **4')**, jede der 15 Ebenen **4)** enthält je vier der Punkte **1')**, **2')**, **3')**, je zwei Punkte **4')** und den gemeinsamen Mittelpunkt O, endlich die Ebene E_∞ enthält die 15 Punkte **4')**. Analog ergeben sich die 15 durch jeden der Punkte **1')** . . **5')** hindurchgehenden Ebenen durch Vertauschung der accentuirten mit den nichtaccentuirten Ziffern.

Die rechtwinkligen Coordinaten der 60 Ebenen und der 60 Punkte sind in Beziehung auf ein durch drei aufeinander senkrechte, zweizählige Axen (Kantenaxen) der concentrischen Polyeder gebildetes Coordinatensystem die folgenden, wobei durch b die Kantenaxe des Pentagondodekaeders P_1 bezeichnet ist (vergl. die in (1α) . . (1η) angegebenen tetraedrischen Coordinaten der Ebenen B und der Punkte $\mathfrak{B}$):

$$1)\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \pm\frac{1}{b} & \ldots B_{17}\,..\,B_{20} \\ \pm\frac{1}{b} & 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \ldots B_{29}\,..\,B_{32} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \pm\frac{1}{b} & 0 & \ldots B_{41}\,..\,B_{44} \end{array}\right. \qquad 1')\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm b & \pm b\operatorname{cotg}\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{17}\,..\,\mathfrak{B}_{20} \\ \pm b\operatorname{cotg}\varphi & 0 & \pm b & ..\,\mathfrak{B}_{29}\,..\,\mathfrak{B}_{32} \\ \pm b & \pm b\operatorname{cotg}\varphi & 0 & ..\,\mathfrak{B}_{41}\,..\,\mathfrak{B}_{44} \end{array}\right\} \text{(10a)}$$

$$2)\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & \ldots B_{21}\,..\,B_{24} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \ldots B_{33}\,..\,B_{36} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & 0 & \ldots B_{45}\,..\,B_{48} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{b} & \ldots B_{5}\,..\,B_{12} \end{array}\right. \qquad 2')\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & \pm b\operatorname{cotg}\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{21}\,..\,\mathfrak{B}_{24} \\ \pm b\operatorname{cotg}\varphi & 0 & \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{33}\,..\,\mathfrak{B}_{36} \\ \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & \pm b\operatorname{cotg}\varphi & 0 & ..\,\mathfrak{B}_{45}\,..\,\mathfrak{B}_{48} \\ \pm b\operatorname{cotg}^2\varphi & \pm b\operatorname{cotg}^2\varphi & \pm b\operatorname{cotg}^2\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{5}\,..\,\mathfrak{B}_{12} \end{array}\right\} \text{(10b)}$$

$$3)\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & \ldots B_{13}\,..\,B_{16} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & 0 & \pm\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{b} & \ldots B_{25}\,..\,B_{28} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{b} & \pm\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{b} & 0 & \ldots B_{37}\,..\,B_{40} \end{array}\right. \qquad 3')\left\{\begin{array}{llll} 0 & \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & \pm b\operatorname{cotg}^4\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{13}\,..\,\mathfrak{B}_{16} \\ \pm b\operatorname{cotg}^4\varphi & 0 & \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & ..\,\mathfrak{B}_{25}\,..\,\mathfrak{B}_{28} \\ \pm b\operatorname{cotg}^3\varphi & \pm b\operatorname{cotg}^4\varphi & 0 & ..\,\mathfrak{B}_{37}\,..\,\mathfrak{B}_{40} \end{array}\right\} \text{(10c)}$$

$$4)\left\{\begin{array}{llll} \pm\frac{1}{0} & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \ldots B_{49}\,..\,B_{52} \\ \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \pm\frac{1}{0} & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \ldots B_{53}\,..\,B_{56} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \pm\frac{1}{0} & \ldots B_{57}\,..\,B_{60} \\ \frac{1}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \ldots B_{1}\,..\,B_{3} \end{array}\right. \qquad 4')\left\{\begin{array}{llll} \pm\frac{1}{0} & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \ldots \mathfrak{B}_{49}\,..\,\mathfrak{B}_{52} \\ \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \pm\frac{1}{0} & \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \ldots \mathfrak{B}_{53}\,..\,\mathfrak{B}_{56} \\ \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} & \pm\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{0} & \pm\frac{1}{0} & \ldots \mathfrak{B}_{57}\,..\,\mathfrak{B}_{60} \\ \frac{1}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \ldots \mathfrak{B}_{1}\,..\,\mathfrak{B}_{3} \end{array}\right\} \text{(10d)}$$

$$5)\quad 0 \quad 0 \quad 0 \;\ldots B_4 = E_\infty \qquad 5')\quad 0 \quad 0 \quad 0 \;\ldots \mathfrak{B}_4 = O \ldots \text{(10e).}$$

§ 42.

Eintheilungen der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ durch die Geraden der Cf. $(60_{15},\ 72_5)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) Die 72 reellen Geraden } G \text{ (vgl. § 41 unter 5c)) schneiden} \\ \text{die Fundamentalfläche } F_1^{(1)} \text{ in } 2\,.\,72 = 144 = 12^2 \text{ Punkten } \mathfrak{g}_0, \\ \text{die 200 reellen Geraden } C \text{ (§ 41 unter 5b) in} \\ \qquad 2\,.\,200 = 400 = 20^2 \text{ Punkten } \mathfrak{c}_0, \\ \text{und die 450 reellen Geraden } B \text{ (§ 41 unter 5a) in} \\ \qquad 2\,.\,450 = 900 = 30^2 \text{ Punkten } \mathfrak{b}_0, \end{array}\right\} \text{(11a)}$$

und zwar liegen die 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ zu je 12 auf 2 . 12 Erzeugenden g_0 der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$,
die 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ zu je 20 auf 2 . 20 Erzeugenden c_0 der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$,
die 900 Punkte $\mathfrak{b}_0$ zu je 30 auf 2 . 30 Erzeugenden b_0 der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$, (11b)

so dass je zwei Erzeugende des ersten und zweiten Systems sich in jedem solchen Punkte schneiden.

Je eine Gerade g_0 wird von 20 Geraden c_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 20 Punkten $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})}$ geschnitten,
je eine Gerade c_0 wird von 12 Geraden g_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 12 Punkten $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})}$ geschnitten,
je eine Gerade g_0 wird von 30 Geraden b_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 30 Punkten $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})}$ geschnitten,
je eine Gerade b_0 wird von 12 Geraden g_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 12 Punkten $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})}$ geschnitten,
je eine Gerade c_0 wird von 30 Geraden b_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 30 Punkten $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})}$ geschnitten,
je eine Gerade b_0 wird von 20 Geraden c_0 (Erzeugenden des anderen Systems) in 20 Punkten $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})}$ geschnitten. (11c)

Auf jeder der Erzeugenden treten also auf: 12 Ikosaeder- Punkte,
20 Pentagondodekaeder- „
30 Dodeka-Ikosaeder- „

und zwar:

a) auf den 12 Geraden g_0 jedes der beiden Systeme:

$\frac{12 \,.\, 24}{2} = 144$ Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{g})}$ oder $\mathfrak{g}_0$,

$20 \,.\, 24 = 480$ „ $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$,

$30 \,.\, 24 = 720$ „ $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$,

b) auf den 20 Geraden c_0 jedes der beiden Systeme:

$12 \,.\, 40 = 480$ Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})}$,

$\frac{20 \,.\, 40}{2} = 400$ „ $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{c})}$ oder $\mathfrak{c}_0$,

$30 \,.\, 40 = 1200$ „ $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$, (11d)

c) auf den 30 Geradenpaaren b_0:

$$\left.\begin{array}{l} 12\,.\,60 = 720 \text{ Punkte } \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})}, \\ 20\,.\,60 = 1200 \quad \text{,,} \quad \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})}, \\ \frac{30\,.\,60}{2} = 900 \quad \text{,,} \quad \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{b})} \text{ oder } \mathfrak{b}_0. \end{array}\right\} \quad (11d)$$

Die durch die 2 . 12 Geraden g_0, die 2 . 20 Geraden c_0 und die 2 . 30 Geraden b_0 bestimmte Eintheilung der Fläche $F_1^{(1)}$ ist als regelmässige dodeka-ikosaedrische zu bezeichnen.

Ganz Analoges gilt für die durch die Geraden der Cf. an die Fläche $F_1^{(1)}$ gelegten Berührungsebenen χ_0, γ_0, β_0. Die Berührungsebenen, welche durch die einer Geraden G, B, C in Beziehung auf $F_1^{(1)}$ conjugirte Polare G', C', B' hindurchgehen, haben zu Berührungspunkten die Schnittpunkte der Geraden G, C, B mit $F_1^{(1)}$; und umgekehrt sind die Schnittpunkte der Geraden G', C', B' mit $F_1^{(1)}$ die Berührungspunkte der durch G, C, B an $F_1^{(1)}$ gelegten Berührungsebenen.

Die gesammten Punkte, Ebenen und Geraden, welche der Fläche $F_1^{(1)}$ angehören, bilden folgende Configurationen:

$(144^{23}_{2},\ 24^{12}_{12},\ 144^{2}_{23})$, Cf. Punkte $\mathfrak{g}_0$, Cf. Ebenen χ_0, Cf.-Gerade g_0 . . . (12α)

$(400^{39}_{2},\ 40^{20}_{20},\ 400^{2}_{39})$, ,, $\mathfrak{c}_0$, ,, γ_0, ,, c_0 . . . (12β)

$(900^{59}_{2},\ 60^{30}_{30},\ 900^{2}_{59})$, ,, $\mathfrak{b}_0$, ,, β_0, ,, b_0 . . . (12γ),

welche drei Configurationen in dem gemeinsamen Symbole:

$(n^{2n-1}_{2},\ 2n^{n}_{n},\ n^{2}_{2n-1})$ für $n = 12, 20, 30$ enthalten sind; ferner:

$$(480^{31}_{1+1},\ 24^{20}_{20} + 40^{12}_{12},\ 480^{1+1}_{31}),$$

Cf. Punkte $\mathfrak{g}^{(\mathfrak{c})}_0 = \mathfrak{c}^{(\mathfrak{g})}_0$, Cf. Ebenen $\chi^{(\gamma)}_0 = \gamma^{(\chi)}_0$, Cf. Gerade g_0 und c_0 . . (13α),

$$(720^{41}_{1+1},\ 24^{30}_{30} + 60^{12}_{12},\ 720^{1+1}_{41}),$$

Cf. Punkte $\mathfrak{g}^{(\mathfrak{b})}_0 = \mathfrak{b}^{(\mathfrak{g})}_0$, Cf. Ebenen $\chi^{(\beta)}_0 = \beta^{(\chi)}_0$, Cf. Gerade g_0 und b_0 . . (13β),

$$(1200^{49}_{1+1},\ 40^{30}_{30} + 60^{20}_{20},\ 1200^{1+1}_{49}),$$

Cf. Punkte $\mathfrak{c}^{(\mathfrak{b})}_0 = \mathfrak{b}^{(\mathfrak{c})}_0$, Cf. Ebenen $\gamma^{(\beta)}_0 = \beta^{(\gamma)}_0$, Cf. Gerade c_0 und b_0 . . (13γ),

welche drei Configurationen in dem gemeinsamen Symbole

$$(2m\,n^{m+n-1}_{1+1},\ 2m^{n}_{n} + 2n^{m}_{m},\ 2m\,n^{1+1}_{m+n-1}) \text{ für } \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 12, 20, 30,\ m \neq n,$$

enthalten sind.

2) Der Nachweis für die angegebenen Lagenbeziehungen, insbesondere für die Thatsache, dass auf jeder Erzeugenden der Fläche $F_1^{(1)}$ je 20 Ikosaeder-, je 30 Pentagondodekaeder- und je 30 Dodeka-Ikosaeder-Punkte als

Schnittpunkte mit den Erzeugenden des anderen Systems entstehen, kann analog wie im ersten Haupttheile (§ 2) analytisch durch Aufstellung der tetraedrischen Coordinaten der Punkte und Ebenen geführt werden, wobei wir uns wiederum auf die Bestimmung der Lage der Punkte beschränken können. Die Coordinaten der Erzeugenden der Fundamentalfläche, sowie weiterer Verbindungslinien der auftretenden Punkte werden sich wieder am einfachsten und übersichtlichsten bei Anwendung der Klein'schen x_i-Coordinaten darstellen.

I. Coordinaten der 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ (Ebenen χ_0) und der 2 . 12 Geraden g_0.

Die 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ (Ebenen χ_0) zerfallen in drei Gruppen von je 2 . 24 = 48 Punkten (Ebenen).

Ia) Die 2 . 12 Geraden G und G', welche je einen Punkt (eine Ebene) des Fundamentaltetraeders T_1 enthalten (vgl. § 41 5) unter $8c_1$)), schneiden $F_1^{(1)}$ in je zwei Punkten $\mathfrak{g}_0$, deren Coordinaten sich aus

$$0 \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi \quad \pm i \;\ldots\; \pm i \quad -\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0 \quad \ldots \quad (14a)$$

ergeben, indem die 12 positiven Permutationen der vier Werthe

$$0 \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi \quad i$$

mit den vier Vorzeichencombinationen versehen werden.

Ib) und Ic) Die beiden anderen Gruppen von je 2 . 24 = 48 Punkten $\mathfrak{g}_0$ sind die Schnittpunkte von je 2 . 12 Geraden G, welche bez. einen Eckpunkt (eine Ebene) des Fundamentaltetraeders T_2 und T_3 enthalten (vgl. § 41 5) unter $8c_2$) und $8c_3$)), mit der Fläche $F_1^{(1)}$.

Zwei zu Ib) gehörige Punktpaare haben z. B. die Coordinaten:

$$\left\{\begin{matrix} \varepsilon & \varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi & 1 \;\ldots\; \varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon & 1 & \varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi \\ \varepsilon^4 & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & 1 \;\ldots\; \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^4 & 1 & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad (14b);$$

für zwei zu Ic) gehörige Punktpaare sind z. B. die Coordinaten:

$$\left\{\begin{matrix} -\varepsilon & \varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi & 1 \;\ldots\; -\varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon & 1 & \varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi \\ -\varepsilon^4 & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & 1 \;\ldots\; -\varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^4 & 1 & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad (14c),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi + i\frac{1}{2\sin\varphi} \\ \varepsilon^4 &= e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi - i\frac{1}{2\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^2 = e^{\frac{4\pi i}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\,\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi + i\,\frac{1}{2\cos\varphi} \\ \varepsilon^3 = e^{-\frac{4\pi i}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} - i\,\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi - i\,\frac{1}{2\cos\varphi} \\ \text{und} \quad \begin{array}{l} \varepsilon + \varepsilon^4 = \operatorname{tg}\varphi \quad , \quad \varepsilon - \varepsilon^4 = \frac{i}{\sin\varphi} \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = -\operatorname{cotg}\varphi, \quad \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \frac{i}{\cos\varphi} \end{array} \quad \text{ist.} \end{array}\right\} \quad (15)$$

Die sämmtlichen Coordinatenwerthe für die 2.48 Punkte der beiden Gruppen Ib) und Ic) werden erhalten, wenn man die 12 positiven Permutationen der vier Werthe

$$\varepsilon \quad \varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi \quad \varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad \text{oder} \quad 1 \quad \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi \quad \varepsilon\operatorname{tg}\varphi \quad \varepsilon^4$$

für die zweite Gruppe mit den 4 negativen, für die dritte Gruppe mit den 4 positiven Vorzeichen-Combinationen versieht.

Diese 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ (Ebenen χ_0) liegen nun (schneiden sich) zu je 12 auf (in) 2.12 Erzeugenden g_0 der Fläche $F_1^{(1)}$, so dass durch jeden Punkt $\mathfrak{g}_0$ zwei Geraden g_0 gehen (in jeder Ebene χ_0 zwei Geraden g_0 liegen).

Die Klein'schen x_i-Coordinaten dieser 2.12 Geraden g_0 sind:

$$\begin{array}{c} \text{Erstes System:} \\ (16\alpha)\left\{\begin{array}{cccccc} \sin\varphi & 0 & \pm\cos\varphi & 0 & \pm i & 0 \\ \pm\cos\varphi & 0 & \pm i & 0 & \sin\varphi & 0 \\ \pm i & 0 & \sin\varphi & 0 & \pm\cos\varphi & 0 \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Zweites System:} \\ \left.\begin{array}{cccccc} 0 & \sin\varphi & 0 & \pm\cos\varphi & 0 & \pm i \\ 0 & \pm\cos\varphi & 0 & \pm i & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \pm i & 0 & \sin\varphi & 0 & \pm\cos\varphi. \end{array}\right\}(16\beta) \end{array}$$

Die 12 Punkte $\mathfrak{g}_0$ (Ebenen χ_0), welche auf der Geraden

$$\sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad i \quad 0$$

liegen (durch dieselbe hindurchgehen), sind folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{lcccc} \mathfrak{g}_0^{(1)} \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & i \\ \mathfrak{g}_0^{(2)} \ldots & i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \mathfrak{g}_0^{(3)} \ldots & \sin\varphi & 0 & -i & \cos\varphi \\ \mathfrak{g}_0^{(4)} \ldots & -\cos\varphi & -i & 0 & \sin\varphi \end{array} \Bigg| \begin{array}{lcccc} \mathfrak{g}_0^{(5)} \ldots & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^4 & 1 \\ \mathfrak{g}_0^{(6)} \ldots & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & 1 & -\varepsilon^4 \\ \mathfrak{g}_0^{(7)} \ldots & \varepsilon^4 & 1 & -\varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi \\ \mathfrak{g}_0^{(8)} \ldots & 1 & -\varepsilon^4 & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon\operatorname{tg}\varphi \end{array} \\ \qquad\qquad \begin{array}{lcccc} \mathfrak{g}_0^{(9)} \ldots & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & -1 & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^4 \\ \mathfrak{g}_0^{(10)} \ldots & \varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^4 & -\varepsilon\operatorname{tg}\varphi & 1 \\ \mathfrak{g}_0^{(11)} \ldots & 1 & \varepsilon\operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^4 & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi \\ \mathfrak{g}_0^{(12)} \ldots & -\varepsilon^4 & -\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi & -1 & -\varepsilon\operatorname{tg}\varphi\,. \end{array} \end{array}\right\} (17)$$

Die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{g}_0^{(3)} \ldots \mathfrak{g}_0^{(12)}$ ergeben sich aus denen von $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ und $\mathfrak{g}_0^{(2)}$, wenn die letzteren mit

$\operatorname{tg}\varphi$, $-\operatorname{cotg}\varphi$ für $\mathfrak{g}_0^{(3)}$, $\mathfrak{g}_0^{(4)}$, mit $\varepsilon\operatorname{tg}\varphi$, $\varepsilon^4\operatorname{tg}\varphi$, $-\varepsilon\operatorname{cotg}\varphi$, $-\varepsilon^4\operatorname{cotg}\varphi$ für $\mathfrak{g}_0^{(5)} \ldots \mathfrak{g}_0^{(8)}$,

mit $\varepsilon^2\operatorname{tg}\varphi$, $\varepsilon^3\operatorname{tg}\varphi$, $-\varepsilon^2\operatorname{cotg}\varphi$, $-\varepsilon^3\operatorname{cotg}\varphi$ für $\mathfrak{g}_0^{(9)} \ldots \mathfrak{g}_0^{(12)}$

multiplicirt und zu den entsprechenden Coordinaten von $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ addirt werden. Es sind also in der That die 12 Punkte $\mathfrak{g}_0$ Ikosaederpunkte (die 12 Ebenen χ_0 durch eine Gerade g_0 Pentagondodekaeder-Ebenen), deren Parameter sich bei Darstellung durch eine binäre Form aus den Wurzeln der Gleichung

$$\zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1{}^5 - \zeta_2{}^5 \operatorname{tg} {}^5\varphi)(\zeta_1{}^5 + \zeta_2{}^5 \operatorname{cotg} {}^5\varphi) = 0 \text{ [1])} \quad \ldots\ldots \quad (17\alpha)$$

ergeben.

II. Coordinaten der 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ (Ebenen γ_0) und der 2 . 20 Geraden c_0.

Die 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ (Ebenen γ_0) zerfallen ebenfalls in drei Gruppen von 64 Punkten $\mathfrak{c}'_0$ (Ebenen γ_0), 144 Punkten $\mathfrak{c}''_0$ (Ebenen γ_0'') und 192 Punkten $\mathfrak{c}'''_0$ (Ebenen γ_0''').

IIa) Die 2 . 16 Geraden C und C', welche je drei Punkte (Ebenen) der drei Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3 enthalten und mit den im ersten Hauptheile (§ 1, § 3 (11δ)) durch k, k' bezeichneten identisch sind (vgl. § 41 5) unter (8b$_1$)), schneiden $F_1^{(1)}$ in je zwei Punkten $\mathfrak{c}'_0$, deren Coordinaten sich aus

$$\pm i\sqrt{3} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \ldots \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{matrix}\right\} \ldots\ldots \quad (18a)$$

ergeben. Diese 64 Punkte $\mathfrak{c}'_0$ sind mit den früher (§ 2 (10β)) durch $\mathfrak{h}_0^{(k)} = \mathfrak{k}_0$ bezeichneten identisch; sie liegen zu je 8, den Hexaederpunkten entsprechend auf den 2 . 8 Geraden c'_0, welche früher durch k_0 bezeichnet wurden (§ 2 (6$\varkappa$)) und deren x_i-Coordinaten aus

$$\left.\begin{matrix} & 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ \text{und} & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19a)$$

folgen.

IIb) Die zweite Gruppe von 3 . 48 = 144 Punkten $\mathfrak{c}''_0$ (Ebenen γ''_0) besteht aus den Schnittpunkten (Berührungsebenen) von je 24 Geraden C und C', welche je einen Punkt (eine Ebene) der drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 enthalten (vgl. § 41 5) unter (8b$_2$)) mit der Fläche $F_1^{(1)}$.

IIb$_1$) Zwei Punktpaare der ersten Abtheilung von 48 Punkten $\mathfrak{c}''_0$ haben z. B. die Coordinaten:

$$0 \quad \cos\psi \quad \sin\psi \quad \pm i \ldots \pm i \quad -\sin\psi \quad \cos\psi \quad 0 \ \ldots \quad (18b_1),$$

[1]) Vgl. z. B. E. Hess: Kugeltheilung. S. 408 Formel (56β').

wo wiederum

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} = \sin\psi, \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{3}} = \cos\psi$$

gesetzt ist und den 12 positiven Permutationen der 4 Coordinatenwerthe die 4 Vorzeichen-Combinationen hinzuzufügen sind.

IIb$_2$) und IIb$_3$) Zwei Punktpaare der zweiten und dritten Abtheilung von je 48 Punkten $\mathfrak{c}''_0$ haben die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -\alpha \mid \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid 1 \mid \operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{tg}^2\varphi) \mid \ldots. \\ \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid \alpha \mid -\operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{tg}^2\varphi) \mid 1 \mid \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} -\alpha^2 \mid \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid 1 \mid \operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi) \mid \ldots \\ \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid \alpha^2 \mid -\operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi) \mid 1 \mid \end{array}\right\} \end{array}\right\} (18\mathrm{b}_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha \mid \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid 1 \mid \operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{tg}^2\varphi) \mid \ldots. \\ -\operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid \alpha \mid -\operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha\operatorname{tg}^2\varphi) \mid 1 \mid \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} \alpha^2 \mid \operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid 1 \mid \operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi) \mid \ldots. \\ -\operatorname{tg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{cotg}^2\varphi) \mid \alpha^2 \mid -\operatorname{cotg}\varphi\,(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi \mid 1 \mid \end{array}\right\} \end{array}\right\} (18\mathrm{b}_3)$$

Die Coordinatenwerthe für die 2 . 48 Punkte $\mathfrak{c}_0''$ dieser beiden Abtheilungen resultiren, wenn die 12 Permutationen der obigen 4 Werthe für die erste Abtheilung mit den 4 negativen, für die zweite mit den 4 positiven Zeichencombinationen versehen werden.

Diese 144 Punkte $\mathfrak{c}_0''$ liegen zu 12 auf 2 . 12 = 24 Geraden c_0'', welche sich zu zweien in einem solchen Punkte schneiden und Erzeugende der Fläche $F_1^{(1)}$ sind. Die Klein'schen Coordinaten für die 12 Geraden des ersten und zweiten Systems folgen aus:

$$\cos\psi \quad 0 \quad \sin\psi \quad 0 \quad i \quad 0 \quad \text{und} \quad 0 \quad \cos\psi \quad 0 \quad \sin\psi \quad 0 \quad i \quad \ldots. \quad (19\mathrm{b})$$

nach derselben Bildungsweise, wie für die 2 . 12 Geraden g_0 (vgl. (16α) und (16β) unter I).

IIc) Die dritte Gruppe endlich umfasst 2 . 96 = 192 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$ (Ebenen γ_0'''), welche die Schnittpunkte der (Berührungs-Ebenen durch die) 96 Geraden C und C' sind, welche keinen der Punkte (Ebenen) der Tetraeder $T_1 \,..\, T_3$, sondern je drei Punkte (Ebenen) der übrigen Polartetraeder enthalten (vgl. § 41 5) unter (8b$_3$)).

Zwei solcher Punktpaare haben die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{llllllll} \alpha\operatorname{tg}^2\varphi & \alpha^2+\operatorname{tg}\varphi & \alpha^2\operatorname{tg}\varphi & -1 \;\ldots\; 1 & -\alpha^2\operatorname{tg}\varphi & \alpha^2+\operatorname{tg}\varphi & \alpha\operatorname{tg}^2\varphi \\ \alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi & \alpha+\operatorname{tg}\varphi & \alpha\operatorname{tg}\varphi & -1 \;\ldots\; 1 & -\alpha\operatorname{tg}\varphi & \alpha+\operatorname{tg}\varphi & \alpha^2\operatorname{tg}^2\varphi \end{array}\right\} (18\mathrm{c}).$$

Die Coordinatenwerthe für alle 2 . 96 = 192 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$ resultiren,

wenn die 12 positiven Permutationen der beiden Quadrupel mit den 4 positiven und den 4 negativen Zeichencombinationen versehen werden.

Diese 192 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$ sind die Schnittpunkte je einer der 2 . 8 Geraden c'_0 (oder k) (vgl. (19a)) mit je einer der 2 . 12 Geraden c''_0 (vgl. (19b)), und zwar wird jede der 8 Geraden c'_0 des ersten und des zweiten Systems von jeder der 12 Geraden c''_0 des zweiten und des ersten Systems in 12, jede der Geraden c''_0 von je einer Geraden c'_0 in 8 Punkten $\mathfrak{c}'''_0$ geschnitten.

Auf jeder der 2 . 8 Geraden c'_0 treten also 8 Punkte $\mathfrak{c}'_0$ und 12 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$, auf jeder der 2 . 12 Geraden c_0'' 12 Punkte $\mathfrak{c}_0''$ und 8 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$ auf. (Analoges gilt für die Ebenen γ_0', γ_0'', γ_0''').

Die 20 auf jeder Geraden c_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{c}_0$ (sich in ihr schneidenden Ebenen γ_0) sind Pentagondodekaeder-Punkte (Ikosaeder-Ebenen), während die unter IV zu betrachtenden Schnittpunkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})}$ (Ebenen $\gamma_0^{(\chi)} = \chi_0^{(\gamma)}$) einer Geraden c_0 mit den 12 dem anderen System angehörigen Geraden g_0 die zugehörigen Ikosaeder-Punkte (Pentagondodekaeder-Ebenen) darstellen.

III. Coordinaten der 900 Punkte $\mathfrak{b}_0$ (Ebenen β_0) und der 2 . 30 Geraden b_0.

Die 900 Punkte $\mathfrak{b}_0$ (Ebenen β_0) zerfallen gleichfalls in drei Gruppen von 36 Punkten $\mathfrak{b}'_0$ (Ebenen β'_0), 3 . 192 = 576 Punkten $\mathfrak{b}''_0$ (Ebenen β''_0) und 288 Punkten $\mathfrak{b}'''_0$ (Ebenen β'''_0).

IIIa) Die 18 Geraden e und $e_0^{(1)}$ (vgl. § 41 5) unter (8$\mathfrak{a}_1$)), nämlich die 3 . 6 Kanten der Tetraeder $T_1 \ldots T_3$ schneiden die Fläche $F_1^{(1)}$ in den 2 . 18 = 36 Punkten $\mathfrak{b}_0'$, welche früher (vgl. § 1 und § 2 unter (10a) und § 3 unter (12a)) durch $\mathfrak{e}_{25} \ldots \mathfrak{e}_{60}$ bezeichnet wurden, und deren Coordinaten sich aus

$$1 \quad i \quad 0 \quad 0 \quad \text{und} \quad 1 \quad 1 \quad i \quad i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\text{a})$$

in bekannter Weise ergeben.

Diese 36 Punkte $\mathfrak{b}_0'$ (Ebenen β'_0) liegen zu je 6 auf (gehen zu je 6 durch) den (die) 2 . 6 Geraden b'_0, welche früher durch die imaginären Geraden e bezeichnet wurden, und deren Coordinaten aus

$$\left.\begin{array}{l} 1 \quad 0 \quad i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{und} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad i \quad 0 \quad 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21\text{a})$$

folgen.

IIIb) Die zweite Gruppe umfasst die 3 . 192 = 576 Punkte $\mathfrak{b}_0''$ (Ebenen β''_0), welche Schnittpunkte der (Berührungsebenen durch die) 3 . 96 Geraden B und B' (vgl. § 41 5) unter (8a₂)) mit $F_1^{(1)}$ sind, die zu je 6 den 3 . 16 Polartetraedern $T_4 \,..\, T_1$, $T_{20} \,..\, T_{35}$, $T_{36} \,..\, T_{51}$ als Kanten angehören (vgl. § 41 unter 2)), während sie je einen Eckpunkt (eine Ebene) der drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 enthalten.

IIIb₁) Zwei Punktpaare der ersten Abtheilung (entsprechend $T_4 \,..\, T_{19}$) von 192 Punkten $\mathfrak{b}''_0$ haben z. B. die Coordinaten:

$$\pm i \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \;\ldots\; 0 \quad -\operatorname{cotg}\varphi\,(1\pm 2i) \quad -\operatorname{cotg}{}^2\varphi \pm 2i\sqrt{5};\;.\;.\qquad (20\mathrm{b}_1)$$

hier sind links den 12 positiven Permutationen die 8, rechts den 2 . 12 positiven Permutationen die 4 Zeichencombinationen zuzusetzen.

IIIb₂) und IIIb₃) entsprechend $T_{20} \,..\, T_{35}$ und $T_{36} \,..\, T_{51}$. Zwei Punktpaare der beiden Abtheilungen haben die Coordinaten:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{tg}{}^2\varphi \mp i\operatorname{cotg}\varphi) \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{tg}\varphi \pm i) \quad \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \;\ldots\; \operatorname{cotg}\varphi\,(-1\pm i) \quad -(\operatorname{cotg}{}^2\varphi \pm i) \quad \pm i\operatorname{cotg}{}^2\varphi \quad 1 \;\ldots\qquad (20\mathrm{b}_2)$$

und

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{tg}{}^2\varphi \mp i\operatorname{cotg}\varphi) \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{tg}\varphi \pm i) \quad \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \;\ldots\; -\operatorname{cotg}\varphi\,(-1\pm i) \quad -(\operatorname{cotg}{}^2\varphi \pm i) \quad \pm i\operatorname{cotg}{}^2\varphi \quad 1 \;\ldots\qquad (20\mathrm{b}_3)$$

Aus diesen ergeben sich durch die positiven Permutationen mit Hinzufügung der Zeichencombinationen die Coordinaten der 2 . 192 Punkte $\mathfrak{b}''_0$ dieser beiden Abtheilungen. Analoges gilt für die Ebenen β''_0.

Die 576 Punkte $\mathfrak{b}''_0$ liegen zu je 24 auf 2 . 24 = 48 Geraden b''_0, welche sich zu je zweien in einem solchen Punkte schneiden. Die x_i-Coordinaten für die 24 Geraden des ersten und zweiten Systems folgen aus:

$$\left.\begin{array}{l}
1\pm i\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \mp i \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \ldots 0 \quad 1\pm i\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \pm i \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \pm i\operatorname{cotg}\varphi \\
\qquad\text{oder} \\
\dfrac{1}{\sin{}^2\varphi} \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \mp 2i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad -(1\pm 2i) \quad 0 \ldots 0 \quad \dfrac{1}{\sin{}^2\varphi} \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \mp 2i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad -(1\pm 2i) \\
\qquad\text{oder} \\
-1\pm 2i \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \pm 2i\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \dfrac{1}{\cos{}^2\varphi} \quad 0 \ldots 0 \quad -1\pm 2i \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \pm 2i\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \dfrac{1}{\cos{}^2\varphi}\,.
\end{array}\right\}\;(21\mathrm{b})$$

IIIc) Die dritte Gruppe endlich enthält die 2 . 144 = 288 Punkte $\mathfrak{b}'''_0$ (Ebenen β'''_0), welche Schnittpunkte der (Berührungsebenen durch die) 144 Geraden B und B' (vgl. § 41 5) unter (8a₃)) mit $F_1^{(1)}$ sind.

Auch hier sind drei Abtheilungen von je 96 Punkten $\mathfrak{b}'''_0$ (Ebenen β'''_0) zu unterscheiden, je nachdem die Geraden B, B', welche keinen Eckpunkt

(keine Ebene) der drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 enthalten, den Polartetraedern $T_{52} \,..\, T_{59}$, $T_{60} \,..\, T_{67}$ und $T_{68} \,..\, T_{75}$ als Kanten angehören.

III$\mathfrak{c}_1$) Zwei Punktpaare der ersten Abtheilung (entsprechend $T_{52} \,..\, T_{59}$) haben die Coordinaten:

$$\pm i(1 \pm i \operatorname{tg}\varphi)\sin^2\varphi \mid (1 \pm i \operatorname{tg}\varphi)\sin^2\varphi \mid \pm i \mid 1 \;..\; \mp i \mid 1 \mid (1 \pm i \operatorname{tg}\varphi)\sin^2\varphi \mid \mp i(1 \pm i \operatorname{tg}\varphi)\sin^2\varphi \mid \;.. \quad (20\mathfrak{c}_1)$$

III$\mathfrak{c}_2$) Zwei Punktpaare der zweiten Abtheilung (entsprechend $T_{60} \,..\, T_{67}$) haben die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} (1 \pm i \operatorname{cotg}\varphi)\cos^2\varphi \mid \mp i(1 \pm i \operatorname{cotg}\varphi)\cos^2\varphi \mid \pm i \mid 1. \;... \\ -1 \mid \pm i \mid \mp i(1 \mp i \operatorname{cotg}\varphi)\cos^2\varphi \mid 1 \mp i \operatorname{cotg}\varphi)\cos^2\varphi \end{array}\right\} \;.\;.\;. \quad (20\mathfrak{c}_2)$$

III$\mathfrak{c}_3$) Zwei Punktpaare der dritten Abtheilung (entsprechend $T_{68} \,..\, T_{75}$) haben die Coordinaten:

$$1 \mid \pm i \mid \pm i(\operatorname{cotg}\varphi \pm i \operatorname{tg}\varphi) \mid \operatorname{cotg}\varphi \pm i \operatorname{tg}\varphi \mid \;...\; -(\operatorname{cotg}\varphi \pm i \operatorname{tg}\varphi) \mid \pm i(\operatorname{cotg}\varphi \mp i \operatorname{tg}\varphi) \mid \pm i \mid 1 \;...\; (20\mathfrak{c}_3)$$

Die 288 Punkte $\mathfrak{b}'''_0$ sind die Schnittpunkte je einer der 2 . 6 Geraden b'_0 (vgl. (21a)) mit je einer der 2 . 24 Geraden b''_0 (vgl. (21b)); jede der sechs Geraden b'_0 des ersten und des zweiten Systems wird von jeder der 24 Geraden b''_0 des zweiten und ersten Systems in 24, jede der Geraden b''_0 von je einer Geraden b'_0 in 6 Punkten $\mathfrak{b}'''_0$ geschnitten.

Auf jeder der 2 . 6 Geraden b'_0 treten also 6 Punkte $\mathfrak{b}'_0$ und 24 Punkte $\mathfrak{b}'''_0$, auf jeder der 2 . 24 Geraden b''_0 24 Punkte $\mathfrak{b}''_0$ und 6 Punkte $\mathfrak{b}'''_0$ auf. Analoges gilt für die Ebenen β'_0, β''_0, β'''_0.

Die 30 auf jeder Geraden b_0 auftretenden 6 Punkte $\mathfrak{b}_0$ (sich in ihr schneidenden Ebenen β_0) sind Dodeka-Ikosaeder-Punkte (Triakontaederebenen), während die unter V zu betrachtenden Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})}$ (Ebenen $\beta_0^{(\chi)} = \chi_0^{(\gamma)}$) einer Geraden b_0 mit den 12 Geraden g_0 des anderen Systems die zugehörigen Ikosaeder-Punkte (Pentagondodekaeder-Ebenen), die unter VI zu betrachtenden Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})}$ (Ebenen $\beta_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\beta)}$) die zugehörigen Pentagondodekaeder-Punkte (Ikosaeder-Ebenen) repräsentiren.

IV. Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$ (Ebenen $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$) und reelle Verbindungsgerade $g_0^{(\mathfrak{c})} = c_0^{(\mathfrak{g})}$.

Die 480 Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$ sind (vgl. (11c) und (11d)) die Schnittpunkte je einer Geraden g_0 mit einer Geraden c_0 des anderen Systems. Der ana-

lytische Nachweis dafür, dass die 20 auf einer Geraden g_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{g}_0^{(c)}$ Pentagondodekaeder-Punkte sind, lässt sich einfach dadurch führen, dass man die Coordinatenwerthe derselben linear aus denjenigen zweier als Grundpunkte gewählten Ikosaederpunkte $\mathfrak{g}_0$ zusammensetzt, wobei die Parameter die Wurzeln der Gleichung[1]) sind:

$$(\zeta_1{}^5+\zeta_2{}^5 \operatorname{tg}^5 \tfrac{1}{2}\chi)\,(\zeta_1{}^5-\zeta_2{}^5 \operatorname{cotg}^5 \tfrac{1}{2}\chi)\,(\zeta_1{}^5+\zeta_2{}^5 \operatorname{tg}^5 [\psi+\tfrac{1}{2}\chi])\,(\zeta_1{}^5-\zeta_2{}^5 [\psi+\tfrac{1}{2}\chi]) = 0 \ldots \quad (22a)$$

Entsprechend lässt sich zeigen, dass die 12 auf einer Geraden c_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{c}_0^{(g)}$ Ikosaederpunkte für die 20 Pentagondodekaeder-Punkte $\mathfrak{c}_0$ sind. Der ersten Anordnung entsprechend hat man folgende 5 Gruppen von je 96 Punkten:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin \tfrac{1}{2}\chi \mid i \sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi) \mid i\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi) \mid \cos\tfrac{1}{2}\chi \mid \\
\varepsilon \sin \tfrac{1}{2}\chi \mid i \sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)+\varepsilon^3 \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid i\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)-\varepsilon^3 \operatorname{tg}\varphi \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid \cos\tfrac{1}{2}\chi \mid \\
\varepsilon^2 \sin \tfrac{1}{2}\chi \mid i \sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)-\varepsilon \operatorname{cotg}\varphi \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid i\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)+\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid \cos\tfrac{1}{2}\chi \mid \\
\varepsilon^3 \sin \tfrac{1}{2}\chi \mid i \sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)+\varepsilon^4 \operatorname{cotg}\varphi \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid i\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)-\varepsilon^4 \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid \cos\tfrac{1}{2}\chi \mid \\
\varepsilon^4 \sin \tfrac{1}{2}\chi \mid i \sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)-\varepsilon^2 \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid i\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\chi)+\varepsilon^2 \operatorname{tg}\varphi \sin\tfrac{1}{2}\chi \mid \cos\tfrac{1}{2}\chi \mid .
\end{array}\right\} \quad (22b)$$

Andererseits gruppiren sich die 480 Punkte $\mathfrak{g}_0^{(c)} = \mathfrak{c}_0^{(g)}$ einmal als die

2 . 12 . 8 = 192 Schnittpunkte der Geraden g_0 mit den 2 . 8 Geraden c'_0,
andererseits als die
2 . 12 . 12 = 288 Schnittpunkte der Geraden g_0 mit den 2 . 12 Geraden c_0
(vgl. (19a) und (19b)). (22c)

Je zwei conjugirte Punkte $\mathfrak{g}_0^{(c)} = \mathfrak{c}_0^{(g)}$ bestimmen eine reelle Verbindungsgerade $g_0^{(c)} = c_0^{(g)}$; der letzten Anordnung entsprechend erhält man folgende beide Gruppen von 96 und 144 solcher Geraden, deren x_i-Coordinaten die einfachen Werthe haben:

a) 96 Gerade $g_0^{(c)} = c_0^{(g)}$. . . $\cos\varphi \quad \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \sin\varphi \quad \frac{i}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{i}{\sqrt{3}}$ (22d)

b) 144 „ „ „ . . . $\cos\varphi \quad i\sin\psi \quad \sin\varphi \quad i\cos\psi \quad 0 \quad 0$ (22e)

Die Coordinaten der sämmtlichen 96 + 144 = 240 reellen Geraden $g_0^{(c)} = c_0^{(g)}$ ergeben sich auf die früher erläuterte Weise (vergl. § 41 5) am Anfang).

Je vier der Punkte $\mathfrak{g}_0^{(c)} = \mathfrak{c}_0^{(g)}$ (der Ebenen $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$, für welche den obigen analoge Beziehungen stattfinden) werden als Eckpunkte (Seitenflächen)

[1]) Vgl. E. Hess: Kugeltheilung. Seite 409 Formel (56ε). — Es ist

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \varphi - \psi \text{ und } \operatorname{tg}\chi = 2\operatorname{tg}^2\varphi,\ \sin\chi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\varphi \text{ u. s. w.}$$

bestimmter Haupttetraeder von 15-zähligen Collineationen im Folgenden auftreten; die 3 Kantenpaare eines solchen Tetraeders sind ein reelles Geradenpaar $g^{(c)} = c^{(g)}$ und zwei imaginäre Geradenpaare g_0 und c_0.

V. Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ (Ebenen $\chi_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\chi)}$) und reelle Verbindungsgerade $g^{(b)} = b^{(g)}$.

Die 720 Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ (vgl. (11c) und (11d)) sind die Schnittpunkte je einer Geraden g_0 mit einer Geraden b_0 des anderen Systems. Dass die 30 auf einer Geraden g_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})}$ Dodeka-Ikosaeder-Punkte sind, folgt aus der linearen Zusammensetzung der Coordinatenwerthe derselben aus denjenigen zweier als Grundpunkte gewählten Ikosaederpunkte $\mathfrak{g}_0$, wobei die Parameter den Wurzeln der Gleichung:[1])

$$\left.\begin{aligned}&\left(\zeta_1{}^5 - \zeta_2{}^5 \operatorname{tg}^5 \tfrac{1}{2}\varphi\right)\left(\zeta_1{}^5 + \zeta_2{}^5 \operatorname{cotg}^5 \tfrac{1}{2}\varphi\right)\left(\zeta_1{}^5 + \zeta_2{}^5 \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right]\right)\\ &\quad\times\left(\zeta_1{}^5 - \zeta_2{}^5 \operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right]\right)\left(\zeta_1{}^{10} + \zeta_2{}^{10}\right) = 0\end{aligned}\right\} \quad (23b)$$

entsprechen. Die 12 auf einer Geraden b_0 auftretenden Punkte sind Ikosaeder-Punkte, denen die 30 Punkte $\mathfrak{b}_0$ als Dodeka-Ikosaeder-Punkte zugeordnet sind.

Aus den der ersten Anordnung entsprechenden Gruppen von Punkten mögen die folgenden aufgeführt werden:

$$\left.\begin{array}{l} i \sin \tfrac{1}{2}\varphi \mid \sin \tfrac{1}{2}\varphi \mid \cos \tfrac{1}{2}\varphi \mid i \cos \tfrac{1}{2}\varphi \mid \\ i\,\varepsilon \sin \tfrac{1}{2}\varphi \mid \sin\varphi \cos \tfrac{1}{2}\varphi - \varepsilon \cos\varphi \sin \tfrac{1}{2}\varphi \mid \cos\varphi \cos \tfrac{1}{2}\varphi + \varepsilon \sin\varphi \sin \tfrac{1}{2}\varphi \mid i \cos \tfrac{1}{2}\varphi \mid \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \mp 1 \mid \sin\varphi \mp i \cos\varphi \mid -i\,(\sin\varphi \pm i \cos\varphi) \mid i \mid \\ \mp\varepsilon \mid \sin\varphi \mp i\,\varepsilon \cos\varphi \mid \cos\varphi \pm i\,\varepsilon \sin\varphi \mid i \mid \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad (23b)$$

Andererseits gruppiren sich die 720 Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ einmal als die

$$\left.\begin{array}{l} 2 . 12 . 6 = 144 \text{ Schnittpunkte der Geraden } g_0 \text{ mit den } 2 . 6 \text{ Geraden } b'_0, \\ \qquad \text{andererseits als die} \\ 2 . 12 . 24 = 576 \text{ Schnittpunkte der Geraden } g_0 \text{ mit den } 2 . 24 \text{ Geraden } b''_0 \\ \qquad \text{(vgl. (21a) und (21b)).} \end{array}\right| \quad (22c)$$

Je zwei conjugirte Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ bestimmen eine reelle Verbindungsgerade $g^{(b)} = b^{(g)}$; die x_i-Coordinaten der der letzteren Anord-

[1]) Vgl. E. Hess: Kugeltheilung. S. 410 Formel (56ϑ).

nung entsprechenden beiden Gruppen von 72 und 288 solcher Geraden, sind die folgenden:

a) 72 Gerade $g^{(b)} = b^{(g)}$. . . $\cos\varphi \quad i \quad \sin\varphi \quad 0 \quad 0 \quad 0$ (23d)

b) 288 „ $g^{(b)} = b^{(g)}$. . . $\cos\varphi \quad \frac{i}{2} \quad \sin\varphi \quad \frac{i}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \frac{i}{2}\operatorname{tg}\varphi$, ... (23e)

aus welchen sich auf die bekannte Weise die Coordinaten der sämmtlichen $72+288=360$ reellen Geraden $g^{(b)} = b^{(g)}$ ergeben.

Je vier der Punkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ (der Ebenen $\chi_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\chi)}$, für welche wiederum analoge Beziehungen gelten) treten als Eckpunkte (Seitenflächen) bestimmter Haupttetraeder von 10-zähligen Collineationen im Folgenden auf; die 3 Kantenpaare eines solchen Tetraeders sind ein reelles Geradenpaar $g^{(b)} = b^{(g)}$ und zwei imaginäre Geradenpaare g_0 und b_0.

VI. Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ (Ebenen $\gamma_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\gamma)}$) und reelle Verbindungsgerade $c^{(b)} = b^{(c)}$.

Die 1200 Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ (vgl. (11c) und (11d)) sind die Schnittpunkte je einer Geraden c_0 mit einer Geraden b_0 des anderen Systems. Die 30 auf einer Geraden c_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})}$ sind Dodeka-Ikosaederpunkte für die 12 Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$ (vgl. unter IV.) als Ikosaeder- und die 20 Punkte $\mathfrak{c}_0$ als Dodekaeder-Punkte, die 20 auf einer Geraden b_0 auftretenden Punkte $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ Pentagondodekaeder-Punkte für die 12 Punkte $\mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ (vgl. unter V.) als Ikosaeder-Punkte, während die 30 Punkte $\mathfrak{b}_0$ Dodeka-Ikosaeder-Punkte sind. Der analytische Nachweis für diese Thatsache kann analog wie unter IV. und V. geführt werden; es möge genügen für einige Gruppen von Punkten $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ die Coordinaten aufzuführen:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \quad i \quad j c_2 \quad \frac{1}{j} c_2 \quad \text{(vgl. § 3 unter (12}\delta\text{))}^{1)} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi \quad i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi \quad 1 \quad i \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}+i\sqrt{3})\,\alpha \quad \frac{1}{2}(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\,\alpha + i\operatorname{cotg}\varphi \quad \alpha^2 + i\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{3}+1 \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad (24a)$$

Andererseits zerfallen die 1200 Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ als Schnittpunkte der 2.8 Geraden c'_0 und der 2 . 12 Geraden c''_0 mit den 2.6 Geraden b'_0

[1]) Es treten hier $2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$ der früher durch $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(k)}$ bezeichneten Punkte auf.

und den 2 . 24 Geraden b''_0 (vgl. 19a) b) und 21a) b)) in folgende 4 Gruppen:

a) 2 . 8 . 6 = 96 Schnittpunkte der Geraden c'_0 mit den Geraden b'_0 . . . (24β)
(vgl. § 3 unter (12δ))

b) 2 . 8 . 24 = 384 Schnittpunkte der Geraden c'_0 mit den Geraden b''_0 . . (24c)

c) 2 . 12 . 6 = 144 „ „ „ c''_0 „ „ „ b'_0 . . (24d)

d) 2 . 12 . 24 = 576 „ „ „ c''_0 „ „ „ b''_0 . . (24e)

Je zwei conjugirte Punkte bestimmen eine reelle Verbindungsgerade $c^{(b)} = b^{(c)}$; die x_i-Coordinaten der entsprechenden vier Gruppen von Geraden sind die folgenden:

a) 48 Gerade $c^{(b)} = b^{(c)}$. . .	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	i	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	. . . (24f)
b) 192 „ „ „ . . .	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{i}{2}\operatorname{cotg}\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{i}{2}\operatorname{tg}\varphi$	. . . (24g)
c) 72 „ „ „ . . .	$\sin\psi$	i	$\cos\psi$	0	0	0	. . . (24h)
d) 288 „ „ „ . . .	$\sin\psi$	$\frac{i}{2}$	$\cos\psi$	$\frac{i}{2}\operatorname{cotg}\varphi$	0	$\frac{i}{2}\operatorname{tg}\varphi$	. . . (24i),

aus welchen sich auf die bekannte Weise die Coordinaten der sämmtlichen 600 Geraden $c^{(b)} = b^{(c)}$ ergeben, von welchen die ersten 48 unter a) aufgeführten mit den früher erhaltenen 48 reellen Geraden h identisch sind (vgl. § 4 unter 1)).

Je vier der Punkte $\mathfrak{c}^{(b)} = \mathfrak{b}^{(c)}$ (der Ebenen $\chi^{(\beta)} = \beta^{(\chi)}$, für welche ganz analoge Beziehungen gelten) werden als Eckpunkte (Seitenflächen) bestimmter Haupttetraeder von 6-zähligen Collineationen im Folgenden auftreten; die 3 Kantenpaare eines solchen Tetraeders sind ein reelles Geradenpaar $c^{(b)} = b^{(c)}$ und zwei imaginäre Geradenpaare c_0 und b_0.

§ 43.

Fernere in Betracht kommende Verbindungsgerade von Punkten (Schnittlinien von Ebenen), Schnittpunkte und Verbindungsebenen.

1) Von jedem der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ geht an die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ ein Tangentenkegel, welcher die Fläche in einem Kegelschnitt berührt, dessen Ebene die Polarebene B zu der Spitze $\mathfrak{B}$ ist. Unter den Kanten dieses Kegels sind

12 Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{g}_0|$, welche die Fläche in einem Punkte $\mathfrak{g}_0$ berühren,
Gesammtzahl $60 . 12 = 720$,
20 Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0|$, welche die Fläche in einem Punkte $\mathfrak{c}_0$ berühren,
Gesammtzahl $60 . 20 = 1200$,
30 Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0|$, welche die Fläche in einem Punkte $\mathfrak{b}_0$ berühren,
Gesammtzahl $60 . 30 = 1800$.

Die 60 Kegelschnitte, welche durch die 60 Ebenen B auf $F_1^{(1)}$ entstehen, enthalten also je 12 Punkte $\mathfrak{g}_0$, je 20 Punkte $\mathfrak{c}_0$, je 30 Punkte $\mathfrak{b}_0$ (die Berührungspunkte der 12 Ebenen χ_0, der 20 Ebenen γ_0, der 30 Ebenen β_0, welche durch je eine Spitze $\mathfrak{B}$ des Kegels gehen), so dass durch jeden der 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ fünf, durch jeden der 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ drei, durch jeden der 900 Punkte $\mathfrak{b}_0$ zwei der 60 Kegelschnitte hindurchgehen (jede der 144 Ebenen χ_0 fünf, jede der 400 Ebenen γ_0 drei, jede der 900 Ebenen β zwei Punkte $\mathfrak{B}$ enthält).

Die 5 durch einen Punkt $\mathfrak{g}_0$ gehenden Ebenen B schneiden sich in einer Geraden G, welche $F_1^{(1)}$ in dem conjugirten Punkte $\mathfrak{g}'_0$ trifft,
die 3 durch einen Punkt $\mathfrak{c}_0$ gehenden Ebenen B schneiden sich in einer Geraden C, welche $F_1^{(1)}$ in dem conjugirten Punkte $\mathfrak{c}'_0$ trifft,
die 2 durch einen Punkt $\mathfrak{b}_0$ gehenden Ebenen B schneiden sich in einer Geraden B, welche $F_1^{(1)}$ in dem conjugirten Punkte $\mathfrak{b}'_0$ trifft;
analog liegen:
die 5 einer Ebene χ_0 angehörigen Punkte $\mathfrak{B}$ bez. auf der reciproken Polaren G', durch welche die conjugirte Berührungsebene χ'_0 an $F_1^{(1)}$ geht,
die 3 einer Ebene γ_0 angehörigen Punkte $\mathfrak{B}$ bez. auf der reciproken Polaren C', durch welche die conjugirte Berührungsebene γ'_0 an $F_1^{(1)}$ geht,
die 2 einer Ebene β_0 angehörigen Punkte $\mathfrak{B}$ bez. auf der reciproken Polaren B', durch welche die conjugirte Berührungsebene β'_0 an $F_1^{(1)}$ geht.
(Vgl. § 41 unter 3)).

1a) Jede Gerade G enthält ausser 5 Punkten $\mathfrak{B}$ noch 5 Punkte $\mathfrak{J}$ (vgl. § 41 unter 3)), welche die Schnittpunkte dieser Geraden mit den 5 durch die reciproke Polare G' hindurchgehenden Ebenen B (den Polarebenen zu den 5 Punkten $\mathfrak{B}$ von G) sind; analog gehen durch die Gerade G' 5 Ebenen I (die Polarebenen zu den 5 Punkten $\mathfrak{J}$) hindurch, welche G in den 5 Punkten $\mathfrak{B}$ schneiden. Entsprechendes gilt natürlich für die 5 durch G

gehenden Ebenen B', welche G' in 5 Punkten $\mathfrak{J}'$ und die 5 durch G gehenden Ebenen I', welche G' in 5 Punkten $\mathfrak{B}'$ (den Polen zu B') schneiden.

Daraus folgt, dass durch jeden der 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$, einmal

5 Gerade $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0| = |I\chi_0|$ und zweitens 5 Gerade $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0| = |B\,\chi_0|$

hindurchgehen (in der zugehörigen Ebene χ_0 liegen). Es gibt somit

720 Gerade $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0| = |I\chi_0|$
und 720 „ $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0| = |B\,\chi_0|$.

1b) Jede Gerade C (vgl. § 41 unter 3)) enthält ausser 3 Punkten $\mathfrak{B}$ noch 3 Punkte $\mathfrak{K}$, welche die Schnittpunkte von C mit den 3 durch die reciproke Polare C' hindurchgehenden Ebenen B (den Polarebenen der drei Punkte $\mathfrak{B}$) sind; analog gehen durch C' 3 Ebenen K (die Polarebenen der Punkte $\mathfrak{K}$), welche G in den drei Punkten $\mathfrak{B}$ schneiden. Entsprechendes gilt für die 3 durch C gehenden Ebenen B', welche C' in drei Punkten $\mathfrak{K}'$ und für die drei durch C gehenden Ebenen K', welche C' in drei Punkten $\mathfrak{B}'$ (den Polen zu B') schneiden.

Durch jeden der 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ gehen hiernach einmal

3 Gerade $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0| = |K\gamma_0|$ und zweitens 3 Gerade $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B\,\gamma_0|$

hindurch, welche in der zugehörigen Ebene γ_0 liegen. Es giebt also

1200 Gerade $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0| = |K\gamma_0|$
und 1200 „ $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B\,\gamma_0|$.

1c) Jede Gerade B (vgl. § 41 unter 3)) enthält 2 Punkte $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$, die Schnittpunkte von B mit den durch B' gehenden Ebenen B_k und B_i (den bez. Polarebenen zu $\mathfrak{B}_k$ und $\mathfrak{B}_i$); ausserdem zwei Punkte $\mathfrak{D}_i$ und $\mathfrak{D}_k$ (in harmonischer Lage zu $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$), die Schnittpunkte von B mit den durch B' gehenden Ebenen $\varDelta_k$ und $\varDelta_i$ (den Polarebenen zu $\mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{D}_i$). Die beiden durch B gehenden Ebenen B'_k, B'_i schneiden B' in zwei Punkten $\mathfrak{B}'_i$, $\mathfrak{B}'_k$ (den bez. Polen zu B'_i, B'_k) und die beiden durch B gehenden Ebenen $\varDelta'$ schneiden B' in den beiden Punkten $\mathfrak{D}'_i$, $\mathfrak{D}'_k$ (den bez. Polen zu $\varDelta'_i$, $\varDelta'_k$).

Es gehen also durch jeden der 900 Punkte $\mathfrak{b}_0$ einmal

$$2 \text{ Gerade } \begin{Bmatrix} |\mathfrak{B}_i\,\mathfrak{b}_0| = |B_k\,\beta_0| \\ |\mathfrak{B}_k\,\mathfrak{b}_0| = |B_i\,\beta_0| \end{Bmatrix} \text{ und zweitens 2 Gerade } \begin{Bmatrix} |\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{b}_0| = |\varDelta_k\,\beta_0| \\ |\mathfrak{D}_k\,\mathfrak{b}_0| = |\varDelta_i\,\beta_0| \end{Bmatrix}$$

hindurch, welche in der zugehörigen Ebene β_0 liegen. Man hat hiernach

1800 Gerade $|\mathfrak{B}_i\,\mathfrak{b}_0| = |B_k\,\beta_0|$
und 1800 „ $|\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{b}_0| = |\varDelta_k\,\beta_0|$.

2) Der analytische Nachweis für die unter 1) angegebenen Lagen-

beziehungen lässt sich mit Benutzung der in § 41 unter (1), (5), (6), (7) und in § 42 unter (14), (18), (20) gegebenen Coordinatenwerthe für die Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{b}_0$ (die Ebenen B, I, K, $\varDelta$ und χ_0, γ_0, β_0), ohne Schwierigkeit erbringen. Es möge genügen, die unter 1) charakterisirten Verbindungsgeraden (Schnittlinien) durch ihre x_i-Coordinaten für je ein Beispiel darzustellen.

2a) Die Gerade $G \ldots 1 \quad i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad -i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0$

enthält folgende 5 Punkte $\mathfrak{B}$ und 5 Punkte $\mathfrak{J}$ (durch die reciproke Polare

$$G' \ldots 1 \quad -i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0$$

gehen folgende 5 Ebenen B und 5 Ebenen I hindurch):

$$\left.\begin{array}{llllll}
\mathfrak{B}_4\ (B_4) \ldots 0 & 0 & 0 & 1 & \mathfrak{J}_1\ (I_1) \ldots 0 \quad \sin\varphi & \cos\varphi \qquad 0 \\
\mathfrak{B}_{15}\ (B_{15}) \ldots 0 & \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi & \mathfrak{J}_2\ (I_2) \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi\cos\varphi \quad \frac{1}{2\cos\varphi} \\
\mathfrak{B}_{23}\ (B_{23}) \ldots 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi & -\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi & \mathfrak{J}_3\ (I_3) \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi & \frac{1}{2}\sin\varphi \quad \frac{1}{2\sin\varphi} \\
\mathfrak{B}_{21}\ (B_{21}) \ldots 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi & \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi & \mathfrak{J}_4\ (I_4) \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi & \frac{1}{2}\sin\varphi \quad -\frac{1}{2\sin\varphi} \\
\mathfrak{B}_{13}\ (B_{13}) \ldots 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varphi & \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi & \mathfrak{J}_5\ (I_5) \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\varphi\cos\varphi \quad -\frac{2}{1\cos\varphi}
\end{array}\right\} \text{(25a)},$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}'_0$ der reciproken Polaren

$$G' \ldots 1 \quad -i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0$$

mit $F_1^{(1)}$ (bez. die Berührungsebenen χ'_0, χ_0 durch G in diesen Punkten) die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\mathfrak{g}_0\ (\chi'_0) \ldots\ldots & i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\
\mathfrak{g}'_0\ (\chi_0) \ldots\ldots & -i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(25b)}$$

Daraus ergeben sich die x_i-Coordinaten der 5 Geraden $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0\,| = |\,I\chi_0\,|$ und der 5 Geraden $|\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0\,| = |\,B\,\chi_0\,|$:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
|\,\mathfrak{B}_4\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,I_1\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & i\sin\varphi & \cos\varphi & i\cos\varphi & i & 1 \\
|\,\mathfrak{B}_{15}\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,I_2\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & i\,\varepsilon\sin\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon\cos\varphi & i & \varepsilon \\
|\,\mathfrak{B}_{23}\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,I_3\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & i\,\varepsilon^2\sin\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon^2\cos\varphi & i & \varepsilon^2 \\
|\,\mathfrak{B}_{21}\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,I_4\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & i\,\varepsilon^3\sin\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon^3\cos\varphi & i & \varepsilon^3 \\
|\,\mathfrak{B}_{13}\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,I_5\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & i\,\varepsilon^4\sin\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon^4\cos\varphi & i & \varepsilon^4
\end{array}\right\} \text{(26a)}$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}
|\,\mathfrak{J}_1\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,B_4\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & -i\sin\varphi & \cos\varphi & -i\cos\varphi & i & -1 \\
|\,\mathfrak{J}_2\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,B_{15}\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & -i\,\varepsilon\sin\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon\cos\varphi & i & -\varepsilon \\
|\,\mathfrak{J}_3\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,B_{23}\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & -i\,\varepsilon^2\sin\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon^2\cos\varphi & i & -\varepsilon^2 \\
|\,\mathfrak{J}_4\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,B_{21}\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & -i\,\varepsilon^3\sin\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon^3\cos\varphi & i & -\varepsilon^3 \\
|\,\mathfrak{J}_5\ \mathfrak{g}_0\,| = |\,B_{13}\ \chi'_0\,| \ldots & \sin\varphi & -i\,\varepsilon^4\sin\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon^4\cos\varphi & i & -\varepsilon^4
\end{array}\right\} \text{(26b)},$$

wo wiederum ε (vergl. (15)) eine fünfte Einheitswurzel bedeutet. Für die

Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}'_0| = |I\chi_0|$ und $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0| = |B\chi_0|$ ist in den Coordinatenwerthen das Vorzeichen von i das entgegengesetzte, wobei ε in ε^4 und ε^2 in ε^3 übergeht.

Die Coordinatenwerthe für die sämmtlichen 720 Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0|$ und die 720 Geraden $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0|$ resultiren, wenn die drei positiven Permutationen von $\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 1$ mit den drei Vertauschungen je zweier Elemente des zweiten und des dritten Paares und diese 9 Anordnungen mit den $2^5 = 32$ Vorzeichencombinationen verbunden werden. Die vierte Vertauschung der Elemente des zweiten und des dritten Paares würde reelle Gerade

$$(\text{z. B. } \sin\varphi \quad i\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad i\cos\varphi \quad 1 \quad i)$$

ergeben; diese sind hier auszuschliessen, da die 1440 Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0|$ und $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0|$ sämmtlich imaginär von der ersten Art sind.

2b) α) Die Gerade $C \ldots 1 \; -i \; 1 \; -i \; 1 \; -i$ (oben unter I durch k' bezeichnet) enthält die folgenden 3 Punkte $\mathfrak{B}$ und 3 Punkte $\mathfrak{K}$ (vgl. Formel (6) in § 41; die Punkte $\mathfrak{K}$ sind die oben § 3 unter (12ϑ) durch $\mathfrak{d}$ bezeichneten Punkte), und durch die reciproke Polare $C' \ldots 1 \; i \; 1 \; i \; 1 \; i$ gehen die folgenden 3 Ebenen B und 3 Ebenen K (früher durch δ bezeichnet) hindurch:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\mathfrak{B}_1\ (B_1) \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{K}_1\ (K_1) \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\mathfrak{B}_9\ (B_9) \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathfrak{K}_2\ (K_2) \ldots & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
\mathfrak{B}_5\ (B_5) \ldots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathfrak{K}_3\ (K_3) \ldots & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{array}\right\} \quad (27\text{a}),$$

während die früher durch $\mathfrak{k}_0$ ($\varkappa_0$) bezeichneten Schnittpunkte $\mathfrak{c}_0$ der reciproken Polaren C' (Berührungsebenen γ_0 durch C) mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\mathfrak{c}_0\ (\gamma'_0) \ldots & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\
\mathfrak{c}'_0\ (\gamma_0) \ldots & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha\,.
\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27\text{b})$$

Daraus folgen die x_i-Coordinaten der 3 Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0| = |K\gamma_0|$ und der 3 Geraden $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B\,\gamma'_0|$, welche früher (§ 4 unter 4) Formel (13b′) (13b″)) durch p, p' bezeichnet wurden,

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{c}_0| = |K_1\,\gamma'_0| \ldots & 1 & -i & \alpha & -i\alpha & \alpha^2 & -i\alpha^2 \\
|\mathfrak{B}_9\,\mathfrak{c}_0| = |K_2\,\gamma'_0| \ldots & 1 & -i\alpha & \alpha & -i\alpha^2 & \alpha^2 & -i \\
|\mathfrak{B}_5\,\mathfrak{c}_0| = |K_3\,\gamma'_0| \ldots & 1 & -i\alpha^2 & \alpha & -i & \alpha^2 & -i\alpha
\end{array}\right\} \ldots (28\text{a})$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{c}_0| = |B_1\,\gamma'_0| \ldots & 1 & i & \alpha & i\alpha & \alpha^2 & i\alpha^2 \\
|\mathfrak{K}_2\,\mathfrak{c}_0| = |B_9\,\gamma'_0| \ldots & 1 & i\alpha & \alpha & i\alpha^2 & \alpha^2 & i \\
|\mathfrak{K}_3\,\mathfrak{c}_0| = |B_5\,\gamma'_0| \ldots & 1 & i\alpha^2 & \alpha & i & \alpha^2 & i\alpha
\end{array}\right\} \ldots . (28\text{b})$$

Jede der 16 Geraden k' liefert durch Verbindung der 6 ihr angehörigen Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ mit den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}'_0$ der reci-

proken Polaren k 12 derartige Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0|$ und $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0|$; die Coordinatenwerthe für die 192 Geraden resultiren durch Permutation der beiden Tripelwerthe $1\ \alpha\ \alpha^2$ und $i\ i\alpha\ i\alpha^2$ und Hinzufügung der $2^5 = 32$ Vorzeichen-Combinationen $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2^5 = 192\right)$.

2 b) β) Die Gerade $C' \ldots 1\ i\ 1\ i\ 1\ i$ (früher unter I durch k bezeichnet) enthält folgende Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ (durch $C \ldots 1\ {-i}\ 1\ {-i}\ 1\ {-i}$ gehen folgende Ebenen B und K):

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\mathfrak{B}_{15}\ (B_{15}) \ldots & 0 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \qquad \mathfrak{K}_1\ (K_1) \ldots & 0 & \frac{\operatorname{cotg}2\varphi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\operatorname{tg}2\varphi}{2\sqrt{3}} \\[2ex]
\mathfrak{B}'_{20}\ (B_{20}) \ldots & 0 & \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2} & \qquad \mathfrak{K}_2\ (K_2) \ldots & 0 & \frac{\operatorname{tg}2\varphi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\operatorname{cotg}2\varphi}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\[2ex]
\mathfrak{B}_{22}\ (B_{22}) \ldots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & \qquad \mathfrak{K}_3\ (K_3) \ldots & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{\operatorname{tg}2\varphi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\operatorname{cotg}2\varphi}{2\sqrt{3}}
\end{array}\right\} \quad (29\,\mathrm{a}),$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ (die Berührungsebenen γ'_0, γ_0 durch C') der reciproken Polaren C mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\mathfrak{c}_0\ (\gamma'_0) \ldots & i\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\
\mathfrak{c}'_0\ (\gamma_0) \ldots & -i\sqrt{3} & 1 & 1 & 1
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29\,\mathrm{b})$$

Die x_i-Coordinaten z. B. der Geraden $|\mathfrak{B}_{15}\,\mathfrak{c}_0| = |K_1\,\gamma'_0|$ lassen sich hieraus in folgender Form erhalten:

$$\sqrt{5}+i\sqrt{3} \quad i(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha \quad (\sqrt{5}+i\sqrt{3})\alpha^2 \quad i(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 \quad (\sqrt{5}+i\sqrt{3})\alpha \quad i(\sqrt{5}-i\sqrt{3}) \quad \ldots \quad (30\mathrm{a})$$

$$\text{oder} \quad i \qquad \alpha\, e^{2i\zeta} \qquad i\alpha^2 \qquad \alpha^2 e^{2i\zeta} \qquad i\alpha \qquad e^{2i\zeta} \quad \ldots \quad (30\mathrm{a}')$$

wobei

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}+i\sqrt{3} &= 2\,(\operatorname{cotg}\varphi + \alpha) \\
&= 2\,(\operatorname{tg}\varphi - \alpha^2) \\
\sqrt{5}-i\sqrt{3} &= 2\,(\operatorname{cotg}\varphi + \alpha^2) \\
&= 2\,(\operatorname{tg}\varphi - \alpha)
\end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \cos 2\zeta = -\frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg}\zeta = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \sin\zeta = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots \quad (30\mathrm{b})$$

ist.[1]) Jede der 16 Geraden k liefert 12 derartige Gerade $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0|$ und $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0|$; auch hier resultiren die Coordinatenwerthe für die 192 Geraden durch Permutation der beiden Tripelwerthe i, $i\alpha$, $i\alpha^2$ und $e^{2i\zeta}$, $\alpha e^{2i\zeta}$, $\alpha^2 e^{2i\zeta}$ und Hinzufügung der 2^5 Vorzeichencombinationen.

[1]) Der Winkel 2ζ ist Seite eines regulären sphärischen Dreiecks, dessen Winkel $= 2\eta \left(\cos 2\eta = -\frac{1}{3}\right)$ ist und wird bei den unten zu betrachtenden sphärischen Geweben des regelmässigen 120-Zells und 600-Zells, sowie auch des Fünfzells auftreten.

2b) γ) Jede der 72 Geraden C (vgl. § 41 b_2) z. B.

$$0 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi$$

enthält folgende Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ (durch $C' \ldots 0 \;\; 0 \;\; \operatorname{tg}\varphi \;\; -i\operatorname{tg}\varphi \;\; \operatorname{cotg}\varphi \;\; -i\operatorname{cotg}\varphi$ gehen folgende Ebenen B und K):

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\mathfrak{B}_2\;(B_2) \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathfrak{K}_1\;(K_1) \ldots & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi \\
\mathfrak{B}_{22}\;(B_{22}) \ldots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & \mathfrak{K}_2\;(K_2) \ldots & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi \\
\mathfrak{B}'_{23}\;(B_{23}) \ldots & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & \mathfrak{K}_3\;(K_3) \ldots & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi
\end{array}\right\} \text{(31a)},$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ von C' (die Berührungsebenen γ'_0, γ_0 durch C) mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben (vgl. § 42 unter IIb_1) Formel (18b_1)):

$$\left.\begin{array}{lllll}
\mathfrak{c}_0\;(\gamma'_0) \;\ldots & i & 0 & \sin\psi & \cos\psi \\
\mathfrak{c}_0'\;(\gamma_0) \;\ldots & -i & 0 & \sin\psi & \cos\psi
\end{array}\right\} \;\ldots\ldots\ldots \text{(31 b)}$$

Damit erhält man folgende x_i-Coordinaten der 3 Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0| = |K\gamma_0|$ und der 3 Geraden $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B\gamma'_0|$:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
|\mathfrak{B}_2\;\mathfrak{c}_0| = |K_1\;\gamma'_0| \ldots & 1 & -i & -i\cos\psi & \cos\psi & i\sin\psi & -\sin\psi \\
|\mathfrak{B}_{22}\;\mathfrak{c}_0| = |K_2\;\gamma'_0| \ldots & 1 & -i\alpha & -i\cos\psi & \alpha\cos\psi & i\sin\psi & -\alpha\sin\psi \\
|\mathfrak{B}'_{23}\;\mathfrak{c}_0| = |K_3\;\gamma'_0| \ldots & 1 & -i\alpha^2 & -i\cos\psi & \alpha^2\cos\psi & i\sin\psi & -\alpha^2\sin\psi
\end{array}\right\} \text{(32 a)}$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}
|\mathfrak{K}_1\;\mathfrak{c}_0| = |B_2\;\gamma'_0| \ldots & 1 & i & -i\cos\psi & -\cos\psi & i\sin\psi & \sin\psi \\
|\mathfrak{K}_2\;\mathfrak{c}_0| = |B_{22}\;\gamma'_0| \ldots & 1 & i\alpha & -i\cos\psi & -\alpha\cos\psi & i\sin\psi & \alpha\sin\psi \\
|\mathfrak{K}_3\;\mathfrak{c}_0| = |B_{23}\;\gamma'_0| \ldots & 1 & i\alpha^2 & -i\cos\psi & -\alpha^2\cos\psi & i\sin\psi & \alpha^2\sin\psi
\end{array}\right\} \text{(32b)}.$$

Jede der 72 Geraden C liefert 12 derartige Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0|$ und $|\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0|$; die Coordinatenwerthe dieser 864 Geraden resultiren durch Permutation der beiden mit 1, α, α^2 multiplicirten Tripelwerthe $1 \;\; \pm i\cos\psi \;\; \pm i\sin\psi$ und Hinzufügung der Vorzeichen-Combinationen.

2b) δ) Jede der 96 Geraden C (vgl. § 41 b_3) endlich, z. B.

$$1 \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 1 \quad 0$$

enthält folgende Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ (durch $C' \ldots 1 \;\; -i\operatorname{tg}\varphi \;\; 1 \;\; -i\operatorname{cotg}\varphi \;\; 1 \;\; 0$ gehen folgende Ebenen B und K hindurch):

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\mathfrak{B}_{14}\;(B_{14}) \ldots & 0 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \mathfrak{K}_1\;(K_1) \ldots & \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}^2\varphi & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi \\
\mathfrak{B}_{38}\;(B_{38}) \ldots & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \mathfrak{K}_2\;(K_2) \ldots & \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi \\
\mathfrak{B}_{54}\;(B_{54}) \ldots & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi & \frac{1}{2} & 0 & \mathfrak{K}_3\;(K_3) \ldots & \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}^2\varphi & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi
\end{array}\right\} \text{(33a)},$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ von C' (die Berührungsebenen γ'_0, γ_0 durch C) mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben (vgl. § 42 Formel (18c)):

$$\left.\begin{array}{llllll}\mathfrak{c}_0\ (\gamma'_0) \ldots & -\alpha \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{2} & -\alpha^2 \operatorname{tg}\varphi \\ \mathfrak{c}'_0\ (\gamma_0) \ldots & -\alpha^2 \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{2} & -\alpha \operatorname{tg}\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33\,\mathrm{b})$$

Die x_i-Coordinaten der 3 Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0| = |K\gamma_0|$ und der 3 Geraden $|\mathfrak{K}\mathfrak{c}_0| = |B\gamma_0|$ werden die folgenden:

$$\left.\begin{array}{llllllll}|\mathfrak{B}_{14}\mathfrak{c}_0| = |K_1\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & 2i\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & -2i\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\sqrt{3}\ ^{1)} \\ |\mathfrak{B}_{38}\mathfrak{c}_0| = |K_2\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & 2i\alpha^2\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & -2i\alpha^2\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\alpha^2\sqrt{3} \\ |\mathfrak{B}_{54}\mathfrak{c}_0| = |K_3\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & 2i\alpha\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & -2i\alpha\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\alpha\sqrt{3}\end{array}\right\}(33\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}|\mathfrak{K}_1\mathfrak{c}_0| = |B_{14}\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & -2i\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & 2i\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\sqrt{3} \\ |\mathfrak{K}_2\mathfrak{c}_0| = |B_{38}\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & -2i\alpha^2\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & 2i\alpha^2\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\alpha^2\sqrt{3} \\ |\mathfrak{K}_3\mathfrak{c}_0| = |B_{54}\gamma'_0| \,.\,. & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & -2i\alpha\operatorname{cotg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & 2i\alpha\operatorname{tg}\varphi & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\alpha\sqrt{3}\end{array}\right\}(33\mathrm{b}).$$

Jede der 96 Geraden C (vergl. § 41 b$_3$)) liefert 12 derartige Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0|$ und $|\mathfrak{K}\mathfrak{c}_0|$; die Coordinatenwerthe dieser 1152 Geraden resultiren wiederum durch Permutation der aus den Formeln (33a) und (33b) leicht erkennbaren Tripelwerthe unter Hinzufügung der Vorzeichen-Combinationen.

Damit sind in 2b) α) .. δ) die sämmtlichen $96+96+432+576 = 1200$ Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0|$ und ebenso die 1200 Geraden $|\mathfrak{K}\mathfrak{c}_0|$ analytisch bestimmt.

2c) α) Die Gerade $B \ldots 1\ -i\ 0\ 0\ 0\ 0$ (unter I durch e bezeichnet) enthält folgende beiden Punktpaare $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ (vgl. Formel (7) in § 41) und durch die reciproke Polare $B' \ldots 1\ i\ 0\ 0\ 0\ 0$ gehen folgende beiden Ebenenpaare B und $\varDelta$ hindurch:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_1\ (B_1) \ldots 1\quad 0\quad 0\quad 0;\quad \mathfrak{D}_1\ (\varDelta_1) \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\quad 0\quad 0 \\ \mathfrak{B}_2\ (B_2) \ldots 0\quad 1\quad 0\quad 0;\quad \mathfrak{D}_2\ (\varDelta_2) \ldots -\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\quad 0\quad 0\end{array}\right\}(34\,\mathrm{a}),$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0$ von B' (Berührungsebenen β_0 durch B) mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{b}_0\ (\beta'_0) \ldots 0\quad 0\quad 1\quad i \\ \mathfrak{b}'_0\ (\beta_0) \ldots 0\quad 0\quad 1\quad -i\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34\,\mathrm{b})$$

1) In diese Werthe lässt sich auch der Winkel ζ (vgl. Formel (30b)) einführen, so dass dieselben geschrieben werden können:

$(\operatorname{tg}\zeta - i)\quad 2i\cos\psi\quad (\operatorname{tg}\zeta - i)\alpha\quad -2i\sin\psi\quad (\operatorname{tg}\zeta - i)\alpha^2\quad -2$ u. s. f.

Die x_i-Coordinaten der beiden Geradenpaare

$$|\mathfrak{B}_i\ \mathfrak{b}_0| = |B_k\ \beta'_0| \text{ und } |\mathfrak{D}_i\ \mathfrak{b}_0| = |\Delta_k\ \beta'_0|,$$

und ebenso der bez. reciproken Polaren

$$|\mathfrak{B}_k\ \mathfrak{b}'_0| = |B_i\ \beta_0| \text{ und } |\mathfrak{D}_k\ \mathfrak{b}'_0| = |\Delta_i\ \beta_0|,$$

welche früher (§ 3 Formel (11)) durch d bezeichnet wurden, sind:

$$\left.\begin{aligned} &|\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{b}_0| = |B_2\ \beta'_0| \ldots 0\ 0\ 1\ {-i}\ i\ 1; \quad |\mathfrak{B}_2\ \mathfrak{b}'_0| = |B_1\ \beta_0| \ldots 0\ 0\ 1\ i\ {-i}\ 1 \\ &|\mathfrak{B}_2\ \mathfrak{b}_0| = |B_1\ \beta'_0| \ldots 0\ 0\ 1\ i\ i\ {-1}; \quad |\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{b}'_0| = |B_2\ \beta_0| \ldots 0\ 0\ 1\ {-i}\ {-i}\ {-1} \end{aligned}\right\} \quad (35\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} &|\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{b}_0| = |\Delta_2\ \beta'_0| \ldots 0\ 0\ 1\ {-1}\ i\ {-i}; \quad |\mathfrak{D}_2\ \mathfrak{b}'_0| = |\Delta_1\ \beta_0| \ldots 0\ 0\ 1\ {-1}\ {-i}\ i \\ &|\mathfrak{D}_2\ \mathfrak{b}_0| = |\Delta_1\ \beta'_0| \ldots 0\ 0\ 1\ 1\ i\ i; \quad |\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{b}'_0| = |\Delta_2\ \beta_0| \ldots 0\ 0\ 1\ 1\ {-i}\ {-i} \end{aligned}\right\}. \quad (35\text{b})$$

Jede der 18 reellen Geraden e, $e^{(1)}$ liefert durch Verbindung der ihr angehörigen Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ mit den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}'_0$ der reciproken Polaren 8 solcher Geraden $|\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}_0|$ und $|\mathfrak{D}\ \mathfrak{b}_0|$; durch Permutation der beiden Tripelwerthe $0\ 1\ i$ und Hinzufügung der Vorzeichencombinationen erhält man die Coordinatenwerthe für die 144 derartigen Geraden, da

$$8 \,.\, 18 = \frac{1}{2}(6 \,.\, 6)\, 2^3 \text{ ist.}$$

2c) β) Jede der 288 Geraden B (vgl. § 41 ($8a_2$)) z. B.:

$$\operatorname{cotg}\varphi \quad -i\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad -i$$

enthält folgende Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ (durch

$$B' \ldots \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad i$$

gehen folgende Ebenen B und Δ hindurch):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B}_1\,(B_1) \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad \mathfrak{D}_1\,(\Delta_1) \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &\mathfrak{B}_{17}\,(B_{17}) \ldots 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}; \quad \mathfrak{D}_2\,(\Delta_2) \ldots -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \ldots (36\text{a}),$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}'_0$ von B' (die Berührungsebenen β'_0, β_0 durch B) mit $F^{(1)}_1$ die Coordinaten haben (vgl. § 42 unter ($20b_1$)):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{b}_0\ (\beta'_0) \\ &\mathfrak{b}'_0\ (\beta_0) \end{aligned}\right\} \ldots 0 \quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{5} \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \quad \ldots \quad (36\text{b})$$

Daraus folgen die x_i-Coordinaten der beiden Geradenpaare $|\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}_0|$ und $|\mathfrak{D}\ \mathfrak{b}_0|$:

$$\left.\begin{aligned} &|\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{b}_0| = |B_{17}\ \beta'_0| \text{ und } |\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{b}'_0| = |B_{17}\ \beta_0| \ldots \\ &\quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad -i(-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{5} \quad -i\sqrt{5} \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \quad -i(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \\ &|\mathfrak{B}_{17}\ \mathfrak{b}_0| = |B_1\ \beta'_0| \text{ und } |\mathfrak{B}_{17}\ \mathfrak{b}'_0| = |B_1\ \beta_0| \ldots \\ &\quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad i(-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{5} \quad i\sqrt{5} \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \quad -i(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \end{aligned}\right\} \quad (37\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} &|\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{b}_0| = |\Delta_2\ \beta'_0| \text{ und } |\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{b}'_0| = |\Delta_2\ \beta_0| \ldots \\ &\quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \\ &\mathfrak{D}_2\ \mathfrak{b}_0| = |\Delta_1\ \beta'_0| \text{ und } |\mathfrak{D}_2\ \mathfrak{b}'_0| = |\Delta_1\ \beta_0| \ldots \\ &\quad (-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad -(-1 \pm 2i)\operatorname{tg}\varphi \quad \sqrt{5} \quad -\sqrt{5} \quad -(\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \quad (\operatorname{tg}^2\varphi \pm 2i) \end{aligned}\right\} \quad (37\text{b})$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Coordinaten der sämmtlichen $8 \,.\, 288 = 2304$ Geraden $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}_0\,|$ und $|\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0\,|$.

2c) γ) Jede der 144 Geraden B (vgl. § 41 (8a$_3$)) z. B.:

$$\operatorname{cotg}\varphi \quad 2i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

enthält folgende Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ (durch $B' \;.\;.\;.\; \operatorname{cotg}\varphi \quad -2i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 1 \quad 0$ gehen folgende Ebenen B und Δ hindurch):

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B}_{16}\ (B_{16}) \;.\;.\; 0 \quad -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\,; \qquad \mathfrak{D}_1\ (\Delta_1) \;.\;.\; \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \\ \mathfrak{B}_{31}\ (B_{31}) \;.\;.\; \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad -\frac{1}{2}\,; \qquad \mathfrak{D}_2\ (\Delta_2) \;.\;.\; \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} \quad -\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad (38a),$$

während die Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}'_0$ von B' (die Berührungsebenen β'_0, β_0 durch B) mit $F_1^{(1)}$ die Coordinaten haben (vgl. § 42 unter (20c$_1$)):

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{b}_0\ (\beta'_0) \\ \mathfrak{b}'_0\ (\beta_0) \end{array}\right\} \operatorname{cotg}\varphi\,(1 \mp i\operatorname{cotg}\varphi) \quad \operatorname{cotg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\varphi \pm i) \quad \pm i \quad 1 \;.\;.\; (38b)$$

Daraus ergeben sich folgende Coordinatenwerthe für die beiden Geradenpaare $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}_0\,|$ und $|\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0\,|$:

$$\left.\begin{array}{l} |\,\mathfrak{B}_{16}\,\mathfrak{b}_0\,| = |\,B_{31}\,\beta'_0\,| \text{ und } |\,\mathfrak{B}_{16}\,\mathfrak{b}'_0\,| = |\,B_{31}\,\beta_0\,| \;.\;.\;. \\ \qquad \operatorname{tg}\varphi \mp i \quad 0 \quad 1 \pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad 2i \quad -\operatorname{cotg}\varphi \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad \pm 2 \\ |\,\mathfrak{B}_{31}\,\mathfrak{b}_0\,| = |\,B_{16}\,\beta'_0\,| \text{ und } |\,\mathfrak{B}_{31}\,\mathfrak{b}'_0\,| = |\,B_{16}\,\beta_0\,| \;.\;.\;. \\ \qquad \operatorname{tg}\varphi \mp i \quad 0 \quad 1 \pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad -2i \quad -\operatorname{cotg}\varphi \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad \mp 2 \end{array}\right\} \quad (39\,\text{a})$$

$$\left.\begin{array}{l} |\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{b}_0\,| = |\,\Delta_2\,\beta'_0\,| \text{ und } |\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{b}'_0\,| = |\,\Delta_2\,\beta_0\,| \;.\;.\;. \\ \qquad \operatorname{tg}\varphi \mp i \quad 0 \quad 1 \pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad \pm 2 \quad -\operatorname{cotg}\varphi \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad -2i \\ |\,\mathfrak{D}_2\,\mathfrak{b}_0\,| = |\,\Delta_1\,\beta'_0\,| \text{ und } |\,\mathfrak{D}_2\,\mathfrak{b}'_0\,| = |\,\Delta_1\,\beta_0\,| \;.\;.\;. \\ \qquad \operatorname{tg}\varphi \mp i \quad 0 \quad 1 \pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad \mp 2 \quad -\operatorname{cotg}\varphi \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad 2i \end{array}\right\} \quad (39\,\text{b}).$$

Analog resultiren die Coordinaten der sämmtlichen $8 \,.\, 144 = 1152$ hierhergehörigen Geraden $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}_0\,|$ und $|\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0\,|$.

3) Endlich kommen noch auf jeder der 72 Geraden G weitere 10 Punkte $\mathfrak{L}$ (entsprechend weitere 10 hindurchgehende Ebenen Λ) und auf jeder der 200 Geraden C weitere 6 Punkte $\mathfrak{P}$ (Ebenen Π) in Betracht, welche als Eckpunkte (Seitenflächen) von Haupttetraedern für bestimmte Correlationen der in Untersuchung stehenden Configuration auftreten. Die Verbindungslinien dieser Punkte (Schnittlinien dieser Ebenen) mit den beiden Schnittpunkten (Berührungsebenen) der reciproken Polaren G', bezw. C' mit $F_1^{(1)}$ liefern weitere $2 \,.\, 10 \,.\, 72 = 1440$ Gerade $|\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{g}_0\,| = |\,\Lambda\,\chi'_0\,|$ und $2 \,.\, 6 \,.\, 200 = 2400$ Gerade $|\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi\,\gamma'_0\,|$. Für die 450 Geraden B dagegen kommen

aus einem nachher zu erwähnenden Grunde weitere denselben angehörige Punkte und Ebenen hier nicht in Betracht.

Die analytische Darstellung dieser Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{P}$ (Ebenen Λ, Π) und der zugehörigen Verbindungsgeraden (Schnittlinien) wird eine äusserst übersichtliche, wenn man, wie bereits analog unter I in § 4 unter 8) für die Geraden k und d geschehen ist, die Gesammtheit der reellen und imaginären Punkte der Geraden G und C als Punkte der Einheitskugel darstellt. Bei dieser Darstellung gruppiren sich auch die Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$, welche bez. einer Geraden G und C angehören, in sehr einfacher und anschaulicher Weise.

3a) Wenn man für eine Gerade G die dieser angehörigen Punkte $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}'_0$ als Grundpunkte wählt, so stellt die Gleichung:

$$\zeta_1^{10} - \zeta_2^{10} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40\text{a})$$

die 5 Punkte $\mathfrak{B}$ und die 5 Punkte $\mathfrak{J}$ der Geraden dar, und zwar entsprechen den 5 Parametern $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ die 5 Punkte $\mathfrak{J}$, den 5 Parameterwerthen $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -1, -\varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^3, -\varepsilon^4$ die 5 Punkte $\mathfrak{B}$. Man vergleiche die Zusammenstellung (25a), in welcher die angegebenen Coordinatenwerthe genau diesen Parameterwerthen entsprechend erhalten werden, wenn als Grundpunkte die beiden Punkte:

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{g}_0 & \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -i \\ \mathfrak{g}'_0 & \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25\text{c})$$

gewählt werden. Die 5 Punkte $\mathfrak{B}$ und die 5 Punkte $\mathfrak{J}$ bilden also auf dem Aequator der beiden Grundpunkte (dem Hauptkreise der reellen Zahlen) in abwechselnder Folge die Eckpunkte eines regulären Zehnecks.

Die Gleichung

$$\zeta_1^{10} + \zeta_2^{10} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40\text{b})$$

stellt alsdann die 10 der Geraden G angehörigen Punkte $\mathfrak{L}$ dar, welche die Eckpunkte eines zweiten regulären Zehnecks bilden, das aus dem ersten durch eine Drehung von $\frac{\pi}{10}$ um die Axe resultirt. Für das gewählte Beispiel erhält man die folgenden, den vorangestellten Parameterwerthen entsprechenden Coordinaten der Punkte $\mathfrak{L}$:

$$\left.\begin{array}{llllll|llllll}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i & \ldots \mathfrak{L}_1\,(\Lambda_1) & \ldots 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -1 & \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i & \ldots \mathfrak{L}_6\,(\Lambda_6) & \ldots 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 1 \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\varepsilon & \ldots \mathfrak{L}_2\,(\Lambda_2) & \ldots 0 & \operatorname{tg}\varphi & 1 & \frac{1+2\sin\varphi}{\sin 2\varphi} & \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\varepsilon^4 & \ldots \mathfrak{L}_7\,(\Lambda_7) & \ldots 0 & \operatorname{tg}\varphi & 1 & \frac{1-2\sin\varphi}{\sin 2\varphi} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\varepsilon^2 & \ldots \mathfrak{L}_3\,(\Lambda_3) & \ldots 0 & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & \frac{1+2\cos\varphi}{\cos 2\varphi} & \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\varepsilon^3 & \ldots \mathfrak{L}_8\,(\Lambda_8) & \ldots 0 & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & \frac{1-2\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\varepsilon^3 & \ldots \mathfrak{L}_4\,(\Lambda_4) & \ldots 0 & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & -\frac{1-2\cos\varphi}{\cos 2\varphi} & \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\varepsilon^2 & \ldots \mathfrak{L}_9\,(\Lambda_9) & \ldots 0 & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & -\frac{1+2\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\varepsilon^4 & \ldots \mathfrak{L}_5\,(\Lambda_5) & \ldots 0 & \operatorname{tg}\varphi & 1 & -\frac{1-2\sin\varphi}{\sin 2\varphi} & \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\varepsilon & \ldots \mathfrak{L}_{10}\,(\Lambda_{10}) & \ldots 0 & \operatorname{tg}\varphi & 1 & -\frac{1+2\sin\varphi}{\sin 2\varphi}\text{[1]}
\end{array}\right\}\text{(40c)}\;.$$

Die nebeneinanderstehenden Punkte $\mathfrak{L}$, wie $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_6$ u. s. f. sind gegenüberliegende Punkte auf dem Hauptkreise der reellen Zahlen, ebenso wie die nebeneinandergestellten Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ in (25a) sich diametral gegenüberliegen. Bei der Uebertragung der Configuration auf den dreidimensionalen sphärischen Raum vermöge der Centralprojection (vergl. § 26) wird jede Gerade G in einen Hauptkreis projicirt, wobei jedem Punkt der Geraden ein Punkt des Hauptkreises nebst Gegenpunkt entspricht. Die Coordinaten der 10 Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ und deren Gegenpunkte sind die mit $\pm$ zu versehenden in (25a) angegebenen Werthe; ebenso werden die Coordinaten der 10 Punkte $\mathfrak{L}$ und deren Gegenpunkte aus den Werthen in (40c) erhalten, wenn diese zuvor mit einem leicht zu bestimmenden Factor multiplicirt werden, so dass die Quadratsumme $=1$ wird, und mit $\pm$ versehen werden. Der Bogenabstand der in (25a) und der in (40c) nebeneinanderstehenden Punkte beträgt alsdann einen Viertelskreis, während die Punkte $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_{15}$, $\mathfrak{B}_{23}$, $\mathfrak{B}_{21}$, $\mathfrak{B}_{13}$ bez. von den Punkten $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$, $\mathfrak{L}_5$ und die Punkte $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_5$ von den Punkten $\mathfrak{L}_6$, $\mathfrak{L}_7$, $\mathfrak{L}_8$, $\mathfrak{L}_9$, $\mathfrak{L}_{10}$ um je einen Achtelskreis abstehen.

Für die Coordinaten der Verbindungsgeraden (Schnittlinien) der 10 Punkte $\mathfrak{L}_1 \ldots \mathfrak{L}_{10}$ (der 10 Ebenen $\Lambda_1 \ldots \Lambda_{10}$) mit dem Punkte $\mathfrak{g}_0$ (der Ebene χ_0) der reciproken Polaren G' (vgl. (25b)) erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_6\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi & i & -i \\
|\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_7\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & \varepsilon\sin\varphi & \cos\varphi & \varepsilon\cos\varphi & i & -i\varepsilon \\
|\mathfrak{L}_3\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_8\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & \varepsilon^2\sin\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^2\cos\varphi & i & -i\varepsilon^2 \\
|\mathfrak{L}_4\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_9\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & \varepsilon^3\sin\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^3\cos\varphi & i & -i\varepsilon^3 \\
|\mathfrak{L}_5\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_{10}\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & \varepsilon^4\sin\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^4\cos\varphi & i & -i\varepsilon^4
\end{array}\right\}\text{(40d)}$$

[1]) Es ist z. B. $\frac{i(1-i\varepsilon)}{1+i\varepsilon} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi\,\sin\varphi}{1-2\sin\varphi} = \frac{1+2\sin\varphi}{\sin 2\varphi}\cos\varphi$,

$\frac{i(1-i\varepsilon^2)}{1+i\varepsilon^2} = -\frac{\operatorname{cotg}\varphi\,\sin\varphi}{1-2\cos\varphi} = \frac{1+2\cos\varphi}{\cos 2\varphi}\sin\varphi$ u. s. f.

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\mathfrak{L}_6\,\mathfrak{g}_0| = |\varLambda_1\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & -\sin\varphi & \cos\varphi & -\cos\varphi & i & i \\
|\mathfrak{L}_7\,\mathfrak{g}_0| = |\varLambda_2\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & -\varepsilon\sin\varphi & \cos\varphi & -\varepsilon\cos\varphi & i & i\varepsilon \\
|\mathfrak{L}_8\,\mathfrak{g}_0| = |\varLambda_3\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & -\varepsilon^2\sin\varphi & \cos\varphi & -\varepsilon^2\cos\varphi & i & i\varepsilon^2 \\
|\mathfrak{L}_9\,\mathfrak{g}_0| = |\varLambda_4\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & -\varepsilon^3\sin\varphi & \cos\varphi & -\varepsilon^3\cos\varphi & i & i\varepsilon^3 \\
|\mathfrak{L}_{10}\,\mathfrak{g}_0| = |\varLambda_5\,\chi'_0| \ldots & \sin\varphi & -\varepsilon^4\sin\varphi & \cos\varphi & -\varepsilon^4\cos\varphi & i & i\varepsilon^4
\end{array}\right\} \quad (40\,e) \quad .$$

Die Vergleichung dieser Werthe mit denjenigen für die Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_0|$ und $|\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0|$ (vgl. (26a) und (26b)) lässt erkennen, dass die ersteren aus den letzteren einfach durch Multiplication der an zweiter, vierter und sechster Stelle stehenden Coordinatenwerthe mit dem Factor $-i$ erhalten werden. Die Coordinaten für sämmtliche 1440 Gerade $|\mathfrak{L}\,\mathfrak{g}_0|$ resultiren aus den angegebenen in bekannter Weise.

3b) Werden analog für eine Gerade C die derselben angehörigen Punkte $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ als Grundpunkte gewählt, so stellt die Gleichung

$$\zeta_1^6 - \zeta_2^6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (41a)$$

den Werthen $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -1,\ -\alpha^2,\ -\alpha$ und $1,\ \alpha^2,\ \alpha$ entsprechend bez. die 3 Punkte $\mathfrak{B}$ und die 3 Punkte $\mathfrak{K}$ dieser Geraden dar, welche auf dem Hauptkreise der reellen Zahlen (dem Aequator der beiden Grundpunkte) in abwechselnder Folge die Eckpunkte eines regulären Sechsecks bilden. Die Gleichung

$$\zeta_1^6 + \zeta_2^6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (41b)$$

stellt alsdann die 6 der Geraden C angehörigen Punkte $\mathfrak{P}$ dar, welche entsprechend den Parameterwerthen $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i,\ i\,\alpha,\ i\,\alpha^2$ und $-i,\ -i\,\alpha,\ -i\,\alpha^2$ die Eckpunkte eines zweiten regulären Sechsecks bilden, das aus dem ersteren durch eine Drehung von $\frac{\pi}{6}$ um die Axe resultirt. Die in den Formeln nebeneinanderstehenden Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_4$ u. s. f. sind ebenso, wie die in den Formeln 2bα)..2bδ) nebeneinanderstehenden Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$, sich bezw. diametral gegenüberliegende Punkte. Für die Uebertragung auf den dreidimensionalen sphärischen Raum gilt entsprechend das unter 3a) Gesagte: Der Bogenabstand der nebeneinanderstehenden Punkte (und deren Gegenpunkte) beträgt einen Viertelskreis, während die Punkte $\mathfrak{B}$ von den Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ und die Punkte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ von den Punkten $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ um je einen Achtelskreis abstehen. Im Folgenden sind die Coordinatenwerthe der Punkte $\mathfrak{P}$ (der Ebenen Π) und der durch Verbindung derselben mit dem Punkte $\mathfrak{c}_0$ (der Ebene γ_0) der reciproken Polaren C' entstehenden Geraden $|\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi\,\gamma'_0|$ für die vier unter 2bα)..2bδ) behandelten Fälle angegeben.

3 b α) (Vergl. § 4 unter 8a)) Formel (13δ), wo die Punkte $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{p}$ und § 8 III Formeln (50ζ) und (50η), wo die Geraden $|\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0|$ durch t bezeichnet wurden). Für die Gerade $C \ldots 1\ -i\ 1-i\ 1-i$ (vgl. (27a) unter 2 b α)) erhält man:

$$\left.\begin{array}{llcccc}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i & \ldots \mathfrak{P}_1\ (\Pi_1) \ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i\alpha & \ldots \mathfrak{P}_2\ (\Pi_2) \ldots & -\frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i\alpha^2 & \ldots \mathfrak{P}_3\ (\Pi_3) \ldots & -\frac{c_2}{2} & \frac{c_1}{2\sqrt{3}} & \frac{c_1}{2\sqrt{3}} & \frac{c_1}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i & \ldots \mathfrak{P}_4\ (\Pi_4) \ldots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i\alpha & \ldots \mathfrak{P}_5\ (\Pi_5) \ldots & \frac{c_2}{2} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i\alpha^2 & \ldots \mathfrak{P}_6\ (\Pi_6) \ldots & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}} & \frac{c_2}{2\sqrt{3}}\ ^{1)}
\end{array}\right\} \quad (41\,c)$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_4\,\gamma'_0| \ldots 1\ 1\ \alpha\ \alpha\ \alpha^2\ \alpha^2 \\
|\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_5\,\gamma'_0| \ldots 1\ \alpha^2\ \alpha\ 1\ \alpha^2\ \alpha \\
|\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_6\,\gamma'_0| \ldots 1\ \alpha\ \alpha\ \alpha^2\ \alpha^2\ 1
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41\,d)$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathfrak{P}_4\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_1\,\gamma'_0| \ldots 1\ -1\ \alpha\ -\alpha\ \alpha^2\ -\alpha^2 \\
|\mathfrak{P}_5\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_2\,\gamma'_0| \ldots 1\ -\alpha\ \alpha\ -\alpha^2\ \alpha^2\ -1 \\
|\mathfrak{P}_6\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_3\,\gamma'_0| \ldots 1\ -\alpha^2\ \alpha\ -1\ \alpha^2\ -\alpha
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41\,e)$$

Die Vergleichung dieser Werthe mit denjenigen für die Geraden $|\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0|$ und $|\mathfrak{R}\,\mathfrak{c}_0|$ in (28a) und (28b) ergiebt auch hier, dass die ersteren aus den letzteren durch Multiplication von x_2, x_4, x_6 mit dem Factor i resultiren.

3 b β) Während die Coordinaten der drei Punkte $\mathfrak{B}_{15}$, $\mathfrak{B}'_{20}$, $\mathfrak{B}_{22}$ und der drei Punkte $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ der Geraden $C' \ldots 1\ i\ 1\ i\ 1\ i$ (vergl. (29a)) (bis auf einen Factor) den bez. Parameterwerthen

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\lambda,\ -\lambda\alpha,\ -\lambda\alpha^2 \text{ und } \lambda,\ \lambda\alpha,\ \lambda\alpha^2, \text{ wo } \lambda = \frac{3\sqrt{5}-1}{8} - \frac{i\sqrt{3}\cot\!\mathrm{g}\,\varphi}{4} = \alpha^2\,\frac{1-i\sqrt{15}}{4}$$

ist, entsprechen, ergeben sich die Coordinatenwerthe der Punkte $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_6$ für die Werthe

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \lambda i,\ \lambda i\alpha,\ \lambda i\alpha^2 \text{ und } -\lambda i,\ -\lambda i\alpha,\ -\lambda i\alpha^2.$$

1) Vgl. § 2 unter (8γ): $c_1^2 = \cot\!\mathrm{g}\,\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$, $c_2^2 = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

Ferner ist $\frac{c_1^2-i}{c_1^2+i} = \frac{1+i\alpha^2}{1-i\alpha} = i\alpha^2$; $\frac{c_2^2-i}{c_2^2+i} = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha^2} = i\alpha$ u. s. f.

Man erhält z. B.:

$$\left.\begin{array}{llllll}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=\lambda i & \ldots\ \mathfrak{P}_1\,(\Pi_1)\ \ldots & 0 & \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi+\mathrm{cotg}\,^2\varphi & -(\sqrt{5}-\sqrt{3}) & -(\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\,\varphi+\mathrm{tg}\,^2\varphi) \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-\lambda i\alpha^2 & \ldots\ \mathfrak{P}_6\,(\Pi_6)\ \ldots & 0 & \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi+\sqrt{5} & \sqrt{3}+\mathrm{tg}\,^2\varphi & -\mathrm{cotg}\,\varphi\,(\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\,\varphi)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots(41\,\mathrm{f})\\ \ldots(41\,\mathrm{g})\end{array}$$

und für die x_i-Coordinaten der Geraden $|\,\mathfrak{P}_m\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_{m+3}\,\gamma'_0\,|$ die Form:

$$\begin{array}{lllllll}\sqrt{5}+i\sqrt{3} & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & (\sqrt{5}+i\sqrt{3})\alpha^2 & \sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha^2 & (\sqrt{5}-i\sqrt{3})\alpha & (\sqrt{5}-i\sqrt{3}) & \ldots\ (41\mathrm{h}) \\ \text{oder } 1 & \alpha\, e^{2i\zeta} & \alpha^2 & \alpha^2\, e^{2i\zeta} & \alpha & e^{2i\zeta} & \ldots\ (41\mathrm{h}')\end{array}$$

(vgl. Formeln (30a) und (30b) unter $2\,\mathrm{b}\,\beta$)).

$3\,\mathrm{b}\,\gamma$) Für die Gerade $C\ \ldots\ 0\quad 0\quad \mathrm{tg}\,\varphi\quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi\quad \mathrm{cotg}\,\varphi\quad i\,\mathrm{cotg}\,\varphi$ (vgl. $2\,\mathrm{b}\,\gamma$) entsprechen die Coordinatenwerthe der Punkte $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_{22}$, $\mathfrak{B}'_{23}$ und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ (vgl. (31a)) den Parameterwerthen $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -1,\ -\alpha,\ -\alpha^2$ und $1,\ \alpha^2,\ \alpha$ wobei

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{c}_0\\ \mathfrak{c}'_0\end{array}\right\}\ \ldots\ 0\quad \pm i\quad \cos\psi\quad \sin\psi\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (41\mathrm{i})$$

ist; für die Punkte $\mathfrak{P}$ (Ebenen Π) ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{llllll}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i & \ldots\ \mathfrak{P}_1\,(\Pi_1)\ \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & \frac{-\sin\psi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\alpha & \ldots\ \mathfrak{P}_2\,(\Pi_2)\ \ldots & 0 & -\frac{c_1}{2} & \frac{c_2\cos\psi}{2} & \frac{-c_2\sin\psi}{2} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=i\alpha^2 & \ldots\ \mathfrak{P}_3\,(\Pi_3)\ \ldots & 0 & -\frac{c_2}{2} & \frac{c_1\cos\psi}{2} & \frac{-c_1\sin\psi}{2} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i & \ldots\ \mathfrak{P}_4\,(\Pi_4)\ \ldots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & \frac{-\sin\psi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\alpha & \ldots\ \mathfrak{P}_5\,(\Pi_5)\ \ldots & 0 & \frac{c_2}{2} & \frac{c_1\cos\psi}{2} & \frac{-c_1\sin\psi}{2} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2}=-i\alpha^2 & \ldots\ \mathfrak{P}_6\,(\Pi_6)\ \ldots & 0 & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2\cos\psi}{2} & \frac{-c_2\sin\psi}{2}\end{array}\right\}\ \ldots\ (41\mathrm{k})$$

Damit erhält man folgende Coordinatenwerthe für die Geraden $|\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0\,|$:

$$\left.\begin{array}{lllllll}|\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_4\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & -i & \cos\psi & \cos\psi & -\sin\psi & -\sin\psi \\ |\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_5\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & -i\alpha & \cos\psi & \alpha\cos\psi & -\sin\psi & -\alpha\sin\psi \\ |\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_6\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & -i\alpha^2 & \cos\psi & \alpha^2\cos\psi & -\sin\psi & -\alpha^2\sin\psi \\ |\,\mathfrak{P}_4\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_1\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & i & \cos\psi & -\cos\psi & -\sin\psi & \sin\psi \\ |\,\mathfrak{P}_5\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_2\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & i\alpha & \cos\psi & -\alpha\cos\psi & -\sin\psi & \alpha\sin\psi \\ |\,\mathfrak{P}_6\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_3\,\gamma'_0\,|\ \ldots & i & i\alpha^2 & \cos\psi & -\alpha^2\cos\psi & -\sin\psi & \alpha^2\sin\psi\end{array}\right\}\ (41\mathrm{l})$$

(Vgl. Formeln (32a) und (32b)).

$3\,\mathrm{b}\,\delta$) Für die Gerade $C\ \ldots\ 1\quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi\quad 1\quad i\,\mathrm{cotg}\,\varphi\quad 1\quad 0$ (vgl. $2\,\mathrm{b}\,\delta$) endlich erhält man aus den Coordinatenwerthen

$$\left.\begin{array}{lllll}\mathfrak{c}_0\ \ldots & \alpha^2\,\mathrm{tg}\,^2\varphi & \alpha+\mathrm{tg}\,\varphi & -\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi & -1 \\ \mathfrak{c}'_0\ \ldots & \alpha^2\,\mathrm{tg}\,\varphi & 1+\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi & -\mathrm{tg}\,\varphi & -\alpha\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (41\mathrm{m})$$

für die Punkte $\mathfrak{P}$ (Ebenen Π):

$$\left.\begin{array}{llllll}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i & \ldots \mathfrak{P}_1\ (\Pi_1) \ldots & \sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi & -(c_1 + c_2\,\mathrm{tg}\,\varphi) & c_1\,\mathrm{tg}\,\varphi & c_2 \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i\alpha & \ldots \mathfrak{P}_1\ (\Pi_2) \ldots & -c_2\,\mathrm{tg}^2\varphi & \sqrt{2} - c_1\,\mathrm{tg}\,\varphi & -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & c_1 \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = i\alpha^2 & \ldots \mathfrak{P}_3\ (\Pi_3) \ldots & -c_1\,\mathrm{tg}^2\varphi & -c_2 + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & c_2\,\mathrm{tg}\,\varphi & -\sqrt{2} \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i & \ldots \mathfrak{P}_4\ (\Pi_4) \ldots & \sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi & c_2 - c_1\,\mathrm{tg}\,\varphi & -c_2\,\mathrm{tg}\,\varphi & c_1 \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i\alpha & \ldots \mathfrak{P}_5\ (\Pi_5) \ldots & -c_1\,\mathrm{tg}^2\varphi & \sqrt{2} + c_2\,\mathrm{tg}\,\varphi & -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & -c_2 \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -i\alpha^2 & \ldots \mathfrak{P}_6\ (\Pi_6) \ldots & c_2\,\mathrm{tg}^2\varphi & -c_1 + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & c_1\,\mathrm{tg}\,\varphi & -\sqrt{2}
\end{array}\right\} \quad (41\,\mathrm{n})$$

und hieraus für die Geraden $|\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0\,|$:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_4\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & -2\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\,i\sqrt{3} \\
|\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_5\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & 2\,\alpha^2\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & -2\,\alpha^2\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\,\alpha^2 i\sqrt{3} \\
|\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_6\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & 2\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & -2\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & 2\,\alpha i\sqrt{3}
\end{array}\right\} \quad (41\,\mathrm{o})$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
|\,\mathfrak{P}_4\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_1\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & -2\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & 2\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\,i\sqrt{3} \\
|\,\mathfrak{P}_5\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_2\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & -2\,\alpha^2\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & 2\,\alpha^2\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\,\alpha^2 i\sqrt{3} \\
|\,\mathfrak{P}_6\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_3\,\gamma'_0\,| \ldots & (\sqrt{5} - i\sqrt{3}) & -2\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha & 2\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi & (\sqrt{5} - i\sqrt{3})\alpha^2 & -2\,\alpha i\sqrt{3}
\end{array}\right\} \quad (41\,\mathrm{o}').$$

Auch hier, wie bei den Formeln (41 l) erkennt man, dass die x_i-Coordinaten der Geraden $|\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{c}_0\,|$ aus denjenigen der entsprechenden Geraden $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0\,|$ und $|\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0\,|$ resultiren, wenn die an erster, dritter, fünfter (oder an zweiter, vierter, sechster) Stelle stehenden Coordinatenwerthe der letzteren mit i (oder $-i$) multiplicirt werden.

3c) Für die Geraden B kommen analoge Punkte und Verbindungsgerade, wie für die Geraden G und C nicht in Betracht. Denn die beiden Punktpaare $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ einer Geraden B resultiren für die Parameterwerthe

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = 1, \quad -1, \quad i, \quad -i,$$

und die x_i-Coordinaten der Verbindungsgeraden $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}_0\,|$ und $|\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0\,|$ (vergl. unter 2c) Formeln (35), (37), (39) a) und b)) bleiben durch Multiplication der an den ungeraden oder geraden Stellen stehenden Werthe mit i (oder $-i$) im Wesentlichen ungeändert. Auf einem solchen Hauptkreise des dreidimensionalen sphärischen Raumes, welcher durch Projection einer Geraden B erhalten wird, stehen auch die Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ bezüglich um einen Achtelskreis von einander ab.

§ 44.

Lineare Complexe, welche bei den Transformationen auftreten.

Ausser den 6 Fundamental-Complexen $x_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots 6)$ kommen bei den Transformationen der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ zunächst noch 24 weitere lineare Complexe in Betracht, welche mit den ersteren zu bestimmten Nullcorrelationen gehören, ferner eine Reihe geschaart involutorischer und drei- und fünfzähliger geschaarter Collineationen bestimmen und Gruppen von Flächen zweiten Grades erzeugen. Diese 30 linearen Complexe sind ausserdem für die nachfolgenden Untersuchungen desshalb von grosser Bedeutung, weil die sämmtlichen Substitutionen der Configurationsgruppe, analog wie es unter I bei den dort behandelten Transformationen für die 6 Complexe $x_i = 0$ ausgeführt wurde, mittelst dieser 30 linearen Complexe in sehr einfacher und übersichtlicher Weise dargestellt werden können.

A) Die 30 linearen Complexe $C_{(1)}$.

Dieselben werden durch folgende Gleichungen in x_i-Coordinaten dargestellt:

$$C_1^{(1)} \ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad C_2^{(1')} \ldots \left\{ \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42\alpha)$$

$$C_1^{(2)} \ldots \left\{ \begin{aligned} x_7 &\equiv \tfrac{1}{2}\, x_1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_3 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_9 &\equiv \tfrac{1}{2}\, x_1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_3 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_{11} &\equiv -\tfrac{1}{2}\, x_1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_3 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_{13} &\equiv -\tfrac{1}{2}\, x_1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_3 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_5 = 0 \\ \hline x_{15} &\equiv \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_3 - \tfrac{1}{2}\, x_5 = 0 \\ x_{17} &\equiv \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_3 + \tfrac{1}{2}\, x_5 = 0 \\ x_{19} &\equiv -\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_3 + \tfrac{1}{2}\, x_5 = 0 \\ x_{21} &\equiv -\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_3 - \tfrac{1}{2}\, x_5 = 0 \\ \hline x_{23} &\equiv -\tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_1 + \tfrac{1}{2}\, x_3 - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_{25} &\equiv -\tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_1 - \tfrac{1}{2}\, x_3 + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_{27} &\equiv \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_1 + \tfrac{1}{2}\, x_3 + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_5 = 0 \\ x_{29} &\equiv \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi\; x_1 - \tfrac{1}{2}\, x_3 - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi\; x_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (42\beta)$$

$$C_1^{(2')} \ldots \left|\begin{aligned}
x_8 &\equiv \tfrac{1}{2}\,x_2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_4 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{10} &\equiv \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_4 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{12} &\equiv -\tfrac{1}{2}\,x_2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_4 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{14} &\equiv -\tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_4 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{16} &\equiv \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_4 - \tfrac{1}{2}\,x_6 = 0\\
x_{18} &\equiv \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_4 + \tfrac{1}{2}\,x_6 = 0\\
x_{20} &\equiv -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_4 + \tfrac{1}{2}\,x_6 = 0\\
x_{22} &\equiv -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_4 - \tfrac{1}{2}\,x_6 = 0\\
x_{24} &\equiv -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_2 + \tfrac{1}{2}\,x_4 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{26} &\equiv -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_4 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{28} &\equiv \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_2 + \tfrac{1}{2}\,x_4 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_6 = 0\\
x_{30} &\equiv \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\; x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_4 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\; x_6 = 0\,.
\end{aligned}\right| \ldots (42\beta)$$

Hierin können die Coefficienten

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi,\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \text{ auch bezw. durch } \cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{5},\ \cos\frac{2\pi}{5}$$

ersetzt werden.

1) Jeder dieser 30 Complexe liegt mit 15 anderen in (hyperbolischer) Involution mit reellem Axenpaar B, B', mit 2 anderen in (elliptischer) Involution mit imaginärem Axenpaar b_0, b'_0. Z. B. es liegt:

$x_1 = 0$ mit $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ und den 12 Complexen $C_{(1)}^{(2')}$ in hyperbolischer,

mit $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ in elliptischer Involution;

$x_7 = 0$ mit $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ und den 12 Complexen $C_{(1)}^{(2')}$ in hyperbolischer,

mit $x_{15} = 0$, $x_{23} = 0$ in elliptischer Involution;

$$x_8 = 0 \text{ mit } \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array}\right\} \text{ und den 12 Complexen } C_{(1)}^{(2)} \text{ in hyperbolischer.}$$

$$\text{mit } \left.\begin{array}{l} x_{16} = 0 \\ x_{24} = 0 \end{array}\right\} \text{ in elliptischer Involution.}$$

Es resultiren also $\frac{30 \,.\, 15}{2} = 225$ hyperbolische Involutionen, deren Axenpaare die 225 Geradenpaare B, B' bilden und $\frac{30 \,.\, 2}{2} = 30$ elliptische Involutionen mit den 30 imaginären Axenpaaren b_0, b'_0. Aus den auch für die Folge wichtigen Identitäten:

$$x_1{}^2 + x_3{}^2 + x_5{}^2 \equiv x_7{}^2 + x_{15}{}^2 + x_{23}{}^2 \equiv x_9{}^2 + x_{17}{}^2 + x_{25}{}^2 \equiv x_{11}{}^2 + x_{19}{}^2 + x_{27}{}^2 \equiv x_{13}{}^2 + x_{21}{}^2 + x_{29}{}^2 \quad \ldots \quad (42a)$$

$$x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 \equiv x_8{}^2 + x_{16}{}^2 + x_{24}{}^2 \equiv x_{10}{}^2 + x_{18}{}^2 + x_{26}{}^2 \equiv x_{12}{}^2 + x_{20}{}^2 + x_{28}{}^2 \equiv x_{14}{}^2 + x_{22}{}^2 + x_{30}{}^2 \quad \ldots \quad (42b)$$

erkennt man, dass je zwei der drei zusammengehörigen Complexe eine elliptische Involution bilden; bei der angewandten Bezeichnung sind die 3 Indices von je 3 zusammengehörigen Complexen $C_{(1)}^{(2)}$ und $C_{(1)}^{(2')}$ congruent mod. 8.

2) Die 30 Complexe bestimmen ausserdem zu zweien, ohne in Involution zu liegen, $\frac{30 \,.\, 12}{2} = 180$ Congruenzen, und zwar gehören

a) 12 mal je 5 Complexe einem Büschel an, dessen Axen je zwei Geraden g_0, g'_0 (vgl. § 42 unter (16a) und (16b) sind,

b) (12+8) mal je 3 Complexe einem Büschel an, dessen Axen je zwei Geraden c_0, c'_0 (vgl. § 42 unter (19a), (19b)) sind.

In der folgenden Zusammenstellung (43a) sind die fünf zu je einem Büschel gehörigen Complexe $C_{(1)}$ nebst den x_i-Coordinaten der zugehörigen Axenpaare g_0, g'_0 aufgeführt:

$$\left.\begin{array}{llllll}
x_1 = 0; & x_{15} = 0, & x_{17} = 0; & x_{27} = 0, & x_{29} = 0; & \text{Axenpaar } g_0, g'_0 \ \ldots \ \pm i \quad 0 \quad \sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \\
x_1 = 0; & x_{19} = 0, & x_{21} = 0; & x_{23} = 0, & x_{25} = 0; & \quad\text{"} \qquad \text{"} \ \ldots \ \pm i \quad 0 \quad \sin\varphi \quad 0 \ -\cos\varphi \quad 0 \\
x_3 = 0; & x_7 = 0, & x_{11} = 0; & x_{17} = 0, & x_{21} = 0; & \quad\text{"} \qquad \text{"} \ \ldots \ \cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \quad \sin\varphi \quad 0 \\
x_3 = 0; & x_9 = 0, & x_{13} = 0; & x_{15} = 0, & x_{19} = 0; & \quad\text{"} \qquad \text{"} \ \ldots \ -\cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \quad \sin\varphi \quad 0 \\
x_5 = 0; & x_7 = 0, & x_{13} = 0; & x_{25} = 0, & x_{27} = 0; & \quad\text{"} \qquad \text{"} \ \ldots \ \sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \\
x_5 = 0; & x_9 = 0, & x_{11} = 0; & x_{23} = 0, & x_{29} = 0; & \quad\text{"} \qquad \text{"} \ \ldots \ \sin\varphi \quad 0 \ -\cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0
\end{array}\right\} \quad (43a) \;.$$

Diese Büschel werden auch bez. durch folgende beide, in Involution liegenden Complexe $C_{(1)}$ und $C_{(2)}$ erzeugt:

$$\left.\begin{array}{cccc}
x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_3 = 0 & x_3 = 0 \\
x_3 \operatorname{tg}\varphi + x_5 = 0, & x_3 \operatorname{tg}\varphi - x_5 = 0, & x_5 \operatorname{tg}\varphi + x_1 = 0, & x_5 \operatorname{tg}\varphi - x_1 = 0, \\
 & x_5 = 0 & x_5 = 0 & \\
 & x_1 \operatorname{tg}\varphi + x_3 = 0, & x_1 \operatorname{tg}\varphi - x_3 = 0 &
\end{array}\right| \quad (43b) \;,$$

wobei die Identitäten:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \operatorname{tg}\varphi \equiv x_{15}+x_{17} \equiv -(x_{19}+x_{21}) \\ x_1 \operatorname{cotg}\varphi \equiv -x_{27}+x_{29} \equiv -(x_{23}+x_{25}) \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43\text{c})$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \operatorname{tg}\varphi + x_5 \equiv -(x_{15}-x_{17}) \equiv (x_{27}-x_{29}) \operatorname{tg}\varphi \\ x_3 \operatorname{tg}\varphi - x_5 \equiv -(x_{19}-x_{21}) \equiv (x_{23}-x_{25}) \operatorname{tg}\varphi \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (43\text{d})$$

zu benutzen sind.

Analog erhält man die Formeln für die durch die Complexe $C_{(1)}$ mit geradem Index erzeugten Büschel u. s. f., wenn man in den Formeln (43a) bis (43d) durchweg den Index von x_i um 1 erhöht und bei den Coordinatenwerthen für g_0, g'_0: x_1, x_3, x_5 bez. mit x_2, x_4, x_6 vertauscht.

In der Zusammenstellung (44a) sind die 6, in (44a') die 4 zu je drei einem Büschel angehörigen Complexe (mit ungeradem Index) nebst den x_i-Coordinaten des Axenpaares c_0, c'_0 (bez. k_0, k'_0) angegeben:

$$\left.\begin{array}{llllllll} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0,\; x_7 = 0,\; x_9 = 0; \\ x_1 = 0,\; x_{11} = 0,\; x_{13} = 0; \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{Axenpaar } c_0, c'_0 \ldots \\ \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots \end{array} & \begin{array}{c} \pm i \\ \pm i \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \cos\psi \\ -\cos\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \sin\psi \\ \sin\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} x_3 = 0,\; x_{23} = 0,\; x_{27} = 0; \\ x_3 = 0,\; x_{25} = 0,\; x_{29} = 0; \end{array}\right. & \begin{array}{l} \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots \\ \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots \end{array} & \begin{array}{c} \sin\psi \\ \sin\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm i \\ \pm i \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \cos\psi \\ -\cos\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} x_5 = 0,\; x_{17} = 0,\; x_{19} = 0; \\ x_5 = 0,\; x_{15} = 0,\; x_{21} = 0; \end{array}\right. & \begin{array}{l} \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots \\ \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots \end{array} & \begin{array}{c} \cos\psi \\ -\cos\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \sin\psi \\ \sin\psi \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm i \\ \pm i \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array}\right\} (44\text{a}).$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_7 = 0,\; x_{19} = 0,\; x_{29} = 0;\; \text{Axenpaar } k_0, k'_0 \ldots & \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right. \\ x_9 = 0,\; x_{21} = 0,\; x_{27} = 0; \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots & \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & -\alpha & 0 \end{array}\right. \\ x_{11} = 0,\; x_{15} = 0,\; x_{25} = 0; \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots & \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right. \\ x_{13} = 0,\; x_{17} = 0,\; x_{23} = 0; \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad \ldots & \left\{\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right. \end{array}\right\} (44\text{a}').$$

Die Büschel (44a) werden auch durch folgende beide, in Involution liegenden Complexe $C_{(1)}$ und $C_{(2)}$ erzeugt:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_3 = 0 \\ x_3 \operatorname{cotg}\varphi + x_5 \operatorname{tg}\varphi = 0, & -x_3 \operatorname{cotg}\varphi + x_5 \operatorname{tg}\varphi = 0, & x_1 \operatorname{tg}\varphi + x_5 \operatorname{cotg}\varphi = 0, \\ x_3 = 0 & x_5 = 0 & x_5 = 0 \\ x_1 \operatorname{tg}\varphi - x_5 \operatorname{cotg}\varphi = 0, & x_1 \operatorname{cotg}\varphi + x_3 \operatorname{tg}\varphi = 0, & -x_1 \operatorname{cotg}\varphi + x_3 \operatorname{tg}\varphi = 0, \end{array}\right\} (44\text{b})$$

wobei die Identitäten:

$$x_1 \equiv (x_7+x_9) \equiv -(x_{11}+x_{13}) \text{ u. s. f.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44\text{c})$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \operatorname{cotg}\varphi + x_5 \operatorname{tg}\varphi \equiv (x_7-x_9) \\ -x_3 \operatorname{cotg}\varphi + x_5 \operatorname{tg}\varphi \equiv -(x_{11}-x_{13}) \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44\text{d})$$

Anwendung finden.

Die Büschel (44a') dagegen werden nicht (vgl. § 6 am Ende) durch zwei in Involution liegenden Complexe $C_{(1)}$ und $C_{(2)}$ erzeugt; vielmehr gehören je drei Complexe $C_{(2)}$ einem solchen Büschel an, nämlich bez.

$$\left.\begin{array}{llll} x_1+x_3=0 & x_3+x_5=0 & x_1-x_3=0 & x_5+x_1=0 \\ x_3+x_5=0 & x_5+x_1=0 & x_3-x_5=0 & x_1+x_3=0 \\ x_1-x_5=0, & x_3-x_1=0, & x_5-x_1=0, & x_3-x_5=0. \end{array}\right\} \quad \ldots (44b')$$

Auch hier resultiren die Formeln für die durch die Complexe $C_{(1)}$ mit geradem Index erzeugten Büschel u. s. f., wenn in den Formeln (44) der Index an x_i durchweg um 1 erhöht wird und in den Coordinaten für c_0, c'_0 und k_0, k'_0: x_1, x_3, x_5 bez. mit x_2, x_4, x_6 vertauscht werden.

B) Ferner in Betracht kommende lineare Complexe.

Ausser den in (43b), (44b) und (44b') erhaltenen linearen Complexen $C_{(2)}$ lassen sich durch lineare Verbindung der Gleichungen (42) der Complexe $C_{(1)}$ noch zahlreiche weitere Complexe $C_{(2)}$, $C_{(3)}$, analog wie in § 6 A) aus der Verbindung der 6 Fundamental-Complexe $x_i = 0$, herleiten, wobei eine grosse Reihe von Identitäten sich darbietet. Die Geraden der Configuration treten hierbei theils als Complexstrahlen, theils als Axen bestimmter Involutionen auf. Es möge genügen, folgende Complexe und Relationen hervorzuheben.

1) Zu den Complexen $C_{(2)}$ gehören ausser den angeführten und den 30 in § 6 unter (14β) angegebenen, noch wesentlich 6 Typen, welche durch je ein Beispiel charakterisirt werden mögen:

$$x_1+x_7 \equiv \frac{3}{2}\, x_1+\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \varphi\, x_3+\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi\, x_5=0 \quad \ldots\ldots (45a)$$

$$(x_7+x_{17}) \operatorname{tg} \varphi \equiv \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \varphi\, x_1+\frac{1}{2 \cos^2 \varphi}\, x_3+\frac{1}{2}\, x_5=0. \quad \ldots (45b)$$

$$(x_7+x_{25}) \operatorname{cotg} \varphi \equiv x_1+\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi\, x_3+\frac{1}{2 \sin^2 \varphi}\, x_5=0. \quad \ldots (45c)$$

$$x_7+x_{23} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\, x_1+\frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \varphi\, x_3-\frac{1}{2} x_5=0 \quad \ldots\ldots (45d)$$

$$x_7-x_{15} \equiv -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi\, x_1+\frac{\sqrt{5}}{2}\, x_3+\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \varphi\, x_5=0. \quad \ldots (45e)$$

$$x_7-x_{29} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\, x_1+\frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \varphi\, x_3+\frac{1}{2} \sqrt{5}\, x_5=0, \quad \ldots (45f)$$

sodann diejenigen Complexe $C_{(2)}$, welche durch Verbindung je eines Complexes $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$ mit bez. je einem Complexe $C_1^{(2')}$, $C_1^{(1')}$ entstehen z. B.:

$$x_1 \pm x_8 = 0,\ x_2 \pm x_7 = 0 \ \text{u. s. f.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45g).$$

Mit Benutzung der Identitäten:

$$\left.\begin{array}{l} x_7+x_{19}+x_{29}\equiv 0 \\ x_9+x_{21}+x_{27}\equiv 0 \\ x_{11}+x_{15}+x_{25}\equiv 0 \\ x_{13}+x_{17}+x_{23}\equiv 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

können die Gleichungen der in (43b) und (44b) angegebenen Complexe $C_{(2)}$ auch aus je drei Complexen $C_{(1)}$ zusammengesetzt werden; z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} & x_3+x_5 \operatorname{cotg}\varphi\equiv x_{27}-x_{29}\equiv x_7+x_{19}+x_{27}\equiv -(x_{13}+x_{19}+x_{29}) \\ \text{oder} & x_3 \operatorname{tg}\varphi+x_5\equiv -(x_{15}-x_{17})\equiv x_{11}+x_{17}+x_{25}\equiv -(x_{13}+x_{15}+x_{23}) \end{array}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (47\,a)$$

$$\left.\begin{array}{ll} & x_1-x_3 \operatorname{cotg}\varphi\equiv x_9-x_{11}\equiv x_9+x_{15}+x_{25}\equiv -(x_{11}+x_{21}+x_{27}) \\ \text{oder} & x_1 \operatorname{tg}\varphi-x_3\equiv -(x_{23}-x_{29})\equiv -(x_7+x_{19}+x_{23})\equiv x_{13}+x_{17}+x_{29} \end{array}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (47\,b)$$

$$x_3 \operatorname{cotg}\varphi+x_5 \operatorname{tg}\varphi\equiv x_7-x_9\equiv x_7+x_{21}+x_{27}\equiv -(x_9+x_{19}+x_{29})=0 \quad \ldots \quad (48\,a)$$

$$x_1 \operatorname{cotg}\varphi-x_3 \operatorname{tg}\varphi\equiv x_{15}-x_{21}\equiv x_9+x_{15}+x_{27}\equiv -(x_{11}+x_{21}+x_{25})=0. \quad \ldots \quad (48\,b)$$

Die übrigen Complexe $C_{(3)}$ sind entweder die bereits in § 6 unter (14γ) erhaltenen $C_{(3)}$ z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_3+x_5\equiv -(x_{13}+x_{21}+x_{29})\equiv (x_7+x_{17}+x_{27}) \operatorname{tg}\varphi\equiv -(x_9+x_{19}+x_{23}) \operatorname{cotg}\varphi=0 \\ -x_1+x_3+x_5\equiv x_{11}+x_{19}+x_{27}\equiv -(x_9+x_{15}+x_{29}) \operatorname{tg}\varphi\equiv (x_7+x_{21}+x_{25}) \operatorname{cotg}\varphi=0 \end{array}\right\} \ldots (49)$$

oder 2 . 12 Complexe $C_1^{(3)}$ und $C_1^{(3')}$, welche genau den 2 . 12 Complexen $C_1^{(2)}$ und $C_1^{(2')}$ entsprechen. Die Gleichungen dieser 2 . 12 Complexe $C_1^{(3)}$ und $C_1^{(3')}$ resultiren aus denjenigen der 2 . 12 Complexe $C_1^{(2)}$ und $C_1^{(2')}$, wenn man die negativen Permutationen von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$ als Coefficienten der x_i nimmt. Die Gleichungen dieser durch $x_7^{(1)}\ldots x_{30}^{(1)}$ zu bezeichnenden Complexe, welche mit $x_1\ldots x_6$ eine zweite Cf. (60_{15}, 72_5) bestimmen (entsprechend der im entgegengesetzten Sinne vorzunehmenden Theilung der Geraden k nach dem goldenen Schnitte), sowie die Beziehungen zu den Complexen $x_7\ \ldots\ x_{30}$ sind in den folgenden Zusammenstellungen angegeben:

$$\left.\begin{array}{l} x_7^{(1)}\equiv\frac{1}{2}(x_7+x_{17}+x_{25})\equiv\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\ x_3+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\ x_5=0 \\ x_9^{(1)}\equiv\frac{1}{2}(x_9+x_{15}+x_{23})\equiv\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\ x_3-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\ x_5=0 \\ x_{11}^{(1)}\equiv\frac{1}{2}(x_{11}+x_{21}+x_{29})\equiv-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\ x_3-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\ x_5=0 \\ x_{13}^{(1)}\equiv\frac{1}{2}(x_{13}+x_{19}+x_{27})\equiv-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\ x_3+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\ x_5=0 \end{array}\right\} C_1^{(3)} \ \ldots \ (50\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_{15}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_9+x_{19}+x_{25}) \equiv -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_1 - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\
x_{17}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_7+x_{21}+x_{23}) \equiv -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_3 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\
x_{19}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_{13}+x_{15}+x_{29}) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_1 - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_3 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\
x_{21}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_{11}+x_{17}+x_{27}) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\
\text{—} \\
x_{23}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_9+x_{17}+x_{29}) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_5 = 0 \\
x_{25}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_7+x_{15}+x_{27}) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_5 = 0 \\
x_{27}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_{13}+x_{21}+x_{25}) \equiv -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_5 = 0 \\
x_{29}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(x_{11}+x_{19}+x_{23}) \equiv -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\, x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\, x_5 = 0
\end{array}\right\} C_1^{(3)} \ldots (50a)$$

Die Gleichungen der 12 Complexe $C_1^{(3')}$ folgen aus diesen unmittelbar durch Vermehrung jedes Index an $x_i^{(1)}$ und x_i um eine Einheit. Die Darstellung der x_i durch die $x_i^{(1)}$ ist folgende:

$$\left.\begin{array}{lll}
x_7 \equiv \frac{1}{2}(x_7^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) & x_{15} \equiv \frac{1}{2}(x_9^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) & x_{23} \equiv \frac{1}{2}(x_9^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \\
x_9 \equiv \frac{1}{2}(x_9^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) & x_{17} \equiv \frac{1}{2}(x_7^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) & x_{25} \equiv \frac{1}{2}(x_7^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) \\
x_{11} \equiv \frac{1}{2}(x_{11}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) & x_{19} \equiv \frac{1}{2}(x_{13}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) & x_{27} \equiv \frac{1}{2}(x_{13}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) \\
x_{13} \equiv \frac{1}{2}(x_{13}^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) & x_{21} \equiv \frac{1}{2}(x_{11}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) & x_{29} \equiv \frac{1}{2}(x_{11}^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{23}^{(1)})
\end{array}\right\} \quad (50\,b),$$

und entsprechend für die x_i und $x_i^{(1)}$ mit geradem Index.

Die den Identitäten (46) entsprechenden sind:

$$\left.\begin{array}{l}
x_7^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{29}^{(1)} \equiv 0 \\
x_9^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{27}^{(1)} \equiv 0 \\
x_{11}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv 0 \\
x_{13}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv 0
\end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50\,c)$$

während die den Complexen $C_{(2)}$ in (43b), (44b) (vergl. auch (47a), (47b), (48a), (48b)) entsprechenden Complexe folgende sind:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{r}
x_1+x_3\operatorname{tg}\varphi \equiv x_7^{(1)}-x_{13}^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv -(x_{13}^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \\
x_1\operatorname{cotg}\varphi+x_3 \equiv x_{25}^{(1)}-x_{27}^{(1)} \equiv x_9^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{27}^{(1)})
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{r}
x_3+x_5\operatorname{tg}\varphi \equiv -(x_{23}^{(1)}-x_{25}^{(1)}) \equiv x_{13}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) \\
x_3\operatorname{cotg}\varphi+x_5 \equiv -(x_{19}^{(1)}-x_{21}^{(1)}) \equiv x_7^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{29}^{(1)} \equiv -(x_9^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{27}^{(1)})
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{r}
x_5+x_1\operatorname{tg}\varphi \equiv -(x_{17}^{(1)}-x_{21}^{(1)}) \equiv x_{13}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv -(x_9^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) \\
x_5\operatorname{cotg}\varphi+x_1 \equiv x_7^{(1)}-x_{11}^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{29}^{(1)})
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \ldots (50\,d)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} x_1-x_3\ \operatorname{tg}\varphi \equiv x_9^{(1)}-x_{11}^{(1)} \equiv x_9^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) \\ x_1\ \operatorname{cotg}\varphi-x_3 \equiv x_{23}^{(1)}-x_{29}^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv -(x_{13}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} x_3-x_5\ \operatorname{tg}\varphi \equiv -(x_{27}^{(1)}-x_{29}^{(1)}) \equiv x_9^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{29}^{(1)} \equiv -(x_7^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{27}^{(1)}) \\ x_3\ \operatorname{cotg}\varphi-x_5 \equiv -(x_{15}^{(1)}-x_{17}^{(1)}) \equiv x_{11}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{13}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} x_5-x_1\ \operatorname{tg}\varphi \equiv x_{15}^{(1)}-x_{19}^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{29}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) \\ x_5\ \operatorname{cotg}\varphi-x_1 \equiv -(x_9^{(1)}-x_{13}^{(1)}) \equiv x_{13}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{27}^{(1)} \equiv -(x_9^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots (50\text{d})$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} x_3\ \operatorname{tg}\varphi+x_5\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv x_7^{(1)}-x_9^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{27}^{(1)} \equiv -(x_9^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \\ x_5\ \operatorname{tg}\varphi+x_1\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv x_{25}^{(1)}-x_{29}^{(1)} \equiv x_7^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{25}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \\ x_1\ \operatorname{tg}\varphi+x_3\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv -(x_{15}^{(1)}-x_{21}^{(1)}) \equiv x_9^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{27}^{(1)} \equiv -(x_{11}^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} x_3\ \operatorname{tg}\varphi-x_5\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv x_{11}^{(1)}-x_{13}^{(1)} \equiv x_{11}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv -(x_{13}^{(1)}+x_{15}^{(1)}+x_{25}^{(1)}) \\ x_5\ \operatorname{tg}\varphi-x_1\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv -(x_{23}^{(1)}-x_{27}^{(1)}) \equiv x_{13}^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{27}^{(1)} \equiv -(x_9^{(1)}+x_{21}^{(1)}+x_{23}^{(1)}) \\ x_1\ \operatorname{tg}\varphi-x_3\ \operatorname{cotg}\varphi \equiv -(x_{17}^{(1)}-x_{19}^{(1)}) \equiv x_{13}^{(1)}+x_{19}^{(1)}+x_{23}^{(1)} \equiv -(x_7^{(1)}+x_{17}^{(1)}+x_{29}^{(1)}) \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots (50\text{e})$$

Mit Hülfe der Relationen (50a) würden sich die Gleichungen dieser Complexe einfach aus je sechs Complexen $C_1^{(2)}$ zusammensetzen lassen; analoges gilt für die durch Erhöhung des Index um eine Einheit resultirenden Complexe. Auch die Gleichungen der 8 Complexe

$$x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0,$$

welche zu den 12 Complexen (50e) hinzutreten, lassen sich leicht durch je 3 Complexe $x_i^{(1)}$ darstellen.

2) Je zwei der Complexe (50d) mit ungeradem und geradem Index bestimmen eine Involution, deren Axenpaar ein Geradenpaar G, G' ist; z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l} x_3+x_5\ \operatorname{tg}\varphi = 0 \\ x_4+x_6\ \operatorname{tg}\varphi = 0 \end{array}\right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$G, G' \ldots 0 \quad 0 \quad 1 \quad \pm i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \pm i\,\operatorname{tg}\varphi$$

(vgl. ($8c_1$) in § 41 unter (5c)). Die 36 Geradenpaare G, G' entstehen durch Combination der 6 Complexe (50d) von ungeradem Index mit je einem Complexe von geradem Index.

Sowie je ein Complex $C_{(3)}$ $x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0$ mit je einem Complexe $x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0$ eine Involution mit einem Axenpaar k, k' bestimmt (vgl. $8b_1$) in § 41 unter 5b)), so bestimmt auch je ein Complex

$$x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0 \quad (\text{bez. } x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0)$$

mit je einem der Complexe (50e) von geradem (bez. ungeradem) Index eine Involution, deren Axenpaar eines der 48 Geradenpaare C, C' in $8b_3$) (§ 41) ist; z. B.:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 \operatorname{tg} \varphi + x_6 \operatorname{cotg} \varphi = 0 \end{array} \right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$C, C' \ldots 1 \quad 0 \quad 1 \quad \pm i \operatorname{tg} \varphi \quad 1 \quad \pm i \operatorname{cotg} \varphi.$$

Endlich bestimmen je zwei Complexe (50e) mit ungeradem und geradem Index eine Involution, deren Axenpaar eines der 36 Geradenpaare C, C' in $8b_2$) (§ 41) ist; z. B.:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 \operatorname{tg} \varphi + x_5 \operatorname{cotg} \varphi = 0 \\ x_4 \operatorname{tg} \varphi + x_6 \operatorname{cotg} \varphi = 0 \end{array} \right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$C, C' \ldots 0 \quad 0 \quad \operatorname{tg} \varphi \quad \pm i \operatorname{tg} \varphi \quad \operatorname{cotg} \varphi \quad \pm i \operatorname{cotg} \varphi.$$

3) Auch die in § 42 unter IV, V, VI erhaltenen reellen Geraden $g^{(c)} = c^{(g)}$, $g^{(b)} = b^{(g)}$, $c^{(b)} = b^{(c)}$ ergeben sich als Axen von Involutionen, welche durch die betrachteten Complexe bestimmt sind.

a) Je ein Complex (50d) von ungeradem (geradem) Index bildet mit je einem Complex $x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0$ $(x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0)$ eine Involution, deren Axenpaar eines der 48 Geradenpaare $g^{(c)} = c^{(g)}$ (vgl. § 42 (22d)) ist, z. B.:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \end{array} \right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$\cos \varphi \quad \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \sin \varphi \quad \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \pm \frac{i}{\sqrt{3}};$$

ferner bildet je ein Complex (50d) von ungeradem (geradem) Index mit je einem Complex (50e) von geradem (ungeradem) Index eine Involution, deren Axenpaar eines der 72 Geradenpaare $g^{(c)} = c^{(g)}$ (§ 42 (22e)) ist, z. B.:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi = 0 \\ x_2 \sin \psi + x_4 \cos \psi = 0 \end{array} \right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$\cos \varphi \quad \pm i \sin \psi \quad \sin \varphi \quad \pm i \cos \psi \quad 0 \quad 0.$$

b) Je ein Complex (50d) von ungeradem (geradem) Index bildet mit je einem der 30 Complexe $C_{(i)}$ (Formel (42)) von geradem (ungeradem) Index eine Involution, deren Axenpaar eines der 180 Geradenpaare $g^{(b)} = b^{(g)}$ ist (vgl. § 42 unter V) Formeln (23d), (23e)) z. B.:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi = 0 \\ x_2 \qquad = 0 \end{array} \right\}$$

bilden eine Involution mit Axenpaar:

$$\cos \varphi \quad \pm i \quad \sin \varphi \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

und
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \cos\varphi + x_3 \sin\varphi = 0 \\ \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi \, x_4 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi \, x_6 = 0 \end{array} \right\}$$
bilden eine Involution mit Axenpaar:
$$\cos\varphi \quad \pm\frac{i}{2} \sin\varphi \quad \pm\frac{i}{2} \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \pm\frac{i}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

c) Je ein Complex $x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0$ $(x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0)$ und ebenso je ein Complex (50e) von ungeradem (geradem) Index bildet mit je einem der 30 Complexe $C_{(1)}$ (Formel (42)) von geradem (ungeraden) Index eine Involution, deren Axenpaar eines der $24+96+36+144 = 300$ Axenpaare $c^{(b)} = b^{(c)}$ ist (vgl. § 42 unter VI, Formeln (24f) bis (24i)); z. B.:
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$
bilden eine Involution mit Axenpaar:
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm i \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \qquad \text{(vgl. (24f);}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi \, x_4 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi \, x_6 = 0 \end{array} \right\}$$
bilden eine Involution mit Axenpaar:
$$\pm\frac{i}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \pm\frac{i}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi \quad \pm\frac{i}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{(vgl. (24g);}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \sin\psi + x_3 \cos\psi = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$
bilden eine Involution mit Axenpaar:
$$\sin\psi \quad i \cos\psi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad \text{(vgl. (24h));}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \sin\psi + x_3 \cos\psi = 0 \\ \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\varphi \, x_4 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi \, x_6 = 0 \end{array} \right\}$$
bilden eine Involution mit Axenpaar:
$$\sin\psi \quad \pm\frac{i}{2} \cos\psi \quad \pm\frac{i}{2} \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \pm\frac{i}{2} \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{(vgl. (24i)).}$$

§ 45.

Flächen zweiten Grades.

Je drei (nicht einem Büschel angehörige) lineare Complexe $C_{(1)}$, $C_{(2)}$. . . erzeugen eine Reihe von Flächen zweiten Grades, von welchen die

die wichtigsten, für die Transformationen in Betracht kommenden Gruppen, von welchen einige bereits im I. Haupttheil auftraten, im Folgenden angegeben werden sollen.

I) 226 Flächen $F^{(1)}$.

Dieselben werden durch je drei, zu zweien in Involution liegende lineare Complexe $C_{(1)}$ (vgl. § 44 unter A) Formel (42)) erzeugt; zu ihnen gehören:

1) die 10 Fundamentalflächen $F^{(1)}_1 .. F^{(1)}_{10}$ (vgl. § 7 unter 1) und Formeln (17 ε)), welche durch je 3 Complexe $C^{(1)}_1$ oder $C^{(1')}_1$ erzeugt werden und von denen die erste $F^{(1)}_1$ imaginär, die übrigen neun $F^{(1)}_2 .. F^{(1)}_{10}$ reell sind.

Aus den in § 44 unter (42a) und (42b) aufgestellten Identitäten ergeben sich die nachfolgenden Darstellungen für die Fläche $F^{(1)}_1$, aus welchen auch die beiden Systeme von Erzeugungslinien leicht resultiren:

$$\left.\begin{array}{rr} x_1{}^2+x_3{}^2+x_5{}^2 & \equiv x_2{}^2+x_4{}^2+x_6{}^2 \\ \equiv x_7{}^2+x_{15}{}^2+x_{23}{}^2 & \equiv x_8{}^2+x_{16}{}^2+x_{24}{}^2 \\ \equiv x_9{}^2+x_{17}{}^2+x_{25}{}^2 & \equiv x_{10}{}^2+x_{18}{}^2+x_{26}{}^2 \\ \equiv x_{11}{}^2+x_{19}{}^2+x_{27}{}^2 & \equiv x_{12}{}^2+x_{20}{}^2+x_{28}{}^2 \\ \equiv x_{13}{}^2+x_{21}{}^2+x_{29}{}^2 & \equiv x_{14}{}^2+x_{22}{}^2+x_{30}{}^2 \end{array}\right\} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (51)$$

Die bereits in § 42 unter 2) betrachtete regulär-ikosaedrische Eintheilung, welche auf der Fläche $F^{(1)}_1$ durch die beiden Systeme der Erzeugungslinien, nämlich

die 2 . 12 Ikosaeder-Geraden g_0 (vgl. § 42 unter (16α), (16β)),

die 2 . 20 Pentagondodekaeder-Geraden c_0 („ „ (19 a), (19 b))

und die 2 . 30 Dodeka-Ikosaeder-Geraden b_0 („ „ (21 a), (21 b))

entsteht, ist aus den in (51) angegebenen Formen für die Gleichung der Fläche $F^{(1)}_1$ sehr einfach zu bestätigen.

Auf jeder der neun reellen Fundamentalflächen $F^{(1)}_2 .. F^{(1)}_{10}$ sind von den 2 . 12 Ikosaeder-Geraden 2 . 4 reell, nämlich 2 . 4 Gerade $g^{(b)} = b^{(g)}$, ebenso von den 2 . 12 Dodekaeder-Geraden 2 . 4, nämlich 2 . 4 Gerade $c^{(b)} = b^{(c)}$ und von den 2 . 30 Dodeka-Ikosaeder-Geraden 2 . 4, nämlich 2 . 4 Gerade $B = e$ reell. Z. B. für die Fläche

$$F_6{}^{(1)} \ . \ . \ . \ x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2 \equiv x_4{}^2+x_5{}^2+x_6{}^2 = 0$$

sind dies die 2 . 4 Geraden

$$g^{(b)} = b^{(g)} \ . \ . \ . \ \pm\cos\varphi \quad \pm i \ \sin\varphi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \text{und} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \pm\cos\varphi \quad \pm i \ \sin\varphi \ . \ . \ . \ (51\,\text{a})$$

(vgl. (23 d) in § 42),

die 2 . 4 Geraden $c^{(b)} = b^{(c)}$

$$\sin\psi \quad \pm i \quad \pm\cos\psi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \text{und} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sin\psi \quad \pm i \quad \pm\cos\psi \quad \text{(vgl. (24h))} \; \ldots \quad (51\text{b})$$

und die 2 . 4 Geraden $B = c$

$$\left.\begin{matrix} 1 & \pm i & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{und} & 0 & 0 & 0 & 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 1 & \pm i & 0 & 0 & 0 & \text{und} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pm i \end{matrix}\right\} \; \ldots\ldots \quad (51\text{c})$$

2) Je zwei der drei Complexe $C_1^{(2)}$ (vgl. (42) in § 44 und (51))

$$x_{2m+3} = 0, \quad x_{2m+11} = 0, \quad x_{2m+19} = 0 \quad (m = 2, 3, 4, 5)$$

erzeugen mit je einem der drei Complexe $C_1^{(2')}$

$$x_{2m+4} = 0, \quad x_{2m+12} = 0, \quad x_{2m+20} = 0$$

(oder je zwei der letzteren mit je einem der ersteren) eine reelle Fläche zweiten Grades, deren es im Ganzen 3 . 3 . 4 . 4 = 144 $F_{11}^{(1)} \ldots F_{154}^{(1)}$ giebt z.B.:

$$x_9{}^2 + x_{25}{}^2 + x_{18}{}^2 \equiv x_{10}{}^2 + {}_{26}{}^2 + x_{17}{}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52\text{a})$$

$$\text{oder} \ldots z_1{}^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_2{}^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_3{}^2 - \frac{1}{2} z_4{}^2 + \operatorname{tg}\varphi \,.\, z_3\, z_4 + \operatorname{cotg}\varphi \,.\, z_4\, z_2 + z_2\, z_3 = 0 \; \ldots \quad (52\text{b})$$

oder

$$\ldots -F_3{}^{(1)} \operatorname{tg}{}^2\varphi - F_4{}^{(1)} + (F_5{}^{(1)} - F_8{}^{(1)}) \operatorname{tg}\varphi + (F_6{}^{(1)} - F_9{}^{(1)}) \operatorname{cotg}\varphi + F_7{}^{(1)} - F_{10}{}^{(1)} = 0 \; .. \quad (52\text{c})$$

Auch auf diesen Flächen existiren, wie auf den neun reellen Flächen $F_2^{(1)} .. F_{10}^{(1)}$ unter den 2 . 12 Ikosaeder-, den 2 . 20 Dodekaeder- und den 2 . 30 Dodeka-Ikosaeder-Geraden bez. je 2 . 4 reelle Gerade $g^{(b)} = b^{(g)}$, $c^{(b)} = b^{(c)}$ und B; für das gewählte Beispiel sind die 2 . 4 reellen Geraden $g^{(b)} = b^{(g)}$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & 0 & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm i\cos\varphi & \frac{1}{2} & \mp i\sin\varphi & \text{und} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\cos\varphi & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \mp i\sin\varphi & \frac{1}{2} \\ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\sin\varphi & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \mp i\cos\varphi & \text{,,} & \pm i\sin\varphi & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & 0 & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \mp i\cos\varphi & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} (52\text{d})$$

(vgl. (23e) in § 42); die 2 . 4 reellen Geraden $c^{(b)} = b^{(c)}$ sind

$$\left.\begin{matrix} \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\sin\psi & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \mp i\cos\psi & \frac{1}{2} & 0 & \text{und} & \pm i\sin\psi & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \mp i\cos\psi & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm i\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \mp i\frac{1}{\sqrt{3}} & \text{und} & \pm i\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \mp i\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} (52\text{e})$$

(vgl. (24i) und (24g) in § 42); die 2 . 4 reellen Geraden B sind folgende:

$$\left.\begin{matrix} \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm i\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \mp\frac{i\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \text{und} & \pm\frac{i\operatorname{tg}\varphi}{2} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm\frac{i}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm\frac{i\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \mp\frac{i}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm\frac{i\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} & \pm\frac{i\operatorname{tg}\varphi}{2} & \text{,,} & \mp\frac{i}{2} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \pm\frac{i\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \pm\frac{i\operatorname{tg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} (52\text{f})$$

(vgl. ($8a_2$) in § 41).

3) Je zwei der drei Complexe $C_1^{(2)}$ (vgl. (42) in § 44 und (51))

$$x_{2m+3}=0,\quad x_{2m+11}=0,\quad x_{2m+19}=0\ (m=2,\,3,\,4,\,5)$$

erzeugen mit je einem der drei Complexe $C_1^{(1')}$

$$x_2=0,\quad x_4=0,\quad x_6=0$$

(oder je zwei der letzteren mit je einem der ersteren) und analog je zwei der drei Complexe $C_1^{(2')}$

$$x_{2m+4}=0,\quad x_{2m+12}=0,\quad x_{2m+20}=0$$

mit je einem der drei Complexe $C_1^{(1)}$

$$x_1=0,\quad x_3=0,\quad x_5=0$$

(oder je zwei der letzteren mit je einem der ersteren) eine reelle Fläche zweiten Grades, deren es im Ganzen $2.3.3.4=72$ $F_{155}^{(1)}\,..\,F_{226}^{(1)}$ giebt. Z.B.

$$x_7{}^2+x_{15}{}^2+x_2{}^2\equiv x_4{}^2+x_6{}^2+x_{23}{}^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53\text{a})$$

$$\text{oder}\ -\text{tg}\,\varphi\ (z_1{}^2+z_2{}^2-z_3{}^2-z_4{}^2)+2\,\text{cotg}\,\varphi\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+2\,(z_1\,z_4+z_2\,z_3)=0 \ \ldots \ (53\text{b})$$

$$\text{oder}\ -F_2{}^{(1)}\,\text{tg}\,\varphi+F_6{}^{(1)}\,\text{cotg}\,\varphi+F_{10}{}^{(1)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53\text{c})$$

Ebenso, wie auf den 9 Flächen $F_2^{(1)}\,..\,F_{10}^{(1)}$ und den 144 Flächen $F_{11}^{(1)}\,..\,F_{154}^{(1)}$ sind auch auf diesen 72 Flächen unter den 2 . 12 Ikosaeder-, den 2 . 20 Dodekaeder- und den 2 . 30 Dodeka-Ikosaeder-Geraden je 2 . 4 reelle Gerade $g^{(b)}=b^{(g)}$, $c^{(b)}=b^{(c)}$ und B vorhanden. Für das obige Beispiel sind dies:

$$g^{(b)}=b^{(g)}\ldots\left\{\begin{array}{l} -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \pm i\sin\varphi\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \mp i\cos\varphi\ \ \text{und}\ \ \cos\varphi\ \ \pm i\ \ \sin\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \mp i\cos\varphi\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \pm i\sin\varphi\ \ \text{"}\ \ 0\ \ \pm i\ \ \cos\varphi\ \ 0\ \ \sin\varphi\ \ 0 \end{array}\right\}(53\text{d})$$

$$c^{(b)}=b^{(c)}\ldots\left\{\begin{array}{l} -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \pm i\sin\psi\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \mp i\cos\psi\ \ \text{und}\ \ \cos\psi\ \ \pm i\ \ 0\ \ 0\ \ -\sin\psi\ \ 0 \\ -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \mp i\cos\psi\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \pm i\sin\psi\ \ \text{"}\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \pm i\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ 0 \end{array}\right\}(53\text{e})$$

$$B\ldots\left\{\begin{array}{l} -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \pm i\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \text{und}\ \ \frac{1}{2}\ \ \pm i\ \ \frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0 \\ -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\ \ -\frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \pm i\ \ \text{und}\ \ \frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ \pm i\ \ -\frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \ 0 \end{array}\right\}\ldots(53\text{f})$$

(vgl. (23e), (23d), (24i), (h), (f) in § 42 und ($8a_3$) in § 41).

Die 225 reellen Flächen $F_2^{(1)}\,..\,F_{226}^{(1)}$ sind also in einer solchen Lagenbeziehung, dass durch jede der 360 reellen Geraden $g^{(b)}=b^{(g)}$ je fünf,
" " " 600 " " $c^{(b)}=b^{(c)}$ je drei
und " " " 450 " " B je vier
dieser Flächen hindurchgehen.

Die durch die beiden Systeme der Erzeugungslinien dieser 225 Flächen bestimmten Schnittpunkte, welche auf jeder reellen oder imaginären Erzeugungslinie sich als 12 Ikosaeder-, als 20 Dodekaeder- und als 30 Dodeka-Ikosaeder-Punkte gruppiren, lassen sich, ebenso wie die entsprechenden Berührungsebenen leicht durch ihre Coordinaten darstellen. Auf den reellen Geraden B treten hierbei je zwei Punkte 𝔅, je zwei Punkte 𝔇 und je vier Punkte 𝔍 und 𝔎 auf, welche bereits früher (vergl. § 41 unter 3a)) berücksichtigt wurden.

II. 60 reelle (nicht geradlinige) Flächen $F^{(2)}$.

Dieselben werden durch je drei in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$ (vgl. § 44 unter (45g)) erzeugt. Es gehören zu ihnen:

1) 12 reelle Flächen $F_1^{(2)} \ldots F_{12}^{(2)}$, nämlich die Hälfte der 24 reellen Flächen $F^{(2)}$, welche bereits in § 7 unter 2) betrachtet wurden und welche zu je vieren eins der drei Fundamentaltetraeder T_1, T_2, T_3 als gemeinsames Polartetraeder haben.

Es ist z. B.:

$$\left.\begin{aligned} F_1^{(2)} \ldots (x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2+(x_5-x_6)^2 &\equiv (x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2+(x_5+x_6)^2 \\ &\equiv x_1 x_2+x_3 x_4+x_5 x_6 = 0 \\ \text{oder } -z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 &= 0 \\ \text{oder } -F_1^{(1)}+F_2^{(1)}+F_3^{(1)}+F_4^{(1)} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (54\text{a})$$

Die Gleichungen der 3 Quadrupel sind aus

$$\left.\begin{aligned} x_1 x_2 \pm x_3 x_4 \pm x_5 x_6 = 0 \\ x_1 x_4 \pm x_3 x_6 \pm x_5 x_2 = 0 \\ x_1 x_6 \pm x_3 x_2 \pm x_5 x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54\text{b})$$

zu entnehmen.

Die Erzeugenden beider Systeme dieser Flächen sind durchweg imaginär und ergeben sich aus den in § 7 2) unter (18ζ) und (18η) aufgestellten Coordinatenwerthen:

$$1 \quad -1 \quad \delta \quad -\delta \quad \pm i\sqrt{1+\delta^2} \quad \mp i\sqrt{1+\delta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54\text{c})$$

$$1 \quad 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \pm i\sqrt{1+\varepsilon^2} \quad \pm i\sqrt{1+\varepsilon^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54\text{d})$$

für bestimmte Werthe der Parameter δ und ε.[1])

So resultiren z. B. die 2 . 12 Ikosaeder-Geraden für die Werthe:

$$\delta,\ \varepsilon = \pm \operatorname{tg} \varphi,\ \pm \operatorname{cotg} \varphi,\ \pm i \sin \varphi,\ \pm \frac{i}{\sin \varphi},\ \pm i \cos \varphi,\ \pm \frac{i}{\cos \varphi};\ \ldots \quad (54\text{e})$$

[1]) ε bedeutet hier nicht, wie in § 42 Formel (15) ff., eine fünfte Einheitswurzel.

diese Geraden sind identisch mit den in § 43 betrachteten Geraden

$$| \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{g}_0 | = | \Lambda_6\, \chi'_0 |$$

(vgl. die ersten Formeln in (40d) und (40e)); die 2.(8 + 12) Dodekaeder-Geraden resultiren für die Werthe

$$\delta,\ \varepsilon = \pm\alpha,\ \pm\alpha^2 \text{ und } \pm\operatorname{tg}\psi,\ \pm\operatorname{cotg}\psi,\ \pm i\sin\psi,\ \pm\frac{i}{\sin\psi},\ \pm i\cos\psi,\ \pm\frac{i}{\cos\psi} \quad . . \quad (54f)$$

und erweisen sich als identisch mit den in § 43 betrachteten Geraden

$$| \mathfrak{P}_1\, \mathfrak{c}_0 | = | \Pi_4\, \gamma'_0 |$$

(vergl. (41e), (41l)); von den 2 . (6 + 24) Dodeka-Ikosaeder-Geraden, welche mit den in § 43 betrachteten Geraden

$$| \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{b}_0 | = | B_2\, \beta'_0 | \text{ und } | \mathfrak{D}_1\, \mathfrak{b}_0 | = | \Delta_2\, \beta'_0 |$$

(vgl. (35a), (35b), (37a), (37b), (39a), (39b)) identisch sind, entsprechen je 2 . 6 (welche früher (§ 3 in (11)) durch d bezeichnet wurden), den Parameterwerthen:

$$\delta,\ \varepsilon = 0,\ \infty,\ \pm i \quad \quad (54g)$$

Unter den Ikosaeder-, Dodekaeder-, Dodeka-Ikosaeder-Punkten einer Fläche $F^{(2)}$ sind hiernach je 12 Punkte $\mathfrak{g}_0$, je 12 Punkte $\mathfrak{c}_0$ und je 30 Punkte $\mathfrak{b}_0$ vorhanden, in welchen bez. die Geraden g_0, c_0 und b_0 die Fläche berühren, ferner 12 Punkte $\mathfrak{L}$, 20 Punkte $\mathfrak{P}$, 15 Punkte $\mathfrak{B}$ und 15 Punkte $\mathfrak{D}$ u. s. f.

2) Die übrigen 48 reellen Flächen $F^{(2)}$: $F^{(2)}_{13} \,..\, F^{(2)}_{60}$ werden durch je drei zu zweien in Involution liegende Complexe $C_{(2)}$ z. B.:

$$x_1 \pm x_8,\ x_3 \pm x_{16},\ x_5 \pm x_{24} \quad \text{oder} \quad x_2 \pm x_7,\ x_4 \pm x_{15},\ x_6 \pm x_{23},$$

wie sie in § 44 unter (45g) aufgeführt wurden, erzeugt.

So ist z. B.:

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 - x_{16})^2 + (x_3 - x_{24})^2 + (x_5 + x_8)^2 \equiv (x_1 + x_{16})^2 + (x_3 + x_{24})^2 + (x_5 - x_8)^2 \equiv \\ \equiv\ &(x_2 - x_{15})^2 + (x_4 - x_{23})^2 + (x_6 + x_7)^2 \equiv (x_2 + x_{15})^2 + (x_4 + x_{23})^2 + (x_6 - x_7)^2 \equiv \\ \equiv\ &x_1\, x_{16} + x_3\, x_{24} - x_5\, x_8 \equiv x_2\, x_{15} + x_4\, x_{23} - x_6\, x_7 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . . . \quad (54h)$$

oder

$$(x_1\, x_2 - x_3\, x_6 - x_5\, x_4)\operatorname{cotg}\varphi - (x_1\, x_4 + x_3\, x_2 + x_5\, x_6)\operatorname{tg}\varphi - (x_1\, x_6 - x_3\, x_4 + x_5\, x_2) = 0 \quad . . \quad (54i)$$

oder

$$z_1^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\, z_2^2 + \frac{1}{2}\, z_3^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\, z_4^2 - \operatorname{cotg}\varphi\; z_3\, z_4 - z_4\, z_2 - \operatorname{tg}\varphi\; z_2\, z_3 = 0 \quad \quad (54k)$$

Die sämmtlichen 48 Flächen ergeben sich aus:

$$\left.\begin{aligned} (x_1 \pm x_{2m+4})^2 + (x_3 \pm x_{2m+12})^2 + (x_5 \pm x_{2m+20})^2 &\equiv (x_2 \pm x_{2m+3})^2 + (x_4 \pm x_{2m+11})^2 + (x_6 \pm x_{2m+19})^2 = 0 \\ (x_1 \pm x_{2m+12})^2 + (x_3 \pm x_{2m+20})^2 + (x_5 \pm x_{2m+4})^2 &\equiv (x_2 \pm x_{2m+11})^2 + (x_4 \pm x_{2m+19})^2 + (x_6 \pm x_{2m+3})^2 = 0 \\ (x_1 \pm x_{2m+20})^2 + (x_3 \pm x_{2m+4})^2 + (x_5 \pm x_{2m+8})^2 &\equiv (x_2 \pm x_{2m+19})^2 + (x_4 \pm x_{2m+3})^2 + (x_6 \pm x_{2m+11})^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (54l)$$

$$m = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Hinsichtlich der beiden Systeme von Erzeugungslinien u. s. w. gilt das unter 1) Gesagte. Von den 1440 Geraden $|\mathfrak{L}\mathfrak{g}_0| = |\Lambda\chi'_0|$ (vergl. § 43 unter (40d) und (40e)) treten auf jeder der 60 Flächen $F^{(2)}$ 2 . 12 als Ikosaeder-Gerade, von den 2400 Geraden $|\mathfrak{P}\mathfrak{c}_0| = |\Pi\gamma'_0|$ (vgl. § 43 unter (41)) 2 . 20 Dodekaeder-Gerade und von den 3600 Geraden, welche sich aus den 1800 Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0| = |B\beta'_0|$ und den 1800 Geraden $|\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0| = |\Delta\beta'_0|$ (vgl. § 43 unter (35) und (37)) zusammensetzen, 2 . 30 als Dodeka-Ikosaeder-Gerade auf.

III. Einige weitere Gruppen von Flächen zweiten Grades.

Von den zahlreichen Flächen zweiten Grades, welche im Folgenden in bestimmten Flächenbüscheln, Flächennetzen, oder als Kernflächen bei Correlationen auftreten, mögen noch die wichtigsten kurz charakterisirt werden. Die erzeugenden linearen Complexe sind in Verbindung mit den 6 Fundamentalcomplexen $C_1^{(1)}$, $C_1^{(1')}$ diejenigen 4 . 12 linearen Complexe $C_{(2)}$, welche in § 44 unter (43b), (44b) und (50d), (50e) aufgeführt wurden. Die 4 . 12 linearen Complexe $C_{(2)}$ mögen hierbei in folgender Weise übersichtlich angeordnet und bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} x_1 \sin\varphi \pm x_3 \cos\varphi = 0 \\ x_3 \sin\varphi \pm x_5 \cos\varphi = 0 \\ x_5 \sin\varphi \pm x_1 \cos\varphi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\alpha_1)} \quad
\left.\begin{array}{l} x_2 \sin\varphi \pm x_4 \cos\varphi = 0 \\ x_4 \sin\varphi \pm x_6 \cos\varphi = 0 \\ x_6 \sin\varphi \pm x_2 \cos\varphi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\alpha'_1)} \\
\left.\begin{array}{l} x_1 \cos\varphi \pm x_3 \sin\varphi = 0 \\ x_3 \cos\varphi \pm x_5 \sin\varphi = 0 \\ x_5 \cos\varphi \pm x_1 \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\alpha_2)} \quad
\left.\begin{array}{l} x_2 \cos\varphi \pm x_4 \sin\varphi = 0 \\ x_4 \cos\varphi \pm x_6 \sin\varphi = 0 \\ x_6 \cos\varphi \pm x_2 \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\alpha'_2)}
\end{array}\right\} (55\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} x_1 \cos\psi \pm x_3 \sin\psi = 0 \\ x_3 \cos\psi \pm x_5 \sin\psi = 0 \\ x_5 \cos\psi \pm x_1 \sin\psi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\beta_1)} \quad
\left.\begin{array}{l} x_2 \cos\psi \pm x_4 \sin\psi = 0 \\ x_4 \cos\psi \pm x_6 \sin\psi = 0 \\ x_6 \cos\psi \pm x_2 \sin\psi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\beta'_1)} \\
\left.\begin{array}{l} x_1 \sin\psi \pm x_3 \cos\psi = 0 \\ x_3 \sin\psi \pm x_5 \cos\psi = 0 \\ x_5 \sin\psi \pm x_1 \cos\psi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\beta_2)} \quad
\left.\begin{array}{l} x_2 \sin\psi \pm x_4 \cos\psi = 0 \\ x_4 \sin\psi \pm x_6 \cos\psi = 0 \\ x_6 \sin\psi \pm x_2 \cos\psi = 0 \end{array}\right\} C_{(2)}^{(\beta'_2)}
\end{array}\right\} (55\beta).$$

1) Je ein Complex $C_{(2)}^{(\alpha_1)}$, ein Complex $C_{(2)}^{(\alpha'_2)}$ und ein Complex $x_i = 0$ oder $x_k = 0$ wobei i und k einen der beiden in $C_2^{(\alpha_1)}$ und $C_2^{(\alpha'_2)}$ noch nicht aufgetretenen Indices bezeichnet, oder je ein Complex $C_{(2)}^{(\alpha_2)}$, ein Complex $C_{(2)}^{(\alpha'_1)}$ und ein Complex $x_k = 0$ oder $x_i = 0$ erzeugen eine Fläche $F^{(a)}$ zweiten Grades, deren es im Ganzen 6 . 6 . 2 = 72 giebt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Z. B. } (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi)^2 + x_5^2 = 0 \\ \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{oder } \sqrt{5}\ (z_1^2 - z_4^2) + (z_2^2 - z_3^2 - 4\, z_2 z_3) = 0 \\ \text{oder } F_2^{(1)} \operatorname{cotg}\varphi + F_3^{(1)} \operatorname{tg}\varphi - (F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (55\,\mathrm{a})$$

Zu den Erzeugenden dieser Flächen $F^{(a)}$ gehören zwei Geradenpaare g_0 (für das gewählte Beispiel: $0\ \sin\varphi\ 0\ \cos\varphi\ 0\ \pm i$ und $\sin\varphi\ 0\ \cos\varphi\ 0\ \pm i\ 0$), welche ein windschiefes Vierseit mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{g}_0$ bestimmen, dessen drittes (der Fläche nicht angehörendes) Geradenpaar durch zwei reelle Gerade G (im Beispiel: $\cos\varphi\ \ \pm i\cos\varphi\ \ -\sin\varphi\ \ \mp\sin\varphi\ \ 0\ \ 0$) gebildet ist. Dagegen gehören zwei andere reelle Geradenpaare G (im Beispiel:

$$\sin\varphi\ \ \pm i\cos\varphi\ \ \cos\varphi\ \ \mp i\sin\varphi\ \ 0\ \ 0 \text{ und } \cos\varphi\ \ \pm i\sin\varphi\ \ -\sin\varphi\ \ \pm i\cos\varphi\ \ 0\ \ 0)$$

der Fläche als Erzeugende an.

2) Je ein Complex $C^{(\alpha_1)}_{(2)}$ (oder $C^{(\alpha'_1)}_{(2)}$) und je zwei Complexe $x_i = 0$, $x_k = 0$, wobei i und k zwei der übrigen vier Indices bezeichnen, oder je ein Complex $C^{(\alpha_2)}_{(2)}$ (oder $C^{(\alpha'_2)}_{(2)}$) und je zwei Complexe $x_{i_1} = 0$, $x_{k_1} = 0$ erzeugen eine Fläche $F^{(b)}$ zweiten Grades, deren es im Ganzen $6 \,.\, 6 \,.\, 2 = 72$ giebt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Z. B.: } (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + x_2^2 + x_5^2 \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{oder } (z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2) \cos\varphi - 2\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) \sin\varphi = 0 \\ \text{oder } F_2^{(1)} \cos\varphi - F_{10}^{(1)} \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} (55\,\mathrm{b}_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + x_4^2 + x_5^2 \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + x_2^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{oder } (z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2) \sin\varphi + 2\,(z_1 z_4 - z_2 z_3) \cos\varphi = 0 \\ \text{oder } F_3^{(1)} \sin\varphi + F_7^{(1)} \cos\varphi = 0 \end{array}\right\} (55\,\mathrm{b}_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + x_5^2 + x_6^2 \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0 \\ \text{oder } 2\,(z_1 z_2 - z_3 z_4) \sin\varphi + 2\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) \cos\varphi = 0 \\ \text{oder } F_5^{(1)} \sin\varphi + F_9^{(1)} \cos\varphi = 0. \end{array}\right\} (55\,\mathrm{b}_3)$$

Je drei Flächen $F^{(b)}$, wie (55 b₁), (55 b₂), (55 b₃) gehen durch dieselben vier imaginären Punkte $\mathfrak{g}^{(\mathfrak{b})}_0 = \mathfrak{b}^{(\mathfrak{g})}_0$ hindurch; die erstere (55 b₁) enthält die beiden Geradenpaare g_0 und b_0 dieses Vierecks

$$(\sin\varphi\ \ 0\ \ \cos\varphi\ \ 0\ \ \pm i\ \ 0 \text{ und } 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \pm i),$$

die zweite und dritte (55 b₁) und (55 b₂) das Geradenpaar g_0 und das dritte (reelle) Geradenpaar $g^{(b)} = b^{(g)}$ ($\cos\varphi\ \ \pm i\ \ -\sin\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ 0$) als Erzeugende. Weitere Erzeugende dieser Flächen lassen sich aus den aufgestellten Formen der Gleichungen leicht entnehmen.

3) Je ein Complex $C^{(\beta_1)}_{(2)}$ (oder $C^{(\beta'_1)}_{(2)}$) und je zwei Complexe $x_i = 0$, $x_k = 0$ oder je ein Complex $C^{(\beta_2)}_{(2)}$ (oder $C^{(\beta'_2)}_{(2)}$) und je zwei Complexe $x_{i'} = 0$,

$x_{k'} = 0$ erzeugen eine Fläche $F^{(c)}$, deren es im Ganzen ebenfalls 6 . 6 . 2 = 72 giebt. Z. B.:

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{oder } &(z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2) \cos\psi + 2\,(z_1 z_3 - z_4 z_2) \sin\psi = 0 \\ \text{oder } &F_2^{(1)} \cos\psi + F_6^{(1)} \sin\psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (55\mathrm{c}_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{und } &(x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_3^2 + x_6^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0 \\ \text{oder } &(z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2) \sin\psi - 2\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) \cos\psi = 0 \\ \text{oder } &F_4^{(1)} \sin\psi - F_9^{(1)} \cos\psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (55\mathrm{c}_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{und } &(x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_2^2 + x_6^2 = 0 \\ \text{oder } &2\,(z_1 z_2 + z_3 z_4) \sin\psi + 2\,(z_1 z_4 - z_2 z_3) \cos\psi = 0 \\ \text{oder } &F_8^{(1)} \sin\psi + F_7^{(1)} \cos\psi = 0. \end{aligned}\right\} \quad (55\mathrm{c}_3)$$

Je drei Flächen $F^{(c)}$, wie $(55\mathrm{c}_1)$, $(55\mathrm{c}_2)$, $(55\mathrm{c}_3)$ gehen durch dieselben vier imaginären Punkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ hindurch; die beiden Geradenpaare c_0 und b_0 dieses Vierecks ($\sin\psi$ 0 $\pm i$ 0 $\cos\psi$ 0 und 0 0 0 1 0 $\pm i$) sind Erzeugende der ersten Fläche $(55\mathrm{c}_1)$, das Geradenpaar c_0 und das dritte (reelle) Geradenpaar $c^{(b)} = b^{(c)}$ ($\cos\psi$ $\pm i$ 0 0 $\sin\psi$ 0) sind Erzeugende der beiden Flächen $(55\mathrm{c}_2)$ und $(55\mathrm{c}_3)$. Weitere Erzeugende dieser Flächen können aus den gegebenen Gleichungen leicht entnommen werden.

4) Ferner wird durch je einen Complex $C_{(2)}^{(\alpha_1)}$ (oder $C_{(2)}^{(\alpha'_1)}$), einen Complex $C_2^{(\beta'_2)}$ (oder $C_{(2)}^{(\beta_2)}$) und einen Complex $x_i = 0$ oder $x_k = 0$, wo wiederum i und k einen der beiden in $C_{(2)}^{(\alpha_1)}$ und $C_2^{(\beta_2')}$ nicht vorkommenden Indices bedeutet, oder durch je einen Complex $C_{(2)}^{(\alpha_2)}$ (oder $C_{(2)}^{(\alpha'_2)}$), einen Complex $C_{(2)}^{(\beta_1')}$ (oder $C_{(2)}^{(\beta_1)}$) und einen Complex $x_k = 0$ oder $x_i = 0$ eine Fläche $F^{(d)}$ zweiten Grades erzeugt, deren es im Ganzen 6 . 6 . 2 . 2 = 144 giebt. Z. B.:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &(x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \sin\psi - x_4 \cos\psi)^2 + x_5^2 \\ \equiv\; &(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \cos\psi + x_4 \sin\varphi)^2 + x_6^2 \end{aligned}\right\} = 0 \\ \text{oder } &(z_1^2 - z_4^2)\,\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\varphi} - (z_2^2 - z_3^2)\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} + \frac{4}{\cos\varphi}\, z_1 z_4 - \frac{4}{\sin\varphi}\, z_2 z_3 = 0 \\ \text{oder } &(F_2^{(1)} + F_7^{(1)} + F_{10}^{(1)}) \sin\varphi + (F_3^{(1)} + F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) \cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad (55\mathrm{d})$$

Zu den Erzeugenden dieser Flächen gehört ein Geradenpaar g_0 (im Beispiel: $\sin\varphi$ 0 $\cos\varphi$ 0 $\pm i$ 0) und ein Geradenpaar c_0 (im Beispiel: 0 $\cos\psi$ 0 $\sin\psi$ 0 $\pm i$), welche ein windschiefes Vierseit mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$ bestimmen, dessen drittes Geradenpaar durch zwei reelle Gerade $g^{(c)} = c^{(g)}$ (im Beispiel: $\cos\varphi$ $\pm i \sin\psi$ $-\sin\varphi$ $\mp i \cos\psi$ 0 0) gebildet ist. Andere Erzeugende dieser Flächen ergeben sich leicht aus den aufgestellten Gleichungen.

5) Endlich wird durch je einen Complex $C^{(\beta_1)}_{(2)}$, einen Complex $C^{(\beta'_2)}_{(2)}$ und einen Complex $x_i = 0$ oder $x_k = 0$ oder durch je einen Complex $C^{(\beta_2)}_{(2)}$, einen Complex $C^{(\beta'_1)}_{(2)}$ und einen Complex $x_k = 0$ oder $x_i = 0$ eine Fläche $F^{(e)}$ zweiten Grades erzeugt, deren es im Ganzen $6 \,.\, 6 \,.\, 2 = 72$ giebt. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} & (x_1 \cos\psi + x_5 \sin\psi)^2 + (x_2 \sin\psi + x_6 \cos\psi)^2 + x_4{}^2 \equiv \\ & \quad \equiv (x_1 \sin\psi - x_5 \cos\psi)^2 + (x_2 \cos\psi - x_6 \sin\psi)^2 + x_3{}^2 = 0 \\ \text{oder} & (z_1{}^2 - z_3{}^2) \cos 2\psi + (z_2{}^2 - z_4{}^2) - 2\, z_1\, z_3 \sin 2\psi = 0 \\ & \quad \left(\text{wobei } \sin 2\psi = \frac{2}{3},\ \cos 2\psi = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ist}\right) \\ \text{oder} & F_2{}^{(1)} \operatorname{cotg}{}^2\varphi - F_4{}^{(1)} \operatorname{tg}{}^2\varphi - (F_6{}^{(1)} + F_9{}^{(1)}) = 0. \end{array}\right\} \quad (55\,e)$$

Zu den Erzeugenden dieser Flächen $F^{(e)}$ gehören zwei Geradenpaare c_0 (im Beispiel: $\sin\psi \;\; 0 \;\; \pm i \;\; 0 \;\; -\cos\psi \;\; 0$ und $0 \;\; \sin\psi \,.\, 0 \;\; \pm i \;\; 0 \;\; \cos\psi$), welche ein windschiefes Vierseit mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{c}_0$ bestimmen, dessen drittes Geradenpaar durch zwei reelle Gerade C (im Beispiel $\cos\psi \;\; \pm i\cos\psi \;\; 0 \;\; 0 \;\; \sin\psi \;\; \mp i \sin\psi$) gebildet ist. Diese Flächen $F^{(e)}$ sind den 32 reellen Flächen $F^{(8)}$ (vgl. § 7 unter 8)) analog. Entsprechend können durch je einen Complex $C^{(\beta_1)}_{2}$ (oder $C^{(\beta_2)}_{2}$), einen Complex $C_{(3)}$ (vergl. (14γ) in § 6) und einen Complex $x_i = 0$ im Ganzen $12 \,.\, 4 \,.\, 2 = 96$ reelle Flächen $F^{(e_1)}$ erzeugt werden, z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} & (x_1 \cos\psi + x_3 \sin\psi)^2 + x_5{}^2 + \frac{1}{3}\,(x_2 + x_4 - x_6)^2 \equiv \\ & 2\,(x_1 \sin\psi - x_3 \cos\psi)^2 + (x_2 - x_4)^2 + \frac{1}{3}\,(x_2 + x_4 + 2\,x_6)^2 = 0 \\ \text{oder} & \left.\begin{array}{l} z_1 - \sqrt{5}\,(z_2{}^2 - z_3{}^2) - z_4{}^2 + 2 \operatorname{cotg}\varphi\, (z_1\, z_2 - z_3\, z_4) \\ + 2 \operatorname{tg}\varphi\, (z_1\, z_3 + z_4\, z_2) + 2\sqrt{5}\, z_1\, z_4 + 2\, z_2\, z_3 \end{array}\right\} = 0. \end{array}\right\} \quad (55\,e_1)$$

Zu den Erzeugenden dieser Flächen $F^{(e_1)}$ gehört je ein Geradenpaar $c_0{}'$ und $c_0{}''$ (im Beispiel:

$$\left.\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & -\alpha \end{array}\right\} c_0{}'$$

$$\text{und } \cos\psi \quad 0 \quad \sin\psi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \,.\,.\, c_0{}'').$$

6) Schliesslich mögen noch zwei Gruppen von Flächen zweiten Grades aufgeführt werden, welche bei bestimmten uneigentlichen Correlationen im Folgenden zu berücksichtigen sind.

f) Die erste Gruppe von Flächen $F^{(f)}$ ist analog, wie die der Flächen $F^{(9)}$ (vgl. § 7 unter 9)) dadurch charakterisirt, dass jede derselben mit je einer Fläche $F^{(2)}$ (vgl. unter II) dieses §) ein windschiefes Vierseit mit je zwei Geradenpaaren $|\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{c}_0 \,| = |\, \Pi\, \gamma'_0 \,|$, dessen Eckpunkte zwei reelle Punkte

$\mathfrak{P}$ und zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{c}_0$ sind, während das Diagonalenpaar durch zwei reelle Gerade C gebildet wird, gemeinsam hat.

Z. B. die Fläche

$$\left.\begin{array}{ll} F^{(f)} \ldots & (x_1 x_2 + x_5 x_6) \cos 2\psi + (x_2 x_5 - x_1 x_6) \sin 2\psi - x_3 x_4 = 0 \\ \text{oder} & (z_1^2 - z_3^2) \cos 2\psi + z_2^2 + z_4^2 - 2 z_1 z_3 \sin 2\psi = 0 \\ \text{oder} & (F_1^{(1)} - F_3^{(1)}) + (F_2^{(1)} + F_4^{(1)}) \cos 2\psi - (F_6 + F_9) \sin 2\psi = 0 \end{array}\right\} \quad (55\text{f})$$

hat mit der Fläche $F^{(2)}$:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0$$

die beiden Geradenpaare $| \mathfrak{P}\, \mathfrak{c}_0 \,|\, \Pi \gamma'_0 |$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \sin\psi & \sin\psi & \pm i & \pm i & -\cos\psi & \cos\psi \\ \sin\psi & -\sin\psi & \mp i & \pm i & -\cos\psi & -\cos\psi \end{array}\right\}, \quad (55\text{f}_1)$$

sowie die Punkte $\mathfrak{P} \ldots \sin\psi \quad 0 \quad \cos\psi \quad \pm 1$ und die Punkte

$$\mathfrak{c}_0 \ldots \cos\psi \quad \pm i \quad -\sin\psi \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55\text{f}_2)$$

gemein; das Diagonalenpaar sind die beiden Geraden

$$C \ldots \cos\psi \quad \pm i \cos\psi \quad 0 \quad 0 \quad \sin\psi \quad \mp i \sin\psi \quad \ldots\ldots \quad (55\text{f}_3)$$

(Vgl. (41l), (41k) in § 43, (18b_1) in § 42 und (8b_2) in § 41).

g) Jede Fläche $F^{(g)}$ der zweiten Gruppe hat mit je einer Fläche $F^{(2)}$ ein windschiefes Vierseit mit je zwei Geradenpaaren $| \mathfrak{L}\, \mathfrak{g}_0 | = | \Lambda \chi'_0 |$, dessen Eckpunkte zwei reelle Punkte $\mathfrak{L}$ und zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{g}_0$ sind, während das Diagonalenpaar durch zwei reelle Gerade G gebildet ist, gemein. Z. B. die Fläche $F^{(g)}$:

$$\left.\begin{array}{ll} & (x_1 x_2 - x_3 x_4) \cos 2\varphi - (x_1 x_4 + x_2 x_3) \sin 2\varphi + x_5 x_6 = 0 \\ \text{oder} & z_1^2 + z_4^2 + (z_2^2 - z_3^2) \cos 2\varphi - 2 z_2 z_3 \sin 2\varphi = 0 \\ \text{oder} & (F_1^{(1)} + F_4^{(1)}) \cos\varphi + (F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} \quad (55\text{g})$$

hat mit der Fläche $F^{(2)}$:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_5 - x_6)^2 = 0 \text{ oder } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0$$

die beiden Geradenpaare $| \mathfrak{L}\, \mathfrak{g}_0 | = | \Lambda \chi'_0 |$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi & \pm i & \mp i \\ \sin\varphi & -\sin\varphi & \cos\varphi & -\cos\varphi & \pm i & \mp i \end{array}\right\}, \quad (55\text{g}_1)$$

sowie die Punkte $\mathfrak{L} \ldots 0 \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi \quad \pm 1$ und die Punkte

$$\mathfrak{g}_0 \ldots \pm i \quad -\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55\text{g}_2)$$

gemein; das Diagonalenpaar sind die beiden Geraden

$$G \ldots \cos\varphi \quad \pm i \cos\varphi \quad -\sin\varphi \quad \mp i \sin\varphi \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad (55\text{g}_3)$$

(vgl. (40d), (40e) in § 43, (14a) in § 42 und (8c) in § 41).

Auf weitere Flächen zweiten Grades, welche z. B. als Kernflächen bei gewissen Correlationen im Folgenden auftreten, sowie ferner auf die

Büschel und Netze der linearen Complexe und endlich auf die Complexe zweiten Grades Ω, Ω', Ω'' (vergl. im ersten Haupttheile § 8) wird bei den bezüglichen Transformationen, für welche dieselben in Betracht kommen, eingegangen werden.

§ 43.

Uebersicht der linearen Transformationen der Cf. (60_{15}, 72_5).

Die sämmtlichen, durchweg reellen Substitutionen, durch welche die Cf. (60_{15}, 72_5) in sich übergeführt wird, ergeben sich einmal in tetraedrischen Coordinaten z_i (ζ_i), welche sich auf das Fundamentaltetraeder T_1 beziehen, dadurch dass man (vergl. § 10 (79γ) und ($79\gamma'$)) die 12 positiven Permutationen von

$$[l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4]_p \quad \text{oder} \quad \underline{\overline{[l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4]}}_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56\alpha)$$

bez. von $\overline{[l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4]}_p$ oder $\underline{[l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4]}_p$ (56β)

bildet, wo l_1, l_2, l_3, l_4 die in der Reihenfolge, wie sie in (1) (§ 41) angegeben wurde, genommenen Coordinaten der Eckpunkte $\mathfrak{B}$ (Flächen B) eines Tetraeders T_p ($p = 1, 2, \ldots 75$) bedeuten. Die positiven Vorzeichen-Combinationen (für welche die Determinante $\Delta = +1$ ist) liefern alsdann 12.4.75 = 3600 eigentliche, die negativen (für welche die Determinante $\Delta = -1$ ist) ebensoviele uneigentliche Collineationen: die Gesammtzahl der Collineationen beträgt also 7200. Gleiches gilt für die Correlationen, deren es 3600 eigentliche und ebensoviele uneigentliche giebt.

Zweitens lassen sich diese Substitutionen in x_i-Coordinaten einfach durch die in bestimmter Reihenfolge genommenen und mit bestimmten Vorzeichen-Combinationen versehenen linken Theile der Gleichungen der 30 linearen Complexe $C_{(1)}$ (Formel (42) in § 44) darstellen. Und zwar treten nur diejenigen Substitutionen auf, bei welchen x'_1, x'_3, x'_5 oder x'_2, x'_4, x'_6 durch die in bestimmter Reihenfolge genommenen und mit bestimmten Vorzeichen-Combinationen versehenen linken Theile der Gleichungen der Complexe $C_{(1)}$ mit ungeraden Indices und ebenso x'_2, x'_4, x'_6 oder x'_1, x'_3, x'_5 durch ebensolche bestimmte linke Theile der Gleichungen der Complexe $C_{(2)}$ mit geraden Indices ersetzt werden.

In der folgenden Zusammenstellung (57) sind diese „erzeugenden Substitutionen“ $J^{(1)}$, $J^{(2)}$; $B_1^{(1)}$, $B_1^{(2)}$, $B_2^{(1)}$, $B_2^{(2)}$; $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)}$; $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$,

$G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ nebst den die Zähligkeit bestimmenden Wurzelwerthen für σ angegeben; die Nebeneinanderstellung $\pm x_{2p+1} \pm x_{2q+1} \pm x_{2r+1}$ bedeutet die Substitution:

$$\mathfrak{S}^{(1)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} x_1' = \pm x_{2p+1} \\ x_3' = \pm x_{2q+1} \\ x_5' = \pm x_{2r+1} \end{array} \right. \quad \text{oder } \mathfrak{S}^{(2')} \ldots \left\{ \begin{array}{l} x_2' = \pm x_{2p+1} \\ x_4' = \pm x_{2q+1} \\ x_6' = \pm x_{2r+1} \end{array} \right\} \quad (57\alpha)$$

und analog die Nebeneinanderstellung $\pm x_{2q} \pm x_{2p} \pm x_{2r}$ die Substitution:

$$\mathfrak{S}^{(2)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} x_2' = \pm x_{2p} \\ x_4' = \pm x_{2q} \\ x_6' = \pm x_{2r} \end{array} \right. \quad \text{oder } \mathfrak{S}^{(1')} \ldots \left\{ \begin{array}{l} x_1' = \pm x_{2p} \\ x_3' = \pm x_{2q} \\ x_5' = \pm x_{2r} \end{array} \right\} \quad (57\beta)$$

$$J^{(1)} \ldots x_1\, x_3\, x_5 \qquad J^{(2)} \ldots x_2\, x_4\, x_6 \quad (\sigma = 1,\, 1,\, 1) \quad \ldots\ldots \quad (57\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l}
B_1^{(1)} \ldots \left\{ \begin{array}{rrr} x_1 & -x_3 & -x_5 \\ -x_1 & x_3 & -x_5 \\ -x_1 & -x_3 & x_5 \end{array} \right\} \quad B_1^{(2)} \ldots \left\{ \begin{array}{rrr} x_2 & -x_4 & -x_6 \\ -x_2 & x_4 & -x_6 \\ -x_2 & -x_4 & x_6 \end{array} \right\} \\[2ex]
B_2^{(1)} \ldots \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} -x_7 & -x_{15} & x_{23}; & -x_{15} & -x_{23} & x_7; & -x_{23} & -x_7 & x_{15} \\ -x_9 & x_{17} & -x_{25}; & -x_{17} & x_{25} & -x_9; & -x_{25} & x_9 & -x_{17} \\ x_{11} & -x_{19} & -x_{27}; & x_{19} & -x_{27} & -x_{11}; & x_{27} & -x_{11} & -x_{19} \\ x_{13} & x_{21} & x_{29}; & x_{21} & x_{29} & x_{13}; & x_{29} & x_{13} & x_{21} \end{array} \right. \\[2ex]
B_2^{(2)} \ldots \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} -x_8 & -x_{16} & x_{24}; & -x_{16} & -x_{24} & x_8; & -x_{24} & -x_8 & x_{16} \\ -x_{10} & x_{18} & -x_{26}; & -x_{18} & x_{26} & -x_{10}; & -x_{26} & x_{10} & -x_{18} \\ x_{12} & -x_{20} & -x_{28}; & x_{20} & -x_{28} & -x_{12}; & x_{28} & -x_{12} & -x_{20} \\ x_{14} & x_{22} & x_{30}; & x_{22} & x_{30} & x_{14}; & x_{30} & x_{14} & x_{22} \end{array} \right.
\end{array}\right\} \quad (\sigma = 1,\, -1,\, -1) \quad (57\delta)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{l|l}
Sc_1\,(\sigma = 1, \alpha, \alpha^2) & S^2c_1\,(\sigma = 1, \alpha^2, \alpha) \\ \hline
\end{array} \qquad \begin{array}{l|l}
Sc_1\,(\sigma = 1, \alpha, \alpha^2) & S^2c_1(\sigma = 1, \alpha^2, \alpha) \\ \hline
\end{array} \\
C_1^{(1)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} x_3 & x_5 & x_1 & x_5 & x_1 & x_3 \\ x_3 & -x_5 & -x_1 & -x_5 & x_1 & -x_3 \\ -x_3 & x_5 & -x_1 & -x_5 & -x_1 & x_3 \\ -x_3 & -x_5 & x_1 & x_5 & -x_1 & -x_3 \end{array} \right. \quad C_1^{(2)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} x_4 & x_6 & x_2 & x_6 & x_2 & x_4 \\ x_4 & -x_6 & -x_2 & -x_6 & x_2 & -x_4 \\ -x_4 & x_6 & -x_2 & -x_6 & -x_2 & x_4 \\ -x_4 & -x_6 & x_2 & x_6 & -x_2 & -x_4 \end{array} \right. \\[2ex]
C_2^{(1)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} -x_7 & x_{15} & -x_{23} & -x_9 & -x_{17} & x_{25} \\ x_{15} & -x_{23} & -x_7 & -x_{19} & -x_{27} & x_{11} \\ x_{23} & x_7 & x_{15} & -x_{29} & -x_{13} & x_{21} \\ x_{11} & x_{19} & x_{27} & x_{13} & -x_{21} & -x_{29} \\ x_{17} & x_{25} & x_9 & -x_{21} & x_{29} & -x_{13} \\ x_{25} & -x_9 & -x_{17} & -x_{27} & x_{11} & -x_{19} \end{array} \right. \quad C_2^{(2)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} -x_8 & x_{16} & -x_{24} & -x_{10} & -x_{18} & x_{26} \\ x_{16} & -x_{24} & -x_8 & -x_{20} & -x_{28} & x_{12} \\ x_{24} & x_8 & x_{16} & -x_{30} & -x_{14} & x_{22} \\ x_{12} & x_{20} & x_{28} & x_{14} & -x_{22} & -x_{30} \\ x_{18} & x_{26} & x_{10} & -x_{22} & x_{30} & -x_{14} \\ x_{26} & -x_{10} & -x_{18} & -x_{28} & x_{12} & -x_{20} \end{array} \right.
\end{array}\right\} \quad (57\varepsilon)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{l|l}
Sg_1\,(\sigma = 1, \varepsilon, \varepsilon^4) & S^4g_1\,(\sigma = 1, \varepsilon^4, \varepsilon) \\ \hline
\end{array} \qquad \begin{array}{l|l}
S^2g_1\,(\sigma = 1, \varepsilon^2, \varepsilon^3) & S^3g_1(\sigma = 1, \varepsilon^3, \varepsilon^2) \\ \hline
\end{array} \\
G_1^{(1)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} x_7 & -x_{15} & -x_{23} & -x_{11} & -x_{19} & x_{27} \\ x_9 & x_{17} & x_{25} & -x_{13} & x_{21} & -x_{29} \\ x_{15} & x_{23} & x_7 & -x_{21} & -x_{29} & x_{13} \\ x_{17} & -x_{25} & -x_9 & -x_{19} & x_{27} & -x_{11} \\ -x_{23} & x_7 & -x_{15} & -x_{25} & -x_9 & x_{17} \\ x_{27} & x_{11} & x_{19} & x_{29} & -x_{13} & -x_{21} \end{array} \right. \quad G_2^{(1)} \left\{ \begin{array}{rrr|rrr} -x_{29} & x_{13} & -x_{21} & x_{25} & x_9 & x_{17} \\ -x_{27} & -x_{11} & x_{19} & x_{23} & -x_7 & -x_{15} \\ x_9 & -x_{17} & -x_{25} & -x_{11} & x_{19} & -x_{27} \\ x_7 & x_{15} & x_{23} & -x_{13} & -x_{21} & x_{29} \\ x_{19} & x_{27} & x_{11} & x_{21} & -x_{29} & -x_{13} \\ -x_{15} & x_{23} & -x_7 & -x_{17} & -x_{25} & x_9 \end{array} \right.
\end{array}\right\} \quad (57\zeta)$$

$$G_1^{(2)}\left\{\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{Sg_1\,(\sigma=1,\varepsilon,\varepsilon^4)} & \multicolumn{3}{c}{S^4g_1\,(\sigma=1,\varepsilon^4,\varepsilon)} \\ \hline x_8 & -x_{16} & -x_{24} & -x_{12} & -x_{20} & x_{28} \\ x_{10} & x_{18} & x_{26} & -x_{14} & x_{22} & -x_{30} \\ x_{16} & x_{24} & x_8 & -x_{22} & -x_{30} & x_{14} \\ x_{18} & -x_{26} & -x_{10} & -x_{20} & x_{28} & -x_{12} \\ -x_{24} & x_8 & -x_{16} & -x_{26} & -x_{10} & x_{18} \\ x_{28} & x_{12} & x_{20} & x_{30} & -x_{14} & -x_{22} \end{array}\right. \qquad G_2^{(2)}\left\{\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{S^2g_1\,(\sigma=1,\varepsilon^2,\varepsilon^3)} & \multicolumn{3}{c}{S^3g_1\,(\sigma=1,\varepsilon^3,\varepsilon^2)} \\ \hline -x_{30} & x_{14} & -x_{22} & x_{26} & x_{10} & x_{18} \\ -x_{28} & -x_{12} & x_{20} & x_{24} & -x_8 & -x_{16} \\ x_{10} & -x_{18} & -x_{26} & -x_{12} & x_{20} & -x_{28} \\ x_8 & x_{16} & x_{24} & -x_{14} & -x_{22} & x_{30} \\ x_{20} & x_{28} & x_{12} & x_{22} & -x_{30} & -x_{14} \\ -x_{16} & x_{24} & -x_8 & -x_{18} & -x_{26} & x_{10} \end{array}\right\} \quad (57\zeta)$$

Die Gesammtzahl der Substitutionen $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$ beträgt $2\,(1+3+12+8+12+24)=120$, von welchen $2\,(1+3+8)=24$, nämlich $J^{(1)}, J^{(2)}; A_1^{(1)}, A_1^{(2)}; B_1^{(1)}, B_1^{(2)}$ durch je 3 der 6 Fundamental-Complexe x_i $(i=1,2\ldots6)$ gebildet sind.

Die eigentlichen Substitutionen, welche **Collineationen** bedeuten, ergeben sich durch Combination je einer Substitution $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit je einer $\mathfrak{S}^{(2)}$, $(60\,.\,60=3600)$, die uneigentlichen Collineationen durch Combination je einer $-\mathfrak{S}^{(1')}$ mit je einer $\mathfrak{S}^{(2')}$ (oder je einer $\mathfrak{S}^{(1')}$ mit je einer $-\mathfrak{S}^{(2')}$), während die eigentlichen **Correlationen** durch Combination von $-\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$ (oder $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $-\mathfrak{S}^{(2)}$), die uneigentlichen Correlationen durch Combination von $\mathfrak{S}^{(1')}$ und $\mathfrak{S}^{(2')}$ resultiren.

In der Hauptgruppe von insgesammt 14400 Transformationen (7200 Collineationen und ebensovielen Correlationen) ist als Untergruppe die in § 23, II) aufgeführte Untergruppe $G_{576}^{(1)}$ bezw. $G_{288}^{(1)c}$) enthalten, welche durch die 3 . 192 (bez. 3 . 96), zu den Fundamentaltetraedern T_1, T_2, T_3 gehörigen Substitutionen gebildet wird.

Im Folgenden sollen zunächst die **eigentlichen**, sodann die **uneigentlichen** Collineationen und Correlationen nach ihrer Entstehung aus den Substitutionen $\mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{S}^{(2)}, \mathfrak{S}^{(1')}, \mathfrak{S}^{(2')}$ aufgeführt und charakterisirt und nach der Zugehörigkeit der betreffenden Substitutionen (in tetraedrischen Punkt- und Ebenen-Coordinaten) zu den 75 Polartetraedern $T_1\,..\,T_{75}$ unterschieden werden. Die letzteren zerfallen hierbei in mehrere Gruppen, welche aus der in § 41 gegebenen Zusammenstellung leicht entnommen werden können. Die Ueberführung der Substitutionsformeln aus tetraedrischen in solche in x_i-Linien-Coordinaten ist mit Hülfe der früher angegebenen Beziehungen ohne Schwierigkeit zu bewerkstelligen.

§ 47.

Die hierhergehörigen 3600 eigentlichen Collineationen und 3600 eigentlichen Correlationen.

1 A) Die identische Transformation $x'_k = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots 6)$ oder $z'_l = z_l$ oder $\zeta'_l = \zeta_l$ (vgl. § 11 unter (80α), β)). Dieselbe wird nach der im vorigen § angegebenen Zusammensetzung der eigentlichen Collineationen aus $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit $\mathfrak{S}^{(2)}$ durch (vgl. (57γ))

$$J^{(1)} \ldots J^{(2)} \quad \ldots\ldots \quad (58\alpha)$$

und in tetraedrischen Coordinaten durch

$$[1\ 2\ 3\ 4]_1 \text{ oder } \boxed{[1\ 2\ 3\ 4]}_1 \quad \ldots\ldots \quad (58\beta)$$

dargestellt.

1 B) Die entsprechende Correlation:

$$-J^{(1)} \ldots J^{(2)} \text{ oder } J^{(1)} \ldots -J^{(2)} \quad \ldots\ldots \quad (58\alpha')$$

$$\text{oder } [x_1\ -x_2\ x_3\ -x_4\ x_5\ -x_6] = \boxed{[1\ 2\ 3\ 4]}_1 = \boxed{[1\ 2\ 3\ 4]}_1 \quad \ldots \quad (58\beta')$$

bedeutet (vgl. § 11 unter B 2)) die Polarcorrelation in Beziehung auf die imaginäre Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$.

2) A) 225 hyperbolisch geschaarte Involutionen mit reellen Axenpaaren B.

Die nachfolgende Zusammenstellung (59) enthält die Zusammensetzung dieser 225 hyperbolischen Involutionen aus $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$, nämlich aus $B_1^{(1)}$ und $B_2^{(1)}$ einerseits und aus $B_1^{(2)}$ und $B_2^{(2)}$ andererseits (vgl. (57γ) in § 46), sodann die Polartetraeder T, welchen die Substitutionen angehören, ferner die Anzahl der Involutionen, wobei der fett gedruckte Factor die Anzahl der auf je eins der Tetraeder T entfallenden Substitutionen bezeichnet, und endlich die reellen Axenpaare, welche durch die 450 Geraden B (vergl. § 41 unter 8a), 1), 2), 3)) gebildet werden.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Axenpaare:
2 A_1)	$B_1^{(1)} \ldots B_1^{(2)}$	T_1	$3 \cdot 3 = \mathbf{9} \cdot 1 = 9$	9 Geradenpaare e und $e^{(1)}$ (vgl. 8a$_1$) (59a$_1$)
2 A_2)	$B_2^{(1)} \ldots B_2^{(2)}$	$T_4 \ldots T_{51}$	$12 \cdot 12 = \mathbf{3} \cdot 48 = 144$	144 Geradenpaare B (vgl. 8a$_2$) (59a$_2$)
2 A_3)	$\begin{cases} B_1^{(1)} \ldots B_2^{(2)} \\ B_1^{(1)} \ldots B_1^{(2)} \end{cases}$	$T_{52} \ldots T_{75}$	$2 \cdot 3 \cdot 12 = \mathbf{3} \cdot 24 = 72$	72 Geradenpaare B (vgl. 8a$_3$) (59a$_3$)

Beispiele: zu $2A_1$) $\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3 & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_5 & x'_6 = -x_6 \end{array}\right\} \ldots [1\ 2\ {-3}\ {-4}]_1,$

Axenpaar (12) . . . $1 \quad \pm i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

„ „ $2A_2$) $\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{27} & x'_2 = x_{28} \\ x'_3 = -x_{11} & x'_4 = -x_{12} \\ x'_5 = -x_{19} & x'_6 = -x_{20} \end{array}\right\} \ldots [1\ 2\ 3\ 4]_4,$

Axenpaar B . . . $\operatorname{cotg}\varphi \quad \pm i \operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \pm i \operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad \pm i$

$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{13} & x'_2 = x_{30} \\ x'_3 = x_{21} & x'_4 = x_{14} \\ x'_5 = x_{29} & x'_6 = x_{22} \end{array}\right\} \ldots [1^*\ 3\ 4\ 2]_{20},$

Axenpaar B . . . $1 \quad \mp i \operatorname{cotg}\varphi \quad -\operatorname{cotg}\varphi \quad \pm i \operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \pm i$

„ „ $2A_3$) $\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{19} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_{11} & x'_6 = -x_6 \end{array}\right\} \ldots [2\ 1^*\ 4\ 3]_{74},$

Axenpaar B . . . $\operatorname{tg}\varphi \quad \pm 2i \quad -1 \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0.$

Die Gleichung in σ hat hierbei (vergl. § 11 unter 2)) eine vierfache Wurzel -1 und eine Doppelwurzel $+1$, die Gleichung in τ hat die beiden Doppelwurzeln $+1$, -1.

2B) 225 Polarcorrelationen mit Kernflächen $F^{(1)}_2 \,.\,.\, F^{(1)}_{226}$.

Die aus den Substitutionen in 2A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ entstehenden Substitutionen bedeuten Polar-Correlationen, deren Kernflächen die in § 45 unter I 1), 2), 3) betrachteten reellen Flächen $F^{(1)}_2 \,.\,.\, F^{(1)}_{226}$ sind.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Kernflächen:
$2B_1$)	$\pm B_1^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)}$	T_1	$3.3 = \mathbf{9}.1 = 9$	9 Fundamentalflächen $F_2^{(1)} \,.\,.\, F_{10}^{(1)}$ (§ 45 I 1)) (59b₁)
$2B_2$)	$\pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp B_2^{(2)}$	$T_4 \,.\,.\, T_{51}$	$12.12 = \mathbf{3}.48 = 144$	144 Flächen $F_{11}^{(1)} \,.\,.\, F_{154}^{(1)}$ (§ 45 I 2)) (59b₂)
$2B_3$)	$\left\{\begin{array}{l} \pm B_1^{(1)} \,.\,.\, \mp B_2^{(2)} \\ \pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)} \end{array}\right\}$	$T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	$2.3.12 = \mathbf{3}.24 = 72$	72 Flächen $F_{155}^{(1)} \,.\,.\, F_{226}^{(1)}$ (§ 45 I 3)) (59b₃)

Beispiele: zu $2B_1$) $\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_3 & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_5 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [\overline{1\ 2\ {-3}\ {-4}}]_1,$

Kernfläche: $\left.\begin{array}{r} x_1^2+x_4^2+x_6^2 \equiv x_2^2+x_3^2+x_5^2 = 0 \\ \text{oder } z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2 = 0 \end{array}\right\} F_2^{(1)}$

Beispiele: zu $2\,B_2)$

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{27} & x'_2 = -x_{28} \\ x'_3 = -x_{11} & x'_4 = x_{12} \\ x'_5 = -x_{19} & x'_6 = x_{20} \end{array}\right\} \quad \ldots \overline{[1\;2\;3\;4]}_4,$$

Kernfläche: $x_9^2+x_{25}^2+x_{18}^2 \equiv x^2_{10}+x_{26}^2+x_{17}^2 = 0$

$$\text{oder: } \left.\begin{array}{r} z_1^2+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,z_2^2-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,z_3^2-\frac{1}{2}\,z_4^2 \\ +z_2\,z_3+\operatorname{cotg}\varphi\,.\,z_4\,z_2+\operatorname{tg}\varphi\,.\,z_3\,z_4 \end{array}\right\} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{13} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = x_{21} & x'_4 = -x_{14} \\ x'_5 = x_{29} & x'_6 = -x_{22} \end{array}\right\} \quad \ldots \overline{[1{*}3\;4\;2]}_{20},$$

Kernfläche: $x_{19}^2+x_{27}^2+x_{16}^2 \equiv x_8^2+x_{24}^2+x_{11}^2 = 0$

$$\text{oder: } \left.\begin{array}{r} -z_1^2-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,z_2^2+\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,z_4^2 \\ +z_1\,z_2+z_1\,z_3+z_1\,z_4+\operatorname{cotg}\varphi\,.\,z_2\,z_3-\operatorname{tg}\varphi\,.\,z_3\,z_4 \end{array}\right\} = 0$$

„ zu $2\,B_3)$

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{19} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_{11} & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \quad \ldots \overline{[2\;1{*}4\;3]}_{74},$$

Kernfläche: $x_7^2+x_{15}^2+x_2^2 \equiv x_4^2+x_6^2+x_{23}^2 = 0$

$$\text{oder: } \left.\begin{array}{r} [-z_1^2-z_2^2+z_3^2+z_4^2]\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}+[z_1\,z_3-z_4\,z_2]\operatorname{cotg}\varphi \\ +[z_1\,z_4+z_2\,z_3] \end{array}\right\} = 0$$

oder: $-\operatorname{tg}\varphi\,.\,F_2^{(1)}+\operatorname{cotg}\varphi\,.\,F_6^{(1)}+F_{10}^{(1)} = 0.$

Die Gleichung in σ hat hierbei die beiden dreifachen Wurzeln $+1$, -1.

3 A) 30 elliptisch geschaarte Involutionen mit imaginären Axenpaaren b_0.

Die Zusammensetzung dieser Involutionen aus den Substitutionen $J^{(1)}$ einerseits und $B_1^{(2)}$, $B_2^{(2)}$ andererseits (sowie aus $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$ und $J^{(2)}$), die Beschaffenheit der Axenpaare u. s. w. erhellt aus der nachfolgenden Zusammenstellung (60a)). Die sechs unter (60a$_1$) aufgeführten Involutionen sind bereits früher (vgl. § 11 unter A 1) Formel (80δ)) aufgetreten.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Imaginäre Axenpaare:
$3\,A_1)$	$\left\{\begin{array}{l} J^{(1)}\ldots B_1^{(2)} \\ B_1^{(1)}\ldots J^{(2)} \end{array}\right\}$	T_1	$2\,.\,1\,.\,3 = \mathbf{6}\,.\,1 = 6$	6 Geradenpaare $b'_0 = e$ (vgl. § 42 III (21a)) (60a$_1$)
$3\,A_2)$	$\left\{\begin{array}{l} J^{(1)}\ldots B_2^{(2)} \\ B_2^{(1)}\ldots J^{(2)} \end{array}\right\}$	$T_{52}\,..\,T_{75}$	$2\,.\,1\,.\,12 = \mathbf{1}\,.\,24 = 24$	24 Geradenpaare b''_0 (vgl. § 42 III (21b)) (60a$_2$)

Beispiele: Zu $3A_1$) (vgl. (80δ) in § 11)

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = x_5 & x'_6 = -x_6 \end{array}\right\} \ldots [2\ -1\ -4\ 3]_1,$$

Axenpaar (46) . . . 0 0 0 1 0 $\pm i$

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3 & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_5 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [2\ -1\ 4\ -3]_1,$$

Axenpaar (35) . . . 0 0 1 0 $\pm i$ 0

Beispiele: Zu $3A_2$)

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{19} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_{11} & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [1^*\ -2\ -3\ 4]_{74},$$

Axenpaar b''_0 . . $\frac{1}{\sin{}^2\varphi}$ 0 $\operatorname{tg}\varphi \pm 2i\operatorname{cotg}\varphi$ 0 $-(1\mp 2i)$ 0.

Die Gleichung in σ hat eine vierfache Wurzel $+1$ und eine Doppelwurzel -1, die Gleichung in τ zwei Doppelwurzeln $+i$ und $-i$.

3B) 30 Nullcorrelationen, deren Complexe die 30 Complexe $C_{(1)}$ sind.

Die betreffenden Substitutionen gehen aus denen in 3 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ hervor. Die unter $(60b_1)$ aufgeführten Nullcorrelationen sind bereits früher (vgl. § 11 unter B 1)) Formel (80ε)) aufgetreten.

Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Complexe der Nullcorrelation:
$3B_1)\left\{\begin{array}{l}\pm J^{(1)} \ldots \mp B_1^{(2)} \\ \pm B_1^{(1)} \ldots \mp J^{(2)}\end{array}\right\}$	T_1	$2.1.3 = \mathbf{6}.1 = 6$	6 Fundamentalcomplexe $C_1^{(1)}, C_1^{(1')}$ (vgl. (42) in § 44) $(60b_1)$
$3B_2)\left\{\begin{array}{l}\pm J^{(1)} \ldots \mp B_2^{(2)} \\ \pm B_2^{(1)} \ldots \mp J^{(2)}\end{array}\right\}$	$T_{52} \ldots T_{75}$	$2.1\,12 = \mathbf{1}.24 = 24$	24 Complexe $C_1^{(2)}, C_1^{(2')}$ (vgl. (42) in § 44) $(60b_2)$

Beispiele: zu $3B_1$)

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_3 & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_5 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots \overline{[2\ -1\ -4\ 3]}_1, \text{ Complex: } x_2 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_1 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_5 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots \overline{[2\ -1\ 4\ -3]}_1, \text{ Complex: } x_1 = 0$$

" " $3B_2$)

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{19} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_{27} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_{11} & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots \overline{[1^*-2\ -3\ 4]}_{74},$$

Complex: $x_{23} \ldots -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \,.\, x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \,.\, x_5 = 0.$

Die Gleichung in σ hat eine Wurzel -1 und eine fünffache Wurzel $+1$.

4 A) 400 dreizählige axiale Collineationen mit Axen C.

Die hierhergehörigen Substitutionen setzen sich in der aus der Zusammenstellung (61a) erkennbaren Weise aus $C^{(1)}_1$, $C^{(1)}_2$ und $C^{(2)}_1$, $C^{(2)}_2$ zusammen. Die Büschel- und die Reihen-Axe je zweier zusammengehöriger dreizähliger Collineationen sind durch je eine Gerade C und C' gebildet; die beiden festbleibenden Punkte der ersteren und die beiden festbleibenden Ebenen der letzteren sind bez. durch zwei Punkte $\mathfrak{c}_0$ und zwei Ebenen γ_0 dargestellt (vgl. § 9 I A unter 3)). Die auf die Tetraeder T_1, T_2, T_3 entfallenden Substitutionen 4 A₁) und 4 A₂) sind bereits früher (§ 14 unter A)) aufgetreten.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Büschel- und Reihen-Axen	
$4A_1)$	$\left\{\begin{matrix} C_1^{(1)} \ldots C_1^{(2)} \\ (S; S^2 \text{ mit bez. } S; S^2) \end{matrix}\right\}$	T_1	$2.4.4 = \mathbf{32}.1 = 32$	32 Gerade k und k'	
				(vgl. § 41 unter $(8b_1)$)	$(61a_1)$
$4A_2)$	$\left\{\begin{matrix} C_1^{(1)} \ldots C_1^{(2)} \\ (S; S^2 \text{ mit bez. } S^2; S) \end{matrix}\right\}$	T_2, T_3	$2.4.4 = \mathbf{16}.2 = 32$	32 Gerade k' und k	
					$(61a_2)$
$4A_3)$	$C_2^{(1)} \ldots C_2^{(2)}$	$T_4 \ldots T_{51}$	$12.12 = \mathbf{3}.48 = 144$	72 Gerade C	
				(vgl. § 41 unter $(8b_2)$)	$(61a_3)$
$4A_4)$	$\left\{\begin{matrix} C_2^{(1)} \ldots C_1^{(2)} \\ C_1^{(1)} \ldots C_2^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_{52} \ldots T_{75}$	$2.8.12 = \mathbf{8}.24 = 192$	96 Gerade C	
				(vgl. § 41 unter $(8b_3)$)	$(61a_4)$

Beispiele: Zu 4 A₁) und 4 A₂) vgl. § 14 unter A) Formeln (83α).

„ Zu 4 A₃)

$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x_1' = x_{17} & x'_2 = -x_{20} \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = -x_{28} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = x_{12} \end{matrix}\right\} \ldots [-4 \; -3 \; 2 \; 1]_{16}$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = -x_8 \end{matrix}\right\} \ldots [4 \; -3 \; 2 \; -1^*]_{19}$$

Büschelaxe: $\operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi$
Reihenaxe: $\operatorname{cotg}\varphi \quad -i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi$
(vgl. § 41 unter 8b₂)

„ Zu 4 A₃)

$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{11} & x'_2 = x_{24} \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = x_8 \\ x'_5 = x_{27} & x'_6 = x_{16} \end{matrix}\right\} \ldots [4 \; 2 \; 1^* \; 3]_{20}$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{13} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = -x_{21} & x'_4 = -x_{14} \\ x'_5 = -x_{29} & x'_6 = x_{22} \end{matrix}\right\} \ldots [1 \; 4 \; 2 \; 3]_{31}$$

Büschelaxe: $0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad -i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0$
Reihenaxe: $0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0$
(vgl. § 41 unter (8b₂).

Beispiel: Zu $4A_4$)

$$\left\{\begin{array}{ll} S\ldots & \left.\begin{array}{ll} x'_1 = x_{25} & x'_2 = -x_6 \\ x'_3 = -x_9 & x'_4 = x_2 \\ x'_5 = -x_{17} & x'_6 = -x_4 \end{array}\right\} \ldots [1^* \ -3 \ -4 \ 2]_{74} \\ S^2\ldots & \left.\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{27} & x'_2 = -x_4 \\ x'_3 = x_{11} & x'_4 = x_6 \\ x'_5 = -x_{19} & x'_6 = -x_2 \end{array}\right\} \ldots [1^* \ -4 \ 2 \ -3]_{67} \end{array}\right.$$

Büschelaxe: $i \operatorname{tg} \varphi \quad 1 \quad -i \operatorname{cotg} \varphi \quad 1 \quad 0 \quad -1$

Reihenaxe: $-i \operatorname{tg} \varphi \quad 1 \quad i \operatorname{cotg} \varphi \quad 1 \quad 0 \quad -1$

(vgl. § 41 unter $8b_2$).

Die Wurzeln der Gleichung in τ sind $1, 1, \alpha, \alpha^2$, derjenigen in σ gleich $1, 1, \alpha, \alpha, \alpha^2, \alpha^2$, wobei dem Werthe $\tau = 1$ oder $\sigma = 1$ die Büschelaxe entspricht und den Werthen $\tau = \alpha, \alpha^2$ und $\sigma = \alpha, \alpha^2$ die beiden festbleibenden, der $F_1^{(1)}$ angehörigen Punkte der Reihenaxe entsprechen.

4B) 400 allgemeine sechszählige Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen resultiren aus denjenigen in 4A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Die Eckpunkte und Seitenflächen eines zu S und S^5 gehörigen Haupttetraeders sind vier Punkte $\mathfrak{c}_0$ und vier Ebenen γ_0 (vgl. § 42 unter III); das Kantenpaar K_{14}, K_{23} ist durch die beiden Geraden C, C' gebildet, welche das Axenpaar für die beiden durch S^2 und S^4 dargestellten dreizähligen axialen Collineationen (vgl. 4A)) und zugleich die Leitgeraden für die beiden festbleibenden Gewinde $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ sind, während die beiden anderen Kantenpaare durch zwei Geradenpaare c_0 gebildet werden. Die Gleichungen des Complexes zweiten Grades Ω'', der beiden festbleibenden Flächen G_1, G_2, der beiden Kernflächen K_1, K_2 ergeben sich nach den in § 8 III und § 9 unter II B) aufgestellten Regeln. Die eine Fläche G_1 ist die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$, die andere G_2 ist eine der reellen Flächen $F^{(8)}$, der Flächen $F^{(e)}$, $F^{(e')}$ (vgl. § 45 unter 5e)), während die beiden festbleibenden Gewinde durch je zwei der Complexe $C_{(3)}$

$$(x_1 \pm x_3 \pm x_5 = 0 \text{ und } x_2 \pm x_4 \pm x_6 = 0)$$

und $C_2^{(\beta_1)}$, $C_2^{(\beta_2)}$ bez. $C_2^{(\beta'_1)}$, $C_2^{(\beta'_2)}$ (vgl. (55β) in § 45) dargestellt werden.

Die auf die Tetraeder T_1; T_2, T_3 entfallenden Substitutionen $4B_1$) und $4B_2$) sind bereits unter B) des § 14 betrachtet worden.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Ecken, Flächen und Kanten der Haupttetraeder:	
$4B_1)$	$\pm C_1^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)}$ (S; S^2 mit bez. S; S^2)	T_1	$2.4.4 = \mathbf{32}.1 = 32$	4 Punkte $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{c}'_0$, 4 Ebenen $\varkappa_0 = \gamma'_0$,	.. (61b₁)
$4B_2)$	$\pm C_1^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)}$ (S; S^2 mit bez. S^2, S)	T_2, T_3	$2.4.4 = \mathbf{16}.2 = 32$	2 Gerade k, k' (8b₁) und 2 Geradenpaare $k_0 = c'_0$ (vgl. § 42 (18a) und (19a)	.. (61b₂)
$4B_3)$	$\pm C_2^{(1)} \dots \mp C_2^{(2)}$	$T_4 \,..\, T_{51}$	$12.12 = \mathbf{3}.48 = 144$	4 Punkte $\mathfrak{c}''_0$, 4 Ebenen γ''_0, 2 Gerade C (8b₂) und 2 Geradenpaare c''_0 (vgl. § 42 (18b) und (19b))	.. (61b₃)
$4B_4)$	$\pm C_2^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)}$ $\pm C_1^{(1)} \dots \mp C_2^{(2)}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	$2.8\,12 = \mathbf{8}.24 = 192$	4 Punkte $\mathfrak{c}_0'''$, 4 Ebenen γ_0''', 2 Gerade C (8b₃) und 1 Geradenpaar c'_0 „ 1 „ c''_0 (vgl. § 42 (18c) und (19b)).	.. (61b₄)

Beispiele: Zu $4B_1)$ und $4B_2)$ vgl. § 14 unter B) (83β) und Formeln (49) in § 8 III).

1) Zu $4B_3)$:

$$S \dots \begin{cases} x'_1 = x_{17} & x'_2 = x_{20} \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = x_{28} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = -x_{12} \end{cases} \dots [\overline{-4\ -3\ 2\ 1}]_{16}$$

$$S^5 \dots \begin{cases} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = x_8 \end{cases} \dots [\overline{4\ -3\ 2\ -1^*}]_{19}$$

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \dots \sin\psi & 0 & \cos\psi & i \dots Z_4 \\ Z_2 \dots \cos\psi & i & -\sin\psi & 0 \dots Z_3 \\ Z_3 \dots \cos\psi & -i & -\sin\psi & 0 \dots Z_2 \\ Z_4 \dots \cos\psi & 0 & \cos\psi & -i \dots Z_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1 \dots Z_1\, Z_4 + Z_2\, Z_3 \dots x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 \equiv x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \dots F_1^{(1)}$$

$$\text{oder } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G}_2 \dots Z_1\, Z_4 - Z_2\, Z_3 \dots (x_1 \cos\psi + x_5 \sin\psi)^2 + (x_2 \sin\psi + x_6 \cos\psi)^2 + x_4^2 \equiv \\ \equiv (x_1 \sin\psi - x_5 \cos\psi)^2 + (x_2 \cos\psi - x_6 \sin\psi)^2 + x_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} F^{(e)}$$

$$\text{oder } (z_1^2 - z_3^2)\sqrt{5} + 3\,(z_2^2 - z_4^2) - 4\, z_1\, z_3 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C}' \dots x_1 \cos\psi + x_5 \sin\psi = 0 \\ \mathbf{C}'' \dots x_2 \cos\psi - x_6 \sin\psi = 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{14} \text{ und } K_{23} \dots \operatorname{cotg}\varphi \quad \pm i \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad 0 \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \mp i \operatorname{tg}\varphi \dots C,\ C'$$

$$\left.\begin{matrix} K_{12} \text{ „ } K_{34} \dots \sin\psi & 0 & \pm i & 0 & \cos\psi & 0 \\ K_{13} \text{ „ } K_{42} \dots 0 & \sin\psi & 0 & \mp i & 0 & \cos\psi \end{matrix}\right\} \text{vgl. (19b)} \dots \Big\} c_0$$

$$K_1 \dots 2\, Z_1\, Z_4 - Z_2\, Z_3 \equiv Z_1\, Z_4 - 2\, Z_2\, Z_3 \equiv -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_3^2 + z_4^2 + z_1\, z_3 \equiv$$

$$-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \zeta_3^2 + \frac{1}{2} \zeta_4^2 + \zeta_1\, \zeta_3 = 0$$

$$K_2 \dots Z_1\, Z_4 - 2\, Z_2\, Z_3 \equiv 2\, Z_1\, Z_4 - Z_2\, Z_3 \equiv -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_1^2 - z_2^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} z_4^2 + z_1\, z_3 \equiv$$

$$-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \zeta_1^2 - \frac{1}{2} \zeta_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \zeta_3^2 + \zeta_4^2 + \zeta_1\, \zeta_3 = 0$$

1) Zu $4\,B_3$):
$$\left\{\begin{array}{l}\Omega'' \;\ldots\; x_1\,x_{17}+x_3\,x_{25}+x_5\,x_9+x_2\,x_{20}+x_4\,x_{28}-x_6\,x_{12}\\ \equiv -x_1\,x_{21}+x_3\,x_{29}-x_5\,x_{13}-x_2\,x_{16}+x_4\,x_{24}+x_6\,x_8=0.\end{array}\right\}$$

2) Zu $4\,B_3$):

$$S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{11} & x'_2=-x_{24}\\ x'_3=x_{19} & x'_4=-x_8\\ x'_5=x_{27} & x'_6=-x_{16}\end{array}\right\}\ldots[\overline{4\;2\;1\;{}^*3}]_{20}$$

$$S^5\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{13} & x'_2=x_{30}\\ x'_3=-x_{21} & x'_4=x_{14}\\ x'_5=-x_{29} & x'_6=-x_{22}\end{array}\right\}\ldots[\overline{1\;4\;2\;3}]_{31}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega''\;\ldots\; x_1\,x_{11}+x_3\,x_{19}+x_5\,x_{27}-x_2\,x_{24}-x_4\,x_8-x_6\,x_{16}\\ \equiv x_1\,x_{13}-x_3\,x_{21}-x_5\,x_{29}+x_2\,x_{30}+x_4\,x_{14}-x_6\,x_{22}\end{array}\right\}=0$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} Z_1\ldots & -(\operatorname{tg}\varphi+\alpha\operatorname{cotg}\varphi) & -\alpha & \operatorname{cotg}\varphi+\alpha\operatorname{tg}\varphi & 1 & \ldots Z_4\\ Z_2\ldots & -\alpha & \operatorname{tg}\varphi+\alpha\operatorname{cotg}\varphi & 1 & -(\operatorname{cotg}\varphi+\alpha\operatorname{tg}\varphi) & \ldots Z_3\\ Z_3\ldots & -\alpha^2 & \operatorname{tg}\varphi+\alpha^2\operatorname{cotg}\varphi & 1 & -(\operatorname{cotg}\varphi+\alpha^2\operatorname{tg}\varphi) & \ldots Z_2\\ Z_4\ldots & -(\operatorname{tg}\varphi+\alpha^2\operatorname{cotg}\varphi) & -\alpha^2 & \operatorname{cotg}\varphi+\alpha^2\operatorname{tg}\varphi & 1 & \ldots Z_1\end{array}\right\}\text{(vgl. (18b}_2\text{), (18b}_3\text{) in § 42}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_{14}\text{ und }K_{23}\ldots 0\quad \operatorname{tg}\varphi\quad \pm i\operatorname{tg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad \pm i\operatorname{cotg}\varphi\quad 0\ldots(C)\\ \left.\begin{array}{l}K_{12}\;\text{„}\;K_{34}\ldots 0\quad\cos\psi\quad 0\quad\sin\psi\quad 0\quad \pm i\\ K_{13}\;\text{„}\;K_{42}\ldots \mp i\quad 0\quad\cos\psi\quad 0\quad\sin\psi\quad 0\end{array}\right\}\ldots(c_0'')\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C'\;\ldots\; x_3\sin\psi+x_5\cos\psi=0\\ C''\;\ldots\; x_2\sin\psi+x_4\cos\psi=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} G_1\ldots Z_1\,Z_4+Z_2\,Z_3\equiv x_1^2+x_3^2+x_5^2=0\;\ldots\;F_1^{(1)}\\ \left.\begin{array}{l}G_2\ldots Z_1\,Z_4-Z_2\,Z_3\equiv(x_3\sin\psi+x_5\cos\psi)^2+(x_2\cos\psi-x_4\sin\psi)^2+x_6^2=0\\ \qquad\equiv(x_3\cos\psi-x_5\sin\psi)^2+(x_2\sin\psi+x_4\cos\psi)^2+x_1^2=0\end{array}\right\}\ldots F^{(e)}\end{array}\right.$$

(vgl. (55e) in § 45)

oder $z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2+2\operatorname{cotg}^2\varphi\,(z_1\,z_2+z_3\,z_4)-2\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+2\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_4+z_2\,z_3)=0$

$$\left.\begin{array}{l}K_1\ldots 2\,Z_1\,Z_4-Z_2\,Z_3\equiv Z_1\,Z_4-2\,Z_2\,Z_3\equiv z_1^2+z_3^2+\operatorname{cotg}^2\varphi\,(z_1\,z_2+z_3\,z_4)-(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+\\ \quad\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_4+z_2\,z_3)\equiv\zeta_2^2+\zeta_4^2-\operatorname{cotg}^2\varphi\,(\zeta_1\,\zeta_2+\zeta_3\,\zeta_4)+(\zeta_1\,\zeta_3-\zeta_4\,\zeta_2)-\operatorname{tg}^2\varphi\,(\zeta_1\,\zeta_4+\zeta_2\,\zeta_3)\end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}K_2\ldots Z_1\,Z_4-2\,Z_2\,Z_3\equiv Z_1\,Z_4-2\,Z_2\,Z_3\equiv z_2^2+z_4^2-\operatorname{cotg}^2\varphi\,(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+(z_1\,z_3-z_4\,z_2)-\\ \quad\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_4+z_2\,z_3)\equiv\zeta_1^2+\zeta_3^2+\operatorname{cotg}^2\varphi\,(\zeta_1\,\zeta_2+\zeta_3\,\zeta_4)-(\zeta_1\,\zeta_3-\zeta_4\,\zeta_2)+\operatorname{tg}^2\varphi\,(\zeta_1\,\zeta_4+\zeta_2\,\zeta_3)\end{array}\right\}=0.$$

3) Zu $4\,B_4$):

$$S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{25} & x'_2=x_6\\ x'_3=-x_9 & x'_6=-x_2\\ x'_5=-x_{17} & x'_6=x_4\end{array}\right\}\ldots[\overline{1^*\;-3\;-4\;2}]_{74}$$

$$S^5\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{27} & x'_2=x_4\\ x'_3=x_{11} & x'_4=-x_6\\ x'_5=-x_{19} & x'_6=x_2\end{array}\right\}\ldots[\overline{1^*\;-4\;2\;-3}]_{67}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega''\equiv x_1\,x_{25}-x_3\,x_9-x_5\,x_{17}+x_2\,x_6-x_4\,x_2+x_6\,x_4\\ \equiv -x_1\,x_{27}+x_3\,x_{11}-x_5\,x_{19}+x_2\,x_4-x_4\,x_6+x_6\,x_2\end{array}\right\}=0$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} Z_1\ldots & 1 & \alpha\operatorname{cotg}\varphi & \alpha^2\operatorname{tg}\varphi & -\operatorname{tg}\varphi+\alpha^2 & \ldots Z_4\\ Z_2\ldots & 1+\alpha\operatorname{cotg}\varphi & -\alpha^2\operatorname{tg}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \alpha & \ldots Z_3\\ Z_3\ldots & 1+\alpha^2\operatorname{cotg}\varphi & -\alpha\operatorname{tg}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \alpha^2 & \ldots Z_2\\ Z_4\ldots & 1 & \alpha^2\operatorname{cotg}\varphi & \alpha\operatorname{tg}\varphi & -\operatorname{tg}\varphi+\alpha & \ldots Z_1\end{array}\right\}\text{vgl. (18c) in § 42}$$

Beispiele: 3) Zu 4 B_4):

$$K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots \pm i \operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad \mp i \operatorname{cotg}\varphi \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad \ldots (C)$$

$$K_{12} \quad ,, \quad K_{23} \ldots \cos\psi \quad 0 \quad \sin\psi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \quad \ldots (c_0'')$$

$$K_{13} \quad ,, \quad K_{42} \ldots \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & -\alpha \end{matrix} \right\} \ldots (c_0')$$

$$C' \ldots x_1 \sin\psi - x_3 \cos\psi = 0$$

$$C'' \ldots x_2 + x_4 - x_6 = 0$$

$$G_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv x_1{}^2 + x_3{}^2 + x_5{}^2 = 0 \ldots F_1^{(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} G_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 &\equiv (x_1 \cos\psi + x_3 \sin\psi)^2 + x_5{}^2 + \frac{1}{3}(x_2 + x_4 - x_6)^2 = 0 \\ &\equiv 2(x_1 \sin\psi - x_3 \cos\psi)^2 + (x_2 - x_4)^2 + \frac{1}{3}(x_2 + x_4 + 2x_6)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \ldots F^{(e_1)}$$

(vgl. ($55e_1$) in § 45)

oder:

$$z_1{}^2 - \sqrt{5}(z_2{}^2 - z_3{}^2) - z_4{}^2 + 2 \operatorname{cotg}\varphi (z_1 z_2 - z_3 z_4) + 2 \operatorname{tg}\varphi (z_1 z_3 + z_4 z_2) + 2\sqrt{5} z_1 z_4 + 2 z_2 z_3 = 0$$

$$K_1 \ldots z_1{}^2 - \operatorname{tg}\varphi\, z_2{}^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, z_3{}^2 + \operatorname{cotg}\varphi (z_1 z_2 - z_3 z_4) + \operatorname{tg}\varphi (z_1 z_3 + z_4 z_2 + \sqrt{5} z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0$$

$$K_2 \ldots \operatorname{cotg}\varphi\, z_2{}^2 - \operatorname{tg}\varphi\, z_3{}^2 + z_4{}^2 - \operatorname{cotg}\varphi (z_1 z_2 - z_3 z_4) - \operatorname{tg}\varphi (z_1 z_3 + z_4 z_2) - \sqrt{5} z_1 z_4 - z_2 z_3 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung in σ sind hierbei $1, \alpha, \alpha^2, -1, -\alpha, -\alpha^2$; die beiden Potenzen S^2, S^4 einer derartigen Substitution S bedeuten die zugehörigen dreizähligen axialen Collineationen (S^2, S) (vgl. die entsprechenden Beispiele unter 4 A_1) bis 4 A_4), während S^3 die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ (vgl. unter 1 B) bedeutet.

5A) 40 dreizählige geschaarte Collineationen mit Axenpaar c_0.

Die Substitutionen sind aus $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ und $J^{(2)}$, sowie aus $J^{(1)}$ und $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ zusammengesetzt. Das Axenpaar besteht aus zwei Geraden c_0 (vergl. § 42 unter (19a), (19b)), welche für die Wurzelwerthe $\sigma = \alpha$, α^2 resultiren; der vierfachen Wurzel $\sigma = 1$ entsprechen alle Geraden der Congruenz mit dem Axenpaar c_0 (vergl. § 9 I A 4). Die Complexe eines Gebüsches Γ (vgl. (50γ) in § 9) werden in sich transformirt; zu den durch das Axenpaar hindurchgehenden Flächen zweiten Grades, welche in sich transformirt werden, gehören für 5 A_1) die Fläche $F_1^{(1)}$ und bestimmte Flächen $F^{(5)}$, $F^{(6)}$, $F^{(7)}$, $F^{(8)}$ (vgl. § 7), für 5 A_1) ausser der Fläche $F_1^{(1)}$ bestimmte Flächen $F^{(c)}$, $F^{(d)}$, $F^{(e)}$ (vgl. § 45). Die 16 Substitutionen 5 A_1) sind bereits in § 12 unter A 1) betrachtet worden.

Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Axenpaare:	
$5A_1)\left\{\begin{matrix} C_1^{(1)} \dots J^{(2)} \\ J^{(1)} \dots C_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	T_2, T_3	$2.8.1 = 8.2 = 16$	c'_0 (oder k_0) . . .	(62a₁)
$5A_2)\left\{\begin{matrix} C_2^{(1)} \dots J^{(2)} \\ J^{(1)} \dots C_2^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_{52} \dots T_{75}$	$2.12.1 = 1.24 = 24$	c''_0	(62a₂)

Beispiele: Zu $5A_1)$ vgl. § 12 unter A 1).

$$\text{Zu } 5A_2)\left\{\begin{matrix} S \dots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{17} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = x_6 \end{matrix}\right\} \dots [-3\ 4\ -1\ {}^*2]_{64} \\ S^2 \dots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = x_6 \end{matrix}\right\} \dots [3\ 4\ -1^*\ -2]_{69} \end{matrix}\right.$$

Axenpaar: $c_0'' \dots \sin\psi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \quad -\cos\psi \quad 0$

Complex-Gebüsch: $\Gamma \dots a_1 (x_1 \cos\psi + x_5 \sin\psi) + a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_6 x_6 = 0.$

5B) 40 sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche.

Die betreffenden Substitutionen gehen aus denen in 5A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ hervor. Die Correlationen S, S^5 gehören zu den in § 9 II A 4) b) unter α) behandelten sechszähligen Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche, für welche S^3 eine Polarcorrelation mit $F_1^{(1)}$ als Kernfläche darstellt, während S^2 und S^4 die dreizähligen geschaarten Collineationen (S^2 und S) 5A) sind. Die Wurzeln σ sind $1, 1, 1, -1, -\alpha, -\alpha^2$; die Gleichung des Complexes Ω', des festbleibenden linearen Complexes $\boldsymbol{C}$ und der beiden festbleibenden speciellen Complexe $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}''$, deren Leitgeraden die Axen der zugehörigen dreizähligen geschaarten Correlationen darstellen, sind in den nachfolgenden Beispielen angegeben (vgl. § 8 II). Die 16 Substitutionen $5B_2$) sind bereits in § 12 unter B 1) behandelt worden.

Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Complex C:	Kernfläche:	
$5B_1)\left\{\begin{matrix} \pm C_1^{(1)} \dots \mp J^{(2)} \\ \pm J^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	T_2, T_3	$2.8.1 = 8.2 = 16$	Je ein Complex $C_{(3)}$ (vgl. (14γ) in § 6)	$F_1^{(1)}$	. . (62 b₁)
$5B_2)\left\{\begin{matrix} \pm C_2^{(1)} \dots \mp J^{(2)} \\ \pm J^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_{52} \dots T_{75}$	$2.12.1 = 1.24 = 24$	Je ein Complex $C_{(2)}^{(\beta_1)}$, $C_{(2)}^{(\beta'_1)}$ (vgl. (55β) in § 45)	$F_1^{(1)}$	. . (62 b₂)

Beispiele: Zu $5 B_1$) vgl. § 12 unter B 1).

Zu $5 B_2$)

$$S \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{17} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \dots [-3\ 4\ -1\ {}^*2]_{64}$$

$$S^5 \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \dots [3\ 4\ -1^*\ -2]_{69}$$

$$\Omega' \dots \frac{x_1^2}{\sin^2\varphi} + x_3^2 + \frac{x_5^2}{\cos^2\varphi} + 2\, x_1\, x_5 = 0$$

$$C \dots x_1 \cos\psi + x_5 \sin\psi = 0. \quad C', C'' \dots x_1 \sin\psi + i\, x_3 - x_5 \cos\psi = 0.$$

6 A) 288 fünfzählige axiale Collineationen mit Axen G.

Die Substitutionen setzen sich aus $G_1^{(1)}$ und $G_1^{(2)}$, sowie aus $G_2^{(1)}$ und $G_2^{(2)}$ zusammen. Die Büschel- und die Reihen-Axe von je vier zusammengehörigen fünfzähligen Collineationen sind durch je eine Gerade G und G' gebildet; dieselben entsprechen der Doppelwurzel $\tau = 1$ und ebenso $\sigma = 1$. (vgl. § 9 I A 3)). Die beiden festbleibenden Punkte der Büschel- und die beiden festbleibenden Ebenen der Reihenaxe entsprechen den Wurzelwerthen $\tau = \varepsilon, \varepsilon^4, \sigma = \varepsilon, \varepsilon;\ \varepsilon^4, \varepsilon^4$ (für S und S^4) oder $\tau = \varepsilon^2, \varepsilon^3, \sigma = \varepsilon^2, \varepsilon^2;\ \varepsilon^3, \varepsilon^3$ (für S^2 und S^3); dieselben sind bezw. je zwei Punkte $\mathfrak{g}_0$ und zwei Ebenen χ_0 (vergl. § 41 (14 a), (14 b)).

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Büschel- und Reihen-Axe:	
6 A)	$\left\{ \begin{array}{l} G_1^{(1)} \dots G_1^{(2)} \\ G_2^{(1)} \dots G_2^{(2)} \end{array} \right\}$	$T_4 \dots T_{51}$	$2 . 12 . 12 = \mathbf{6} . 48 = 288$	72 Gerade G, G' . . (vgl. § 41 unter (8c)).	(63 a)

Beispiele zu 6 A):

1)

$$S \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = x_8 \end{array} \right\} \dots [4\ 3\ 2\ 1]_{17},$$

$$S^4 \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = -x_{30} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_{14} \end{array} \right\} \dots [4\ 3\ 2\ 1]_{16};$$

$$S^2 \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = x_{10} \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = -x_{18} \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = -x_{26} \end{array} \right\} \dots [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19},$$

$$S^3 \dots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_{12} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = -x_{28} \end{array} \right\} \dots [-3\ -2\ 4\ 1]_{18}.$$

Büschelaxe: $1 \quad i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad -i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0$
Reihenaxe: $1 \quad -i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0$ (vgl. § 41 unter (8c)).

$$
2)\left\{\begin{array}{l}
S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_9 & x'_2=x_{28}\\ x'_3=x_{17} & x'_4=x_{12}\\ x'_5=x_{25} & x'_6=x_{20}\end{array}\right\}\ldots[2\;3\;4\;1^*]_{20},\\
S^4\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{13} & x'_2=x_{30}\\ x'_3=x_{21} & x'_4=-x_{14}\\ x'_5=-x_{29} & x'_6=-x_{22}\end{array}\right\}\ldots[1\;2\;3\;4]_{33};\\
S^2\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{27} & x'_2=-x_{16}\\ x'_3=-x_{11} & x'_4=x_{24}\\ x'_5=x_{19} & x'_6=-x_8\end{array}\right\}\ldots[3\;4\;1\;2]_{26},\\
S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{23} & x'_2=-x_{18}\\ x'_3=-x_7 & x'_4=-x_{26}\\ x'_5=-x_{15} & x'_6=x_{10}\end{array}\right\}\ldots[3\;1\;2\;4]_{31}.\\
\left.\begin{array}{l}\text{Büschelaxe: } \operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad 0\quad i\quad -1\quad -i\operatorname{tg}\varphi\\ \text{Reihenaxe: } \operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad 0\quad -i\quad -1\quad i\operatorname{tg}\varphi\end{array}\right\}\text{(vgl. § 41 unter (8c)).}
\end{array}\right.
$$

6 B) 288 allgemeine zehnzählige Correlationen.

Diese Substitutionen resultiren aus denjenigen in 6 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Ein zu S, S^3, S^7, S^9 gehöriges Haupttetraeder hat zu Eckpunkten 4 Punkte $\mathfrak{g}_0$, zu Seitenflächen 4 Ebenen χ_0 (vgl. § 42 unter III); das Kantenpaar K_{14}, K_{23} besteht aus den beiden Geraden G, welche das Axenpaar für die vier durch S^2, S^4, S^6, S^8 dargestellten fünfzähligen axialen Collineationen (vgl. 6 A) und zugleich die Leitgeraden für die beiden festbleibenden Gewinde C', C'' sind, während die beiden anderen Kantenpaare durch 2 Geradenpaare g_0 gebildet werden. Die Wurzeln der Gleichung in σ sind

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ -1,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^4 \text{ für } S \text{ und } S^9,\text{ und } 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ -1,\ -\varepsilon^2,\ -\varepsilon^3 \text{ für } S^3 \text{ und } S^7$$

(vgl. (15) in § 42); den hier geltenden Werthen (vgl. § 8 unter III, Formeln (48) $(\delta)\,..\,(\vartheta)$)

$$\alpha_{14}=\alpha_{41}=1,\ \alpha_{23}=\varepsilon \text{ oder } \varepsilon^2,\ \alpha_{32}=\varepsilon^4 \text{ oder } \varepsilon^3$$

entsprechen die Werthe

$$\nu_1=\operatorname{tg}\varphi,\ \nu_3=-\operatorname{tg}\varphi,\ \nu_5=2,\ \nu'_1=\nu'_3=\frac{i}{\sin\varphi},\ \nu'_5=0$$

oder:

$$\nu_1=-\operatorname{cotg}\varphi,\ \nu_3=\operatorname{cotg}\varphi,\ \nu_5=2,\ \nu'_1=\nu'_3=\frac{i}{\cos\varphi},\ \nu'_5=0.$$

Hieraus bestimmen sich in einfacher Weise (vgl. § 8 unter III Formeln (48)) die Gleichungen der beiden Complexe Ω_1'', Ω_2'', der beiden Systeme $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$ von Kernflächen, der Gewinde C', C'', der Flächen G_1,

G_2 u. s. w. Die Fläche G_1 ist wiederum die Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$, die Fläche G_2 eine der Flächen $F^{(a)}$ (vgl. Formel (55a) in § 45), während die Gewinde C', C'' je zwei der Complexe $C_{(2)}^{(\alpha)}$, $C_{(2)}^{(\alpha')}$ (vergl. (55α) in § 45) sind. Die beiden Complexe der Wechselstrahlen Ω_{w_1}, Ω_{w_2} (vgl. § 8 III) Formel (48δ)) zerfallen wegen $\nu'_1 = \nu'_3$ in die beiden speciellen Complexe mit den Leitgeraden K_{14}, K_{23}. Die geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 sind die in 6 A) auftretenden fünfzähligen axialen Collineationen (und zwar in der Reihenfolge: S^2, S^4, S, S^3), während S^5 die Polarcorrelation in Bezug auf $F^{(1)}$ bedeutet.

Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Ecken, Flächen, Kanten der Haupttetraeder:
6 *B*) $\left\{\begin{array}{l} \pm G_1^{(1)} \ldots \mp G_1^{(2)} \\ \pm G_2^{(1)} \ldots \mp G_2^{(2)} \end{array}\right\}$	$T_4 \ldots T_{51}$	$2 \cdot 12 \cdot 12 = \mathbf{6} \cdot 48 = 288$	$\left\{\begin{array}{l} \text{4 Punkte } \mathfrak{g}_0, \\ \text{4 Ebenen } \chi_0, \\ \text{2 Gerade } G \text{ und} \\ \text{2 Geradenpaare } g_0 \end{array}\right\}$ (63b)

(vgl. § 42 unter 2 I) Formeln (16β) und (17)).

Beispiele zu 6 B):

$$1)\left\{\begin{array}{lll}
S \ldots & \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = -x_8 \end{array}\right\} & \ldots [4\ 3\ 2\ 1]_{17}, \\
S^9 \ldots & \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = x_{22} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_{30} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = -x_{14} \end{array}\right\} & \ldots [4\ 3\ 2\ 1]_{16}; \\
S^3 \ldots & \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_{10} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_{18} \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = x_{26} \end{array}\right\} & \ldots [-3\ -2\ 4\ 1]_{18}, \\
S^7 \ldots & \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = x_{12} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_{20} \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = x_{28} \end{array}\right\} & \ldots [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19}
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll}
Z_1 \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & i & \ldots Z_4 \\
Z_2 \ldots & i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots Z_3 \\
Z_3 \ldots & -i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots Z_2 \\
Z_4 \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -i & \ldots Z_1
\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}
K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots\ 1 \quad \mp i \quad -\mathrm{tg}\,\varphi \quad \pm i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0 \quad \ldots G, G' \\
\left.\begin{array}{l} K_{12} \text{ „ } K_{34} \ldots \sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0 \\ K_{13} \text{ „ } K_{42} \ldots\ 0 \quad \sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \end{array}\right\} \ldots g_0
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega_1'' \ldots -x_1 x_{21} - x_3 x_{29} + x_5 x_{13} - x_2 x_{16} - x_4 x_{24} - x_6 x_8 \equiv \\
\qquad x_1 x_{15} + x_3 x_{23} + x_5 x_7 + x_2 x_{22} + x_4 x_{30} - x_6 x_{14} = 0 \\
\Omega_2'' \ldots x_1 x_9 - x_3 x_{17} - x_5 x_{25} - x_2 x_{10} + x_4 x_{18} + x_6 x_{26} \equiv \\
\qquad -x_1 x_{11} + x_3 x_{19} - x_5 x_{27} + x_2 x_{12} - x_4 x_{20} + x_6 x_{28} = 0
\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
C' \ldots x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi = 0 \\
C'' \ldots x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi = 0
\end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{G}_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 \ldots F_1^{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 &\equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)^2 + x_6^2 = 0 \\ &\equiv (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi)^2 + x_5^2 = 0 \\ \text{oder} \ldots &\sqrt{5}\,(z_1^2 - z_4^2) + z_2^2 - z_3^2 - 4\, z_2 z_3 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots F^{(a)}$$

$$\left\{\begin{aligned} &K_1^{(1)} \ldots Z_1 Z_4 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv \\ &\qquad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_3^2 + z_4^2 + \operatorname{tg}\varphi\; z_2 z_3 = 0 \\ &K_2^{(1)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \\ &\qquad z_1^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_4^2 - \operatorname{tg}\varphi\; z_2 z_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} &K_1^{(2)} \ldots Z_1 Z_4 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv \\ &\qquad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_1^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} z_3^2 - z_4^2 - \operatorname{cotg}\varphi\; z_2 z_3 = 0 \\ &K_2^{(2)} \ldots -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \\ &\qquad -z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_3^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_4^2 + \operatorname{cotg}\varphi\; z_2 z_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

$$2)\left\{\begin{aligned} &S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_{28} \\ x'_3 = x_{17} & x'_4 = -x_{12} \\ x'_5 = x_{25} & x'_6 = -x_{20} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{2\ 3\ 4\ 1^*}]_{20} \\ &S^9 \,. \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{13} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = x_{21} & x'_4 = x_{14} \\ x'_5 = -x_{29} & x'_6 = x_{22} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_{33}; \\ &S^3 \,.. \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{23} & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = -x_7 & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = -x_{15} & x'_6 = x_8 \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{3\ 1\ 2\ 4}]_{31}, \\ &S^7 \,.. \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{27} & x'_2 = x_{18} \\ x'_3 = -x_{11} & x'_4 = x_{26} \\ x'_5 = x_{19} & x'_6 = -x_{10} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{3\ 4\ 1\ 2}]_{26} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix} Z_1 \ldots & \varepsilon \operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon^4 & 1 & -\varepsilon^3 \operatorname{tg}\varphi & \ldots Z_4 \\ Z_2 \ldots & -\varepsilon & -\varepsilon^4 \operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^2 \operatorname{tg}\varphi & 1 & \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots & -\varepsilon^4 & -\varepsilon \operatorname{tg}\varphi & \varepsilon^3 \operatorname{tg}\varphi & 1 & \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots & \varepsilon^4 \operatorname{tg}\varphi & -\varepsilon & 1 & -\varepsilon^2 \operatorname{tg}\varphi & \ldots Z_1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots & \operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 & \pm i & -1 & \mp i \operatorname{tg}\varphi \ldots G \\ K_{12} \text{ „ } K_{34} \ldots & 0 & \pm i & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ K_{13} \text{ „ } K_{42} \ldots & \cos\varphi & 0 & \mp i & 0 & \sin\varphi & 0 \end{matrix}\right\} \ldots g_0$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega''_1 \ldots x_1 x_9 + x_3 x_{17} + x_5 x_{25} - x_2 x_{28} - x_4 x_{12} - x_6 x_{20} \equiv \\ &\qquad -x_1 x_{13} + x_3 x_{21} - x_5 x_{29} - x_2 x_{30} + x_4 x_{14} + x_6 x_{22} = 0 \\ &\Omega''_2 \ldots x_1 x_{23} - x_3 x_7 - x_5 x_{15} + x_2 x_{18} + x_4 x_{26} - x_6 x_{10} \equiv \\ &\qquad -x_1 x_{27} - x_3 x_{11} + x_5 x_{19} + x_2 x_{16} - x_4 x_{24} + x_6 x_8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C' \ldots x_1 \sin\varphi - x_5 \cos\varphi = 0 \\ C'' \ldots x_4 \cos\varphi - x_6 \sin\varphi = 0 \end{array}\right\}$$

$$G_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 \ldots F_1^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} G_2 \ldots Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv (x_1 \sin\varphi - x_5 \cos\varphi)^2 + (x_4 \sin\varphi + x_6 \cos\varphi)^2 + x_2^2 = 0 \\ \equiv (x_1 \cos\varphi + x_5 \sin\varphi)^2 + (x_4 \cos\varphi - x_6 \sin\varphi)^2 + x_3^2 = 0 \\ \text{oder } \equiv -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \\ +2(z_1 z_2 + z_3 z_4) \operatorname{cotg}\varphi + 2(z_1 z_3 + z_4 z_2) \operatorname{tg}\varphi + 2(z_1 z_4 - z_2 z_3) = 0 \end{array}\right\} \ldots F^{(a)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(1)} \ldots Z_1 Z_4 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv \\ (z_1^2 + z_4^2) + (z_2^2 + z_3^2) \operatorname{cotg}\varphi + (z_1 z_2 + z_3 z_4) + (z_1 z_3 + z_4 z_2) \operatorname{tg}^2\varphi + (z_1 z_4 - z_2 z_3) \operatorname{tg}\varphi = 0 \\ K_2^{(1)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \\ (z_1^2 + z_4^2) + (z_2^2 + z_3^2) \operatorname{tg}\varphi - (z_1 z_2 + z_3 z_4) - (z_1 z_3 + z_4 z_2) \operatorname{tg}^2\varphi - (z_1 z_4 - z_2 z_3) \operatorname{tg}\varphi = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(2)} \ldots Z_1 Z_4 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv \\ -(z_1^2 + z_4^2) \operatorname{tg}\varphi + (z_2^2 + z_3^2) + (z_1 z_2 + z_3 z_4) \operatorname{cotg}^2\varphi + (z_1 z_3 + z_4 z_2) + (z_1 z_4 - z_2 z_3) \operatorname{cotg}\varphi = 0 \\ K_2^{(2)} \ldots -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} Z_2 Z_3 \equiv \\ (z_1^2 + z_4^2) - (z_2^2 + z_3^2) \operatorname{tg}\varphi - (z_1 z_2 + z_3 z_4) \operatorname{cotg}^2\varphi - (z_1 z_3 + z_4 z_2) - (z_1 z_4 - z_2 z_3) \operatorname{cotg}\varphi = 0. \end{array}\right\}$$

7 A) 48 fünfzählig geschaarte Collineationen mit Axenpaar g_0.

Die Substitutionen setzen sich aus $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ und $J^{(2)}$, sowie aus $J^{(1)}$ und $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}$ zusammen. Das Axenpaar besteht aus zwei Geraden g_0 (vgl. § 42 unter (16β)); dieselben resultiren für die Wurzelwerthe $\sigma = \varepsilon, \varepsilon^4$ oder $\varepsilon^2, \varepsilon^3$, während der vierfachen Wurzel $\sigma = 1$ alle Geraden der Congruenz mit diesem Axenpaar entsprechen. Zu den durch das Axenpaar hindurchgehenden Flächen zweiten Grades, welche in sich transformirt werden, gehören ausser der Fläche $F_1^{(1)}$ bestimmte Flächen $F^{(a)}$ und $F^{(d)}$ (vgl. (55a) und (55d) in § 45). Ausserdem werden die Complexe eines Gebüsches Γ in sich transformirt.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Axenpaare:	
7 A)	$G_1^{(1)}$ und $G_2^{(1)} \ldots J^{(2)}$ $J^{(1)} \ldots G_1^{(2)}$ und $G_2^{(2)}$	$T_{52} \ldots T_{75}$	$2.24.1 = 2.24 = 48$	g_0	(64a)

Beispiel:

$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64},$$

$$S^4 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [4\ 3\ {-2}\ {-1^*}]_{70};$$

$$S^2 \,..\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_9 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73},$$

$$S^3 \,..\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ -2\ -1^*]_{67}.$$

Axenpaar g_0 . . . $\sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad \pm i \quad 0;$

Complex-Gebüsch Γ . . . $a_1\,(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi) + a_2\, x_2 + a_4\, x_4 + a_6\, x_6 = 0.$

7 B) 48 zehnzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche.

Die Substitutionen gehen aus denjenigen in 7 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ hervor. Die Correlationen S, S^9 und S^3, S^7, welche den Wurzelwerthen

$$\sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4,\ -1,\ -1,\ -1 \quad \text{und} \quad \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ -1,\ -1,\ -1$$

entsprechen, sind zehnzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F_1^{(1)}$, bei welchen S^5 die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ darstellt, während S^2, S^8 und S^4, S^6 die geschaarten Collineationen 7 A) (nämlich S^2, S^3 und S^4, S) sind. Die Gleichungen des Complexes Ω', des festbleibenden linearen Complexes $\boldsymbol{C}$ und der beiden festbleibenden speciellen Complexe $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}''$ sind in dem nachstehenden Beispiele angegeben (vgl. § 9 I A) unter 4)).

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Complex C:	Kernfläche:
7 B)	$\left\{ \begin{array}{l} \pm G_1^{(1)} \text{ und } \pm G_2^{(1)} \ldots \mp J^{(2)} \\ \pm J^{(1)} \ldots \mp G_1^{(2)} \text{ und } \mp G_2^{(2)} \end{array} \right\}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	$2 \,.\, 24 \,.\, 1 = 2 \,.\, 24 = 48$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Je ein Complex} \\ C_2^{(\alpha)} \text{ oder } C_2^{(\alpha')} \end{array} \right\}$	$F_1^{(1)}$

(vgl. (55α) in § 45) (64b)

Beispiel:

$$S \,...\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64},$$

$$S^9 \,..\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ -2\ -1^*]_{70},$$

$$S^3 \,..\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ -2\ -1^*]_{67};$$

$$S^7 \,..\, \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = -x_6 \end{array} \right\} \;...\; [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73}.$$

$$\Omega' \;...\; \frac{x_1^2}{\sin^2\varphi} + 3\, x_3^2 + x_5^2 \cot\!g^2\varphi - 2\, x_1\, x_3 \operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\boldsymbol{C} \;...\; x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi = 0, \quad \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}'' \;...\; x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi \pm i\, x_5 = 0.$$

8 A) 288 fünfzählige allgemeine Collineationen.

Die Substitutionen setzen sich aus $G_1^{(1)}$, $G_2^{(2)}$ und aus $G_2^{(1)}$, $G_1^{(2)}$ zusammen. Die zugehörigen Collineationen sind auf eine Art eigentliche fünfzählige, welche den Wurzelwerthen

$$\tau = \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4 \text{ und } \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \text{ bez. } 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4$$

entsprechen. (Vgl. § 9 I B) unter 5), sowie § 8 I) unter 12)). Während aber die bei der Cf. $(60_{15}, 30_6)$ auftretenden fünfzähligen Collineationen (vgl. § 16 unter A)) solche sind, für welche die Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten, ebenso wie alle Elemente des Haupttetraeders imaginär sind, entsprechen die fünfzähligen Collineationen 8 A) sämmtlich reellen Substitutionen. Das zugehörige Haupttetraeder hat zu Eckpunkten 4 Punkte $\mathfrak{g}_0$, zu Seitenflächen 4 Ebenen χ_0, das Kantenpaar K_{12}, K_{34} ist aber durch zwei reelle Gerade G, die beiden anderen Kantenpaare durch zwei imaginäre Geradenpaare g_0 gebildet: es ist also von derselben Beschaffenheit, wie das Haupttetraeder für die zehnzähligen Correlationen 6 B) (vgl. (62b)). Die Gleichungen der beiden tetraedralen Complexe Ω_1 und Ω_2, welche bezw. zu den den Substitutionen S, S^4 und S^2, S^3 entsprechenden Transformationen gehören, des Büschels der in sich transformirten Complexe und des Büschels der in sich transformirten Flächen zweiten Grades, zu welchen die Fläche $F_1^{(1)}$ und je eine Fläche $F^{(a)}$ gehört, ergeben sich aus den früher § 8 I) aufgestellten Formeln.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Ecken, Flächen und Kanten des Haupttetraeders:	
$8A)$	$\begin{Bmatrix} G_1^{(1)} \ldots G_2^{(2)} \\ G_2^{(1)} \ldots G_1^{(2)} \end{Bmatrix}$	$T_4 \,..\, T_{51}$	$2.12.12 = 6.48 = 288$	Wie unter (62b)	. . . (65a)

Beispiel zu $8A)$:

$$S \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = x_9 & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = x_8 \end{Bmatrix} \ldots [-4\ 1\ -3\ 2]_{47},$$

$$S^4 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = -x_{30} \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = x_{14} \end{Bmatrix} \ldots [4\ -1^*\ -3\ 2]_{41};$$

$$S^2 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_{10} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = -x_{18} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = -x_{26} \end{Bmatrix} \ldots [-3\ 4\ 1\ -2^*]_{22},$$

$$S^3 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = x_{15} & x'_2 = -x_{12} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = -x_{28} \end{Bmatrix} \ldots [3\ 4\ -1\ -2]_{32}.$$

Elemente des Haupttetraeders wie in 6 B) Beispiel 1).

Tetraedrale Complexe:

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \frac{1}{2}\,x_1{}^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,x_3{}^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,x_5{}^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1\, x_3 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,x_2{}^2 + \frac{1}{2}\,x_4{}^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,x_6{}^2 - \operatorname{tg}\varphi\, x_2\, x_4 = 0 \\ \Omega_2 &\equiv \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,x_1{}^2 + \frac{1}{2}\,x_3{}^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,x_5{}^2 - \operatorname{tg}\varphi\, x_1\, x_3 + \frac{1}{2}\,x_2{}^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,x_4{}^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,x_6{}^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_2\, x_4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Complexbüschel: $(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi) + \mu' (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi) = 0$;

Flächenbüschel: $Z_1\, Z_4 + \lambda'\, Z_2\, Z_3 \equiv [z_2{}^2 \sin{}^2\varphi + z_3{}^2 \cos{}^2\varphi + z_4{}^2 + z_2\, z_3 \sin 2\varphi]$
$$+ \lambda' [z_1{}^2 + z_2{}^2 \cos{}^2\varphi + z_3{}^2 \sin{}^2\varphi - z_2\, z_3 \sin 2\varphi] = 0$$

Z. B.: $\lambda' = 1 \ldots F^{(1)} \ldots z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + z_4{}^2 \equiv x_1{}^2 + x_3{}^2 + x_5{}^2 \equiv x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 = 0$

$\lambda' = -1 \ldots F^{(a)} \ldots \sqrt{5}\,(z_1{}^2 - z_4{}^2) + z_2{}^2 - z_3{}^2 - 4\, z_2\, z_3$

$$\left.\begin{aligned} &\equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)^2 + x_6{}^2 \\ &\equiv (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi)^2 + x_5{}^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

8 B) 288 zehnzählige allgemeine Correlationen.

Die Substitutionen resultiren aus denjenigen in 8 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $1, \varepsilon, \varepsilon^4; -1, -\varepsilon^2, -\varepsilon^3$ für S und S^9 und $1, \varepsilon^2, \varepsilon^3; -1, -\varepsilon, -\varepsilon^4$ für S^3 und S^7. Aus den hier geltenden Werthen (vgl. § 8 unter III), Formeln (48) (δ)..(ϑ))

$$\alpha_{14} = \varepsilon \text{ oder } \varepsilon^3,\ \alpha_{23} = \varepsilon^2 \text{ oder } \varepsilon,\ \alpha_{32} = \varepsilon^3 \text{ oder } \varepsilon^4,\ \alpha_{41} = \varepsilon^4 \text{ oder } \varepsilon^2$$

und den daraus folgenden Werthen:

$$\nu_1 = -\operatorname{cotg}\varphi,\ \nu_3 = -\operatorname{tg}\varphi,\ \nu_5 = 2,\ \nu'_1 = -\frac{i}{\cos\varphi},\ \nu'_3 = \frac{i}{\sin\varphi},\ \nu'_5 = 0 \text{ oder:}$$

$$\nu_1 = \operatorname{tg}\varphi,\ \nu_3 = \operatorname{cotg}\varphi,\ \nu_5 = 2,\ \nu'_1 = -\frac{i}{\sin\varphi},\ \nu'_5 = -\frac{i}{\cos\varphi},\ \nu'_5 = 0$$

ergeben sich in einfacher Weise die Gleichungen der beiden Complexe Ω''_1, Ω''_2, der beiden Complexe der Wechselstrahlen Ω_{w_1}, Ω_{w_2}, der Gewinde $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}''$, der Flächen G_1, G_2 u. s. w. Das zu den Substitutionen S, S^9; S^3, S^7 gehörige Haupttetraeder ist von derselben Beschaffenheit, wie das zu den fünfzähligen Collineationen 8 A) und zu den unter 6 B) betrachteten allgemeinen zehnzähligen Correlationen gehörige, ebenso sind die Gewinde $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}''$ und die Flächen G_1, G_2 dieselben, während die Complexe Ω_1'', Ω_2'' verschieden sind. Ferner findet aber der wesentliche Unterschied zwischen den zehnzähligen Correlationen 6 B) und 8 B) statt, dass, während bei den ersteren die geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 fünfzählige axiale Collineationen bedeuteten, die beiden Complexe der Wechselstrahlen in zwei specielle lineare Complexe zerfielen und zwei Systeme von Kernflächen vorhanden

waren, bei den Correlationen 8 B) die geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 fünfzählige allgemeine Collineationen mit demselben Haupttetraeder bedeuten, die beiden Complexe der Wechselstrahlen, welche mit den Complexen Ω_1, Ω_2 der entsprechenden fünfzähligen allgemeinen Collineationen identisch sind, nicht zerfallen, dagegen aber nur ein System von zwei Kernflächen vorhanden ist (wie aus den Werthen für α_{14}, α_{41}, α_{23}, α_{32} sofort hervorgeht). Die Potenz S^5 bedeutet in beiden Fällen 6 B) und 8 B) die Polar-Correlation in Bezug auf $F_1^{(1)}$.

Von den in § 16 B) betrachteten zehnzähligen Correlationen unterscheiden sich die Correlationen 8 B) dadurch, dass bei ersteren die Substitutionen in tetraedrischen Coordinaten und alle Elemente des Haupttetraeders imaginär sind, dass S^5 eine Nullcorrelation bedeutet und dass zwei Systeme von zwei Kernflächen existiren (vgl. § 8 III Formeln (54) und § 9 Formeln (78)). (Die in Gleichung (78δ) angegebenen Wurzelwerthe können auch durch $\sigma = -1, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ dargestellt werden, ebenso die Werthe für α_{ik} durch $\alpha_{14} = -\varepsilon$ oder ε^2, $\alpha_{23} = \varepsilon^3$ oder $-\varepsilon$, $\alpha_{32} = -\varepsilon^2$ oder ε^4, $\alpha_{41} = \varepsilon^4$ oder $-\varepsilon^3$).

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Elemente des Haupttetraeders:	
8 B)	$\left\{\begin{matrix} \pm G_1^{(1)} \ldots \mp G_2^{(2)} \\ \pm G_2^{(1)} \ldots \mp G_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_4 \ldots T_{51}$	$2 . 12 . 12 = 6 . 48 = 288$	Wie unter 8 A) und unter (62b)	(65b)

Beispiel zu 8 B):

$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = -x_{25} & x'_6 = -x_8 \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{-4\ 1\ -3\ 2}]_{47},$$

$$S^9 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = x_{22} \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = x_{30} \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = -x_{14} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{4\ -1^*\ -3\ 2}]_{41};$$

$$S^3 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{15} & x'_2 = x_{12} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = -x_{20} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_{28} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{3\ 4\ -1\ -2}]_{32},$$

$$S^7 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = -x_{10} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = x_{18} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = x_{26} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{-3\ 4\ 1^*\ -2}]_{22}.$$

Elemente des Haupttetraeders wie in 6 B) Beispiel 1).

$$\left\{\begin{matrix} \Omega''_1 \ldots \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_6^2 + \operatorname{tg}\varphi\, x_2 x_4 = 0 \\ \Omega''_2 \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_5^2 - \operatorname{tg}\varphi\, x_1 x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_4^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_6^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, x_2 x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left| \begin{array}{l} C' \ldots x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi = 0 \\ C'' \ldots x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi = 0 \end{array} \right\}$$

Die beiden Complexe Ωw_1 und Ωw_2 der Wechselstrahlen sind identisch mit den tetraedralen Complexen Ω_1 und Ω_2 des Beispiels zu 8 *A*).

G_1 und G_2 sind die Flächen $F_1^{(1)}$ und $F^{(a)}$ des Beispiels 1) in 6 *B*).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \ldots \operatorname{tg}\varphi\, Z_1 Z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\, Z_2 Z_3 \equiv \operatorname{cotg}\varphi\, Z_1 Z_4 - \operatorname{tg}\varphi\, Z_2 Z_3 \equiv \\ \qquad z_1{}^2 \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} + \frac{1}{2} z_2{}^2 - z_4{}^2 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} - z_2 z_3 = 0 \\ K_2 \ldots \operatorname{cotg}\varphi\, Z_1 Z_4 - \operatorname{tg}\varphi\, Z_2 Z_3 \equiv \operatorname{tg}\varphi\, Z_1 Z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\, Z_2 Z_3 \equiv \\ \qquad z_1{}^2 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} - \frac{1}{2} z_3{}^2 - z_4{}^2 \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} - z_2 z_3 = 0. \end{array} \right.$$

Die Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 stellen die allgemeinen fünfzähligen Collineationen des Beispiels zu 8 A) (und zwar in der Folge S^2, S^4, S, S^3) dar, S^5 bedeutet die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$.

9 A) 960 fünfzehnzählige allgemeine Collineationen.

Die Substitutionen setzen sich aus $C^{(1)}$ und $G^{(2)}$ oder aus $G^{(1)}$ und $C^{(2)}$ in der aus der Zusammenstellung (66a) erkennbaren Weise zusammen. Es ist also immer eine der vier (in (57ζ) § 45 in einer Horizontalreihe stehenden) Substitutionen $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ (oder $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$) und $J^{(1)}$ (oder $J^{(2)}$) mit einer der zwei (in (57ε) § 45 in einer Horizontalreihe stehenden) Substitutionen $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ (oder $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$) und $J^{(2)}$ (oder $J^{(1)}$) combinirt. Hiernach sind die Potenzen einer solchen Substitution $S = S_g \ldots S_c$ in folgender Weise durch die Wurzelwerthe für σ charakterisirt:

$$\left. \begin{array}{ll} S^1 = S_g{}^1 \ldots S^1{}_c,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 & S^{14} = S_g{}^4 \ldots S_c{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ 1,\ \alpha^2,\ \alpha \\ S^2 = S_g{}^2 \ldots S^2{}_c,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1,\ \alpha^2,\ \alpha & S^{13} = S_g{}^3 \ldots S_c{}^1.\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 \\ S^3 = S_g{}^3 \ldots J^{(2)},\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ 1,\ 1,\ 1 & S^{12} = S_g{}^2 \ldots J^{(2)},\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1,\ 1,\ 1 \\ S^4 = S_g{}^4 \ldots S^1{}_c,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 & S^{11} = S_g{}^1 \ldots S_c{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1,\ \alpha^2,\ \alpha \\ S^5 = J^{(1)} \ldots S^2{}_c,\ \sigma = 1,\ 1,\ 1;\ 1,\ \alpha^2,\ \alpha & S^{10} = J^{(1)} \ldots S_c{}^1,\ \sigma = 1,\ 1,\ 1;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 \\ S^6 = S_g{}^1 \ldots J^{(2)},\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1,\ 1,\ 1 & S^9 = S_g{}^4 \ldots J^{(2)},\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ 1,\ 1,\ 1 \\ S^7 = S_g{}^2 \ldots S_c{}^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 & S^8 = S_g{}^3 \ldots S_c{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ 1,\ \alpha^2,\ \alpha \\ \multicolumn{2}{c}{S^{15} = J^{(1)} \ldots J^{(2)},\ \sigma = 1,\ 1,\ 1;\ 1,\ 1,\ 1.} \end{array} \right\} (66a)$$

Diejenigen Potenzen von S, deren Exponenten prim zu 15 sind, nämlich S^1, S^{14}; S^2, S^{13}; S^4, S^{11}; S^7, S^8 bedeuten 15-zählige allgemeine Collineationen, deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{g}_0{}^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0{}^{(\mathfrak{g})}$, vier Ebenen $\chi_0{}^{(\gamma)} = \gamma_0{}^{(\chi)}$ hat (vgl. (22b) in § 42 IV), während die Kantenpaare durch ein reelles Geradenpaar $g^{(c)} = c^{(g)}$ (vergl. (22d), (e) in § 42 IV), je ein imaginäres

Geradenpaar g_0 ((16α), (β) in § 42) und c_0 ((19a), (19b)) gebildet sind. Die nebeneinandergestellten Potenzen von S, deren Exponenten sich zu 15 ergänzen, sind sowohl in tetraedrischen, als in x_i-Coordinaten durch zu einander transponirte Substitutionen dargestellt. Die Gleichungen der beiden tetraedralen Complexe Ω_1 und Ω_2, welche bez. zu den den Substitutionen S^1, S^{14}; S^4, S^{11} und S^2, S^{13}; S^7, S^8 entsprechenden Transformationen gehören, der Büschel der in sich transformirten Complexe und Flächen folgen aus den in § 8 aufgestellten Formeln. (Vergl. das Beispiel unter (66a)). Zu den Complexen gehört je ein Complex $C_2^{(\alpha)}$, $C_2^{(\beta)}$ (vgl. (55α), (55β) in § 45), zu den Flächen die Fläche $F_1^{(1)}$ und je eine Fläche $F^{(d)}$ (vgl. (55d) in § 45).

Die Potenzen S^3, S^6, S^9, S^{12}, S^{15}, deren Exponenten Vielfache von 3 sind, bedeuten **fünfzählige geschaarte Collineationen** mit dem Axenpaar g_0 (vgl. 7 A) unter (64a)), die Potenzen S^5, S^{10}, S^{15}, deren Exponenten Vielfache von 5 sind, bedeuten **dreizählige geschaarte Collineationen** mit dem Axenpaar c_0 (vgl. 5 A) unter (62a)) des Haupttetraeders.

Die Wurzelwerthe der Gleichung in τ sind für S durch

$$\tau = \varepsilon\,\alpha,\quad \varepsilon^4\,\alpha,\quad \varepsilon\,\alpha^2,\quad \varepsilon^4\,\alpha^2$$

dargestellt.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Elemente des Haupttetraeders:	
$9\,A_1)$	$\left\{\begin{matrix} C_2^{(1)}\ldots G_1^{(2)} \text{ und } G_2^{(2)} \\ G_1^{(1)} \text{ und } G_2^{(1)}\ldots C_2^{(2)}\end{matrix}\right\}$	$T_4\,..\,T_{51}$	$2\,.\,12\,.\,24 = \mathbf{12}\,.\,48 = 576$	4 Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(c)} = \mathfrak{c}_0^{(g)}$ 4 Ebenen $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$	. . . (66a$_1$)
$9\,A_2)$	$\left\{\begin{matrix} C_1^{(1)}\ldots G_1^{(2)} \text{ und } G_2^{(2)} \\ G_1^{(1)} \text{ und } G_2^{(1)}\ldots C_1^{(2)}\end{matrix}\right\}$	$T_{52}\,..\,T_{75}$	$2\,.\,8\,.\,24 = \mathbf{16}\,.\,24 = 384$	1 reelles Kantenpaar $g^{(c)} = c^{(g)}$ 1 imaginäres Kantenpaar g_0 1 „ „ c_0	. . . (66a$_2$)

Beispiele: Zu $9A_1$)

$$1)\ S_g{}^1\,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{15} \\ x'_3 = x_{23} \\ x'_5 = x_7 \end{matrix}\right\},\quad S_g{}^2\,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_9 \\ x'_3 = -x_{17} \\ x'_5 = -x_{25} \end{matrix}\right\},\quad S_g{}^3\,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{11} \\ x'_3 = x_{19} \\ x'_5 = -x_{27} \end{matrix}\right\},\quad S_g{}^4\,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{21} \\ x'_3 = -x_{29} \\ x'_5 = x_{13} \end{matrix}\right\},\quad S_g{}^5\,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_1 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_5 = x_5 \end{matrix}\right\}$$

$$S_c{}^1\,..\left\{\begin{matrix} x'_2 = x_{26} \\ x'_4 = -x_{10} \\ x'_6 = -x_{18} \end{matrix}\right\},\quad S_c{}^2\,..\left\{\begin{matrix} x'_2 = -x_{28} \\ x'_4 = x_{12} \\ x'_6 = -x_{20} \end{matrix}\right\},\quad S_c{}^3\,..\left\{\begin{matrix} x'^2 = x_2 \\ x'_4 = x_4 \\ x'_6 = x_6 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} S^1 = S_g{}^1 \ldots S_c{}^1 \ldots [-2\ -1\ 4\ 3]_{48}; & S^{14} = S_g{}^4 \ldots S_c{}^2 \ldots [2\ -1^*\ -4\ 3]_{38} \\ S^4 = S_g{}^1 \ldots S_c{}^1 \ldots [4\ -2\ -1^*\ 3]_{46}; & S^{11} = S_g{}^1 \ldots S_c{}^2 \ldots [-4\ -2\ 1\ 3]_{40} \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} S^2 = S_g{}^2 \ldots S_c{}^2 \ldots [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{23}; & S^{13} = S_g{}^3 \ldots S_c{}^1 \ldots [4\ -3\ -2\ 1]_{33} \\ S^7 = S_g{}^2 \ldots S_c{}^1 \ldots [1\ -3\ -4\ 2]_{27}; & S^8 = S_g{}^3 \ldots S_c{}^2 \ldots [-1\ 3\ -4\ 2]_{29} \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}\ S^{15} = S_g{}^5 \ldots S_c{}^3 \ldots [1\ 2\ 3\ 4]_1.$$

$$\begin{array}{llllll}
Z_1 \ldots & -i \sin \frac{1}{2}\chi & \sin\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & \cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & i \cos\frac{1}{2}\chi & \ldots Z_4 \\
Z_2 \ldots & i \cos \frac{1}{2}\chi & \cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & -\sin\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & i \sin\frac{1}{2}\chi & \ldots Z_3 \\
Z_3 \ldots & -i \cos \frac{1}{2}\chi & \cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & -\sin\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & -i \sin\frac{1}{2}\chi & \ldots Z_2 \\
Z_4 \ldots & i \sin \frac{1}{2}\chi & \sin\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & \cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) & -i \cos\frac{1}{2}\chi & \ldots Z_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
K_{14},\ K_{23} \ldots & \cos\varphi & \pm i \sin\psi & -\sin\varphi & \mp i\cos\psi & 0 & 0 & \ldots g^{(c)} = c^{(g)} \\
K_{12},\ K_{34} \ldots & 0 & \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 & \pm i & \ldots c_0 \\
K_{13},\ K_{42} \ldots & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & \pm i & 0 & \ldots g_0 .
\end{array}$$

Tetraedrale Complexe:

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega_1 \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_3^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_5^2 - \operatorname{tg}\varphi\, x_1 x_3 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_4^2 - \frac{1}{2} x_6^2 - x_2 x_4 = 0 \\
\Omega_2 \ldots \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_4^2 - \frac{1}{2} x_6^2 - x_2 x_4 = 0
\end{array}\right\}$$

Complexbüschel: $(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi) + \mu' (x_2 \sin\psi - x_4 \cos\psi) = 0.$

Flächenbüschel: $Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 \equiv$

$$\left.\begin{array}{l}
\equiv\left[z_1^2 \sin^2\frac{1}{2}\chi + z_2^2 \sin^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) + z_3^2 \cos^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) + z_4^2 \cos^2\frac{1}{2}\chi - z_1 z_4 \sin\chi + z_2 z_3 \sin(2\varphi+\chi)\right] \\
+\lambda'\left[z_1^2 \cos^2\frac{1}{2}\chi + z_2^2 \cos^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) + z_3^2 \sin^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\chi\right) + z_4^2 \sin^2\frac{1}{2}\chi + z_1 z_4 \sin\chi - z_2 z_3 \sin(2\varphi+\chi)\right]
\end{array}\right\} = 0$$

$$\text{z. B. } \lambda' = 1 \ldots F_1^{(1)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 \equiv x_1^2+x_3^2+x_5^2 \equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda' = -1 \,.\,.\, F^{(d)} \ldots (z_1^2-z_4^2)\cos\chi + (z_2^2-z_3^2)\cos(2\varphi+\chi) + 2 z_1 z_4 \sin\chi - 2 z_2 z_3 \sin(2\varphi+\chi) = 0\ ^{1)} \\
\qquad \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \cos\psi + x_4 \sin\psi)^2 + x_6^2 = 0 \\
\qquad \equiv (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \sin\psi - x_4 \cos\psi)^2 + x_5^2 = 0 \\
\qquad \equiv (F_2^{(1)} + F_7^{(1)} + F_{10}^{(1)}) \sin\varphi + (F_3^{(1)} + F_7^{(1)} - F_{10}^{(1)}) \cos\varphi = 0 \,.
\end{array}\right\} \text{(vgl. (55d))}$$

Die fünfzähligen geschaarten Collineationen mit Axenpaar g_0 sind dargestellt durch:

$$\left.\begin{array}{l}
S^3 = S_g^3 \ldots S_c^3 \ldots [4\ 3\ {-2}\ {-1}^*]_{67};\ S^{12} = S_g^2 \ldots S_c^3 \ldots [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73} \\
S^6 = S_g^1 \ldots S_c^3 \ldots [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64};\ S^9 = S_g^4 \ldots S_c^3 \ldots [4\ 3\ {-2}\ {-1}^*]_{70}
\end{array}\right. ;\ S^{15} = S_g^5 \ldots S_c^3 \ldots [1\ 2\ 3\ 4]_1$$

(vgl. das Beispiel unter 7 A)); die dreizähligen geschaarten Collineationen mit dem Axenpaar c_0 (vgl. 5 A)) entsprechen den Substitutionen:

$$S^5 = S_g^5 \ldots S_c^2 \ldots [4\ 3\ 2\ 1^*]_{61};\ S^{10} = S_g^5 \ldots S_c^1 \ldots [4\ {-3}\ 2\ {-1}^*]_{62}.$$

[1]) Die in (55d) in § 55 angegebene Form führt sich leicht auf obige zurück durch Benutzung der Beziehungen:

$$\cos\chi = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi,\quad \sin\chi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\varphi;\ \sin 2\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos(2\varphi+\chi) \equiv -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi,\ \sin(2\varphi+\chi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\varphi.$$

2) Zu $9A_2$):

$$S_g^1 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_7 \\ x'_3 = -x_{15} \\ x'_5 = -x_{23} \end{array} \right\}, \quad S_g^2 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = -x_{29} \\ x'_3 = x_{13} \\ x'_5 = -x_{21} \end{array} \right\}, \quad S_g^3 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_{25} \\ x'_3 = x_9 \\ x'_5 = x_{17} \end{array} \right\},$$

$$S_g^4 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = -x_{11} \\ x'_3 = -x_{19} \\ x'_5 = x_{27} \end{array} \right\}, \quad S_g^5 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_5 = x_5 \end{array} \right\};$$

$$S_c^1 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = -x_4 \\ x'_4 = -x_6 \\ x'_6 = x_2 \end{array} \right\}, \quad S_c^2 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = x_6 \\ x'_4 = -x_2 \\ x'_6 = -x_4 \end{array} \right\}, \quad S_c^3 \ldots \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = x_2 \\ x'_4 = x_4 \\ x'_6 = x_6 \end{array} \right\}$$

$$S^1 = S_g^1 \ldots S_c^1 \ldots [1^* \; 4 \; 2 \; 3]_{74} \text{ u. s. w.}$$

9 B) 960 dreissigzählige allgemeine Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen resultiren aus denjenigen in 9 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Die **geraden** Potenzen von

$$S^1 = \pm S^1_g \ldots \mp S^1_c, \; \sigma = 1, \varepsilon, \varepsilon^4; -1, -\alpha, -\alpha^2 \text{ oder } \sigma = -1, -\varepsilon, -\varepsilon^4; 1, \alpha, \alpha^2$$

sind genau die 15 in (66α) unter 9 A) angegebenen Substitutionen, welche 8 fünfzehnzählige allgemeine, 4 fünfzählige geschaarte, 2 dreizählige geschaarte Collineationen und die Identität bedeuten und zwar entsprechen die Potenzen $S^2, S^4, S^6, S^8, S^{10}, S^{12}, S^{14}, S^{16}, S^{18}, S^{20}, S^{22}, S^{24}, S^{26}, S^{28}, S^{30}$, bez. den darunter stehenden (66α)

$$S^2, S^4, S^6, S^8, S^{10}, S^{12}, S^{14}, S, S^3, S^5, S^7, S^9, S^{11}, S^{13}, S^{15}.$$

Diejenigen Potenzen von $S^1 = \pm S^1_g \ldots \mp S^1_c$, deren Exponenten prim zu 30 sind, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} S^1 = \pm S_g^1 \ldots \mp S_c^1, \; \sigma = 1, \varepsilon, \varepsilon^4; -1, -\alpha, -\alpha^2 \\ S^{29} = \pm S_g^4 \ldots \mp S_c^2, \; \sigma = 1, \varepsilon^4, \varepsilon; -1, -\alpha^2, -\alpha \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S^{11} = \pm S_g^1 \ldots \mp S_c^2, \; \sigma = 1, \varepsilon, \varepsilon^4; -1, -\alpha^2, -\alpha \\ S^{19} = \pm S_g^4 \ldots \mp S_c^1, \; \sigma = 1, \varepsilon^4, \varepsilon; -1, -\alpha, -\alpha^2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \ldots (66\beta_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} S^7 = \pm S_g^2 \ldots \mp S_c^1, \; \sigma = 1, \varepsilon^2, \varepsilon^3; -1, -\alpha, -\alpha^2 \\ S^{23} = \pm S_g^3 \ldots \mp S_c^2, \; \sigma = 1, \varepsilon^3, \varepsilon^2; -1, -\alpha^2, -\alpha \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S^{17} = \pm S_g^2 \ldots \mp S_c^2, \; \sigma = 1, \varepsilon^2, \varepsilon^3; -1, -\alpha^2, -\alpha \\ S^{13} = \pm S_g^3 \ldots \mp S_c^1, \; \sigma = 1, \varepsilon^3, \varepsilon^2; -1, -\alpha, -\alpha^2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \ldots (66\beta_2)$$

bedeuten **dreissigzählige allgemeine Correlationen**, deren Haupttetraeder dasselbe ist, wie für die fünfzehnzähligen Collineationen in 9 A), während die vier Potenzen von S^1, deren ungerade Exponenten Vielfache von 3 sind, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} S^3 \;\;= \pm S_g{}^3 \;\ldots\; \mp S_c{}^3,\; \sigma = 1,\; \varepsilon^3,\; \varepsilon^2;\; -1,\; -1,\; -1 \\ S^{27} = \pm S_g{}^2 \;\ldots\; \mp S_c{}^3,\; \sigma = 1,\; \varepsilon^2,\; \varepsilon^3;\; -1,\; -1,\; -1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} S^9 \;\;= \pm S_g{}^4 \;\ldots\; \mp S_c{}^3,\; \sigma = 1,\; \varepsilon^4,\; \varepsilon;\; -1,\; -1,\; -1 \\ S^{21} = \pm S_g{}^1 \;\ldots\; \mp S_c{}^3,\; \sigma = 1,\; \varepsilon,\; \varepsilon^4;\; -1,\; -1,\; -1 \end{array}\right. \end{array}\right\} \;..\; (66\beta_3)$$

zehnzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche von der Art, wie sie in 7 B) unter (64b) betrachtet wurden, und die zwei Potenzen von S^1, deren ungerade Exponenten Vielfache von 5 sind, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l} S^5 \;= \pm S_g{}^5 \;\ldots\; \mp S_c{}^2,\; \sigma = -1,\; -1,\; -1;\; 1,\; \alpha^2,\; \alpha \\ S^{25} = \pm S_g{}^5 \;\ldots\; \mp S_c{}^1,\; \sigma = -1,\; -1,\; -1;\; 1,\; \alpha,\; \alpha^2 \end{array}\right\} \;..\; (66\beta_4)$$

sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche von der Art, wie sie in 5 B) unter (62b) betrachtet wurden, bedeuten, und endlich die Substitution:

$$S^{15} = \pm S^5{}_g \;\ldots\; \mp S^3{}_c,\; \sigma = \pm 1,\; \pm 1,\; \pm 1;\; \mp 1,\; \mp 1,\; \mp 1 \quad \ldots\; (66\beta_5)$$

die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ bedeutet.

Was die dreissigzähligen Correlationen $(66\beta_1)$, $(66\beta_2)$ betrifft, so folgen aus den hier geltenden Werthen (vgl. § 8 unter III, Formeln $(48\delta)\,..\,(48\vartheta)$)

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \alpha_{14} = \varepsilon^2\,\alpha^2 & & \nu_1 = \operatorname{tg}\varphi,\;\; \nu'_1 = -\dfrac{i}{\sin\varphi} \\ \alpha_{23} = \varepsilon^2\,\alpha & \alpha_{14}+\alpha_{41} = \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi + \dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\varphi} & \\ \alpha_{32} = \varepsilon^3\,\alpha^2 & & \nu_3 = 1,\;\; \nu'_3 = \dfrac{i}{\sqrt{3}} \\ \alpha_{41} = \varepsilon^3\,\alpha & \alpha_{23}+\alpha_{32} = \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi - \dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\varphi} & \\ & & \nu_5 = 2,\;\; \nu'_5 = 0 \end{array}\right\} \;\ldots\; (66\gamma_1)$$

für die Substitutionen $(66\beta_1)$ und analog aus:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \alpha_{14} = \varepsilon^4\,\alpha & & \nu_1 = -\operatorname{cotg}\varphi,\;\; \nu'_1 = -\dfrac{i}{\cos\varphi} \\ \alpha_{23} = \varepsilon^4\,\alpha^2 & \alpha_{14}+\alpha_{41} = -\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\varphi} & \\ \alpha_{32} = \varepsilon\,\alpha & & \nu_3 = 1,\;\; \nu'_3 = -\dfrac{i}{\sqrt{3}} \\ \alpha_{41} = \varepsilon\,\alpha^2 & \alpha_{23}+\alpha_{32} = -\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi - \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\varphi} & \\ & & \nu_5 = 2,\;\; \nu'_5 = 0 \end{array}\right\} \;\ldots\; (66\gamma_2)$$

für die Substitutionen $(66\beta_2)$ die Gleichungen der beiden Complexe Ω''_1, Ω''_2, der Complexe der Wechselstrahlen Ω_{w_1}, Ω_{w_2}, welche bezw. mit den tetraedralen Complexen Ω_1, Ω_2 der fünfzehnzähligen Collineationen in 9 A) übereinstimmen, der Gewinde C', C'', der Flächen G_1, G_2 (d. h. der Flächen $Z_1\,Z_4 + Z_2\,Z_3 = 0$ und $Z_1\,Z_4 - Z_2\,Z_3 = 0$ in 9 A)), sowie die Gleichungen der beiden Systeme von Kernflächen $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Elemente des Haupttetraeders:	
9 B_1)	$\pm C_2{}^{(1)} \ldots \mp G_1{}^{(2)}$ und $\mp G_2{}^{(2)}$ $\pm G_1{}^{(1)}$ und $\mp G_2{}^{(1)} \ldots \mp C_2{}^{(2)}$	$T_1\,..\,T_{51}$	2 . 12 . 24 = **12** . 48 = 576	Wie in (66a)	.. $(66b_1)$
9 B_2)	$\pm C_1{}^{(1)} \ldots \mp G_1{}^{(2)}$ und $\mp G_2{}^{(2)}$ $\pm G_1{}^{(1)}$ und $\mp G_2{}^{(1)} \ldots \mp C_1{}^{(2)}$	$T_{52}\,..\,T_{75}$	2 . 8 . 24 = **16** . 24 = 384	Wie in (66a)	.. $(66b_2)$

Beispiele: 1) Zu $9 B_1$)

S_g^1, S_g^2, S_g^3, S_g^4, S_g^5 und S_c^1, S_c^2, S_c^3 wie im Beispiele 1) zu $9 A_1$).

$$\left\{\begin{array}{l} S^1 = \pm S_g^1 \ldots \mp S_c^1 \ldots [\overline{-2\ -1\ 4\ 3}]_{48}; \quad S^{29} = \pm S_g^4 \ldots \mp S_c^2 \ldots [\overline{2\ -1^*\ -4\ 3}]_{38} \\ S^{11} = \pm S_g^1 \ldots \mp S_c^2 \ldots [\overline{-4\ -2\ 1\ 3}]_{40}; \quad S^{19} = \pm S_g^4 \ldots \mp S_c^1 \ldots [\overline{4\ -2\ -1^*\ 3}]_{46} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} S^7 = \pm S_g^2 \ldots \mp S_c^1 \ldots [\overline{1\ -3\ -4\ 2}]_{27}; \quad S^{23} = \pm S_g^3 \ldots \mp S_c^2 \ldots [\overline{-1\ 3\ -4\ 2}]_{29} \\ S^{17} = \pm S_g^2 \ldots \mp S_c^2 \ldots [\overline{-4\ 3\ -2\ 1^*}]_{23}; \quad S^{13} = \pm S_g^3 \ldots \mp S_c^1 \ldots [\overline{4\ -3\ -2\ 1}]_{33} \end{array}\right\}.$$

Elemente des Haupttetraeders wie im Beispiele 1) zu $9 A_1$).

Complexe:

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega''_1 \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_3^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_5^2 - \operatorname{tg}\varphi\, x_1 x_3 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_2^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_4^2 + \frac{1}{2} x_6^2 + x_2 x_4 = 0 \\ \Omega''_2 \ldots \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_2^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_4^2 + \frac{1}{2} x_6^2 + x_2 x_4 = 0 \end{array}\right\}.$$

Complexe Ω_{w_1}, Ω_{w_2} der Wechselstrahlen identisch mit den tetraedralen Complexen Ω_1, Ω_2 im Beispiel 1) zu $9 A$);

$$\left\{\begin{array}{l} C' \ldots x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi = 0 \\ C'' \ldots x_2 \sin\varphi - x_4 \cos\varphi = 0 \end{array}\right\};$$

$\boldsymbol{G}_1$ und $\boldsymbol{G}_2$ sind die Flächen $F_1^{(1)}$ und $F^{(d)}$ des Beispiels 1) zu $9 A_1$).

Zwei Systeme von Kernflächen:

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(1)} \ldots Z_1 Z_4 \left(\operatorname{cotg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) \equiv Z_1 Z_4 \left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(\operatorname{cotg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) \equiv \\ \qquad \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_3^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_4^2 - \operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0 \\ K_2^{(1)} \ldots Z_1 Z_4 \left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(\operatorname{cotg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) \equiv Z_1 Z_4 \left(\operatorname{cotg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\right) \equiv \\ \qquad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_1^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 - z_2 z_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(2)} \ldots Z_1 Z_4 \left(-\operatorname{tg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(-\operatorname{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) \equiv Z_1 Z_4 \left(-\operatorname{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(-\operatorname{tg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) \equiv \\ \qquad -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} z_4^2 - z_1 z_4 + \operatorname{cotg}\varphi\, z_2 z_3 = 0 \\ K_2^{(2)} \ldots Z_1 Z_4 \left(-\operatorname{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(-\operatorname{tg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) \equiv Z_1 Z_4 \left(-\operatorname{tg}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) + Z_2 Z_3 \left(-\operatorname{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}\right) \equiv \\ \qquad \frac{1}{2} z_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} z_2^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} z_4^2 + z_1 z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\, z_2 z_3 = 0 . \end{array}\right\}$$

Die zehnzähligen Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F_1^{(1)}$ (vgl. ($66\beta_3$)) sind dargestellt durch:

$$S^3 = \pm S_g^3 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{4\ 3\ -2\ -1^*}]_{67}; \quad S^{27} = \pm S_g^2 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{73},$$

$$S^9 = \pm S_g^4 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{4\ 3\ -2\ -1^*}]_{70}; \quad S^{21} = \pm S_g^1 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{64},$$

$$S^{15} = \pm S_g^5 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1,$$

(vgl. das Beispiel unter 7 B)); die sechszähligen Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F_1^{(1)}$ (vgl. (66β_4)) entsprechen den Substitutionen:

$$S^5 = \pm S_g{}^5 \dots \mp S_c{}^2 \dots [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{61};\ S^{25} = \pm S_g{}^5 \dots \mp S_c{}^1 \dots [\overline{4\ {-3}\ 2\ {-1^*}}]_{62},$$
$$S^{15} = \pm S_g{}^5 \dots \mp S_c{}^3 \dots [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$$

(vgl. unter 5 B)).

10 A) 720 zehnzählige allgemeine Collineationen.

Die Substitutionen setzen sich aus $B^{(1)}$ und $G^{(2)}$ oder aus $G^{(1)}$ und $B^{(2)}$ in der aus der Zusammenstellung (67a) erkennbaren Weise zusammen; und zwar ist immer eine der vier Substitutionen ((57ζ) in § 46) $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ (oder $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$) und $J^{(1)}$ (oder $J^{(2)}$) mit einer Substitution (vergl. (57δ)) $B_1^{(2)}$, $B_2^{(2)}$ (oder $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$) und $J^{(2)}$ (oder $J^{(1)}$) combinirt. Die Potenzen einer solchen Substitution $S = S_g \dots S_b$ sind in folgender Weise durch die Wurzelwerthe für σ charakterisirt:

$$\left.\begin{array}{l} S^1 = S_g{}^1 \,.\,.\, S_b{}^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1, -1, -1;\ S^9 = S_g{}^4 \,.\,.\, S_b{}^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ 1, -1, -1 \\ S^3 = S_g{}^3 \,.\,.\, S_b{}^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ 1, -1, -1;\ S^7 = S_g{}^2 \,.\,.\, S_b{}^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1, -1, -1 \end{array}\right\} (67\alpha_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} S^2 = S_g{}^2 \,.\,.\, S_b{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ 1, 1, 1;\ \ S^8 = S_g{}^3 \,.\,.\, S_b{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ 1, 1, 1 \\ S^4 = S_g{}^4 \,.\,.\, S_b{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ 1, 1, 1;\ \ S^6 = S_g{}^1 \,.\,.\, S_b{}^2,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ 1, 1, 1 \end{array}\right\} (67\alpha_2)$$

$$S^5 = S_g{}^5 \,.\,.\, S_b{}^1,\ \sigma = 1,\ 1,\ 1;\ 1, -1, -1 \ \dots\dots\dots \ (67\alpha_3)$$

Die vier Potenzen von S (67α_1), deren Exponenten prim zu 10 sind, bedeuten zehnzählige, auf zwei Arten eigentliche allgemeine Collineationen, deren Haupttetraeder 4 Eckpunkte $\mathfrak{g}_0{}^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0{}^{(\mathfrak{g})}$, 4 Ebenen $\chi_0{}^{(\beta)} = \beta_0{}^{(\chi)}$ hat (vgl. (23b) in § 42 V), während die Kantenpaare durch ein reelles Geradenpaar $g^{(b)} = b^{(g)}$ (vergl. (23d), (e) in § 42 V), je ein imaginäres Geradenpaar g_0 ((16α), (β) in § 42 I) und b_0 ((21a), (b) in § 42 III) gebildet sind. Auch hier sind die nebeneinander gestellten Potenzen von S, deren Exponenten sich zu 10 ergänzen, sowohl in tetraedrischen, als auch in x_i-Coordinaten durch zu einander transponirte Substitutionen dargestellt. Die Wurzelwerthe der Gleichung in τ sind

$$\tau = -i\,\varepsilon,\ i\,\varepsilon,\ -i\,\varepsilon^4,\ i\,\varepsilon^4,$$

aus welchen wegen

$$\alpha_1\,\alpha_4 = \alpha_2\,\alpha_3 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_1\,\alpha_3 = \alpha_4\,\alpha_2 = -1$$

erhellt, dass die entsprechenden zehnzähligen Collineationen auf zwei Arten eigentliche sind (vergl. § 8 unter I (28ε, ε')). Die Gleichungen der beiden

tetraedralen Complexe Ω_1, Ω_2, welche bez. zu den den Substitutionen S^1, S^9 und S^3, S^7 entsprechenden Transformationen gehören, der beiden Büschel der in sich transformirten Gewinde und Flächen folgen aus den Formeln des § 8 unter I. Zu den Gewinden des einen Büschels gehört je einer der 30 Complexe $C_{(1)}$ ((42) in § 44) und je einer der Complexe $C^{(\alpha)}$, $C^{(\alpha')}$ ((55α) in § 45), zu den Gewinden des zweiten Büschels gehören zwei Complexe $C_{(1)}$; zu den Flächen des einen Büschels gehört die Fläche $F_1^{(1)}$ und je eine Fläche $F^{(b)}$ ((55b) in § 45), zu den Flächen des zweiten Büschels gehören zwei Flächen $F^{(b)}$.

Die vier Potenzen von S (67α_2), deren Exponenten **gerade** sind, bedeuten **fünfzählige geschaarte** Collineationen mit dem Axenpaar g_0 (vgl. 7 A) unter (64a)), die Potenz S^5 bedeutet eine **elliptisch geschaarte Involution** mit dem Axenpaar b_0 (vgl. 3 A) unter (60a)) des Haupttetraeders.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Elemente des Haupttetraeders:	
$10A_1)$	$\begin{cases} B_2^{(1)} \ldots G_1^{(2)} \text{ und } G_2^{(2)} \\ G_1^{(1)} \text{ und } G_2^{(1)} \ldots B_2^{(2)} \end{cases}$	$T_4 \ldots T_{51}$	$2 . 12 . 24 = 12 . 48 = 576$	4 Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$ 4 Ebenen $\chi_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\chi)}$	. . . (67a$_1$)
$10A_2)$	$\begin{cases} B_1^{(1)} \ldots G_1^{(2)} \text{ und } G_2^{(2)} \\ G_1^{(1)} \text{ und } G_2^{(1)} \ldots B_1^{(2)} \end{cases}$	$T_{52} \ldots T_{75}$	$2 . 3 . 24 = 6 . 24 = 144$	1 reelles Kantenpaar $g^{(b)} = b^{(g)}$ 1 imaginäres Kantenpaar g_0 1 " " b_0	. . . (67a$_2$)

Beispiele zu 10 A_2):

$$S_g{}^1 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = x_7 \\ x'_3 = -x_{15} \\ x'_5 = -x_{23} \end{Bmatrix}, \quad S_g{}^2 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = -x_{29} \\ x'_3 = x_{13} \\ x'_5 = -x_{21} \end{Bmatrix}, \quad S_g{}^3 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = x_{25} \\ x'_3 = x_9 \\ x'_5 = x_{17} \end{Bmatrix}, \quad S_g{}^4 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = -x_{11} \\ x'_3 = x_{19} \\ x'_5 = -x_{27} \end{Bmatrix}, \quad S_g{}^5 \ldots \begin{Bmatrix} x'_1 = x_1 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_5 = x_5 \end{Bmatrix};$$

$$S_b{}^1 \ldots \begin{Bmatrix} x'_2 = x_2 \\ x'_4 = -x_4 \\ x'_6 = -x_6 \end{Bmatrix}, \quad S_b{}^2 \ldots \begin{Bmatrix} x'_2 = x_2 \\ x'_4 = x_4 \\ x'_6 = x_6 \end{Bmatrix}.$$

Die **zehnzähligen Collineationen** (67α_1) sind:

$$\begin{Bmatrix} S^1 = S_g{}^1 \ldots S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ -1\ {}^*2]_{73}; & S^9 = S_g{}^4 \ldots S_b{}^1 \ldots [-3\ 4\ -1\ {}^*2]_{67} \\ S^3 = S_g{}^3 \ldots S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ -1^*\ 2]_{64}; & S^7 = S_g{}^2 \ldots S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ 1^*\ -2]_{70} \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} Z_1 \ldots & i \sin \frac{1}{2}\varphi & \sin \frac{1}{2}\varphi & \cos \frac{1}{2}\varphi & i \cos \frac{1}{2}\varphi \ldots Z_4 \\ Z_2 \ldots & \cos \frac{1}{2}\varphi & i \cos \frac{1}{2}\varphi & -i \sin \frac{1}{2}\varphi & -\sin \frac{1}{2}\varphi \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots & \cos \frac{1}{2}\varphi & -i \cos \frac{1}{2}\varphi & i \sin \frac{1}{2}\varphi & -\sin \frac{1}{2}\varphi \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots & -i \sin \frac{1}{2}\varphi & \sin \frac{1}{2}\varphi & \cos \frac{1}{2}\varphi & -i \cos \frac{1}{2}\varphi \ldots Z_1 \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{14},\ K_{23}\ \ldots \cos\varphi\ \pm i\ \ -\sin\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ g^{(b)} = b^{(g)} \\ K_{12},\ K_{34}\ \ldots \sin\varphi\ \ 0\ \ \cos\varphi\ \ 0\ \ \pm i\ \ 0\ \ldots\ g_0 \\ K_{13},\ K_{42}\ \ldots\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \pm i\ \ldots\ b_0 \end{array}\right\}.$$

Tetraedrale Complexe:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 \ldots\ \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 + x_2^2 - x_4^2 - x_6^2 = 0 \\ \Omega_2 \ldots -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_1^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_5^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_5 + x_2^2 - x_4^2 - x_6^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Zwei Complexbüschel:

$$(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi) + \mu' x_2 = 0 \text{ und } x_4 + \mu'' x_6 = 0.$$

Zwei Flächenbüschel:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 Z_4 + \lambda' Z_2 Z_3 \equiv \left[\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,(z_1^2+z_2^2) + \cos^2\frac{1}{2}\varphi\,(z_3^2+z_4^2) + \sin\varphi\,(z_1 z_4 + z_2 z_3)\right] \\ \quad + \lambda' \left[\cos^2\frac{1}{2}\varphi\,(z_1^2+z_2^2) + \sin^2\frac{1}{2}\varphi\,(z_3^2+z_4^2) - \sin\varphi\,(z_1 z_4 + z_2 z_3)\right] \end{array}\right\} = 0;$$

$$\text{z. B. } \lambda' = 1 \ldots F_1^{(1)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 \equiv x_1^2+x_3^2+x_5^2 \equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' = -1 \ldots F^{(b)} \ldots -\cos\varphi\,(z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2) + 2\sin\varphi\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) \equiv -F_2^{(1)}\cos\varphi + F_{10}^{(1)}\sin\varphi \\ \quad \equiv (x_1\cos\varphi - x_3\sin\varphi)^2 + x_4^2 + x_6^2 \equiv (x_1\sin\varphi + x_3\cos\varphi)^2 + x_2^2 + x_5^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55 b_1) in § 45).

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 Z_3 + \lambda'' Z_4 Z_2 \equiv [i\sin\varphi\,(z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2) + 2\sin\varphi\,(z_1 z_2 - z_3 z_4) + \\ \quad + 2\cos\varphi\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) + 2i\cos\varphi\,(z_1 z_4 - z_2 z_3)] \\ \quad + \lambda''\,[-i\sin\varphi\,(z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2) + 2\sin\varphi\,(z_1 z_2 - z_3 z_4) + \\ \quad + 2\cos\varphi\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) - 2i\cos\varphi\,(z_1 z_4 - z_2 z_3)] \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{z. B. } \lambda'' = 1 \ldots F^{(b)} \ldots 2\sin\varphi\,(z_1 z_2 - z_3 z_4) + 2\cos\varphi\,(z_1 z_3 + z_4 z_2) \equiv F_5^{(1)}\sin\varphi + F_9^{(1)}\cos\varphi \\ \quad \equiv (x_1\cos\varphi - x_3\sin\varphi)^2 + x_2^2 + x_4^2 \equiv (x_1\sin\varphi + x_3\cos\varphi)^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{array}\right\} = 0,$$

(vgl. (55 b_3))

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'' = -1 \ldots F^{(b)} \ldots (z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2)\sin\varphi + 2(z_1 z_4 - z_2 z_3)\cos\varphi \equiv F_3^{(1)}\sin\varphi + F_7^{(1)}\cos\varphi \\ \quad \equiv (x_1\cos\varphi - x_3\sin\varphi)^2 + x_2^2 + x_6^2 \equiv (x_1\sin\varphi + x_3\cos\varphi)^2 + x_4^2 + x_5^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55 b_2)).

Die fünfzähligen geschaarten Collineationen mit Axenpaar g_0 (67 a_2) sind dargestellt durch:

$$\left.\begin{array}{l} S^2 = S_g^2 \ldots S_b^2 \ldots [4\ \ 3\ \ -2\ \ -1]_{70};\quad S^8 = S_g^3 \ldots S_b^2 \ldots [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*]_{64} \\ S^4 = S_g^4 \ldots S_b^2 \ldots [4\ \ 3\ \ -2\ \ -1^*]_{67};\quad S^6 = S_g^1 \ldots S_b^2 \ldots [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*]_{73} \end{array}\right\}$$

(vgl. 7 A)) und die elliptisch geschaarte Involution mit dem Axenpaar b_0 entspricht der Substitution:

$$S^5 = S_g^5 \ldots S_b^1 \ldots [2\ \ -1\ \ -4\ \ 3]_1$$

(vgl. 3 A)).

10 B) 720 zehnzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F^{(b)}$.

Die Substitutionen gehen aus denjenigen in 10 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ hervor. Die geraden Potenzen von

$$S^1 = \pm S^1_g \ldots \mp S_b^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ -1,\ 1,\ 1 \text{ oder } \sigma = -1,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^4;\ 1,\ -1,\ -1$$

bedeuten wiederum, wie in 10 A), fünfzählig geschaarte Collineationen mit dem Axenpaar g_0, während die Potenz S^5 eine Null-Correlation bedeutet, deren Complex einer der 30 Complexe $C_{(1)}$ ((42) in § 44) ist.

Diejenigen Potenzen von S^1, deren Exponenten prim zu 10 sind, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} S^1 = \pm S_g^1 \ \ldots \ \mp S_b^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ -1,\ 1,\ 1 \\ S^9 = \pm S_g^4 \ \ldots \ \mp S_b^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon;\ -1,\ 1,\ 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} S^3 = \pm S_g^3 \ \ldots \ \mp S_b^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2;\ -1,\ 1,\ 1 \\ S^7 = \pm S_g^2 \ \ldots \ \mp S_b^1,\ \sigma = 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3;\ -1,\ 1,\ 1 \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (67\beta)$$

bedeuten zehnzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche. Diese Kernfläche ist eine Fläche $F^{(b)}$ (vgl. (55b) in § 45) und zwar die Fläche

$$Z_1\, Z_4 - Z_2\, Z_3 = 0$$

des ersten Flächenbüschels der entsprechenden zehnzähligen Collineationen in 10 A). Von den unter 7 B) betrachteten zehnzähligen Correlationen mit z. K., welche den fünfzähligen geschaarten Collineationen 7 A) entsprachen und für welche $F_1^{(1)}$ die Kernfläche war, sind diese Correlationen wesentlich dadurch unterschieden, dass S^5 hier eine Nullcorrelation, bei jenen aber die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ bedeutet. (Vgl. § 9 unter II A 4)). Dieser Unterschied drückt sich auch deutlich in den Wurzelwerthen für σ aus, welche für die Correlationen 7 B)

$$\sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ -1,\ -1,\ -1,$$

für die hier betrachteten dagegen

$$\sigma = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4;\ -1,\ 1,\ 1$$

sind. Die Gleichungen der Complexe Ω'_1, Ω'_2, welche bez. den zu den Substitutionen S^1, S^9 und S^3, S^7 gehörigen Transformationen entsprechen, des festbleibenden linearen Complexes, welcher der zu dem S^5 entsprechenden Nullsysteme zugehörige ist, der Kernfläche und der beiden festbleibenden speciellen Complexe sind nach den früher in § 8 unter II) gegebenen Formeln leicht aufzustellen.

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Kernfläche:	
$10B_1)$	$\pm B_2^{(1)} \ldots \mp G_1^{(2)}$ und $\mp G_2^{(2)}$ $\pm G_1^{(1)}$ und $\pm G_2^{(1)} \ldots \mp B_2^{(2)}$	$T_4 \,..\, T_{51}$	$2 \,.\, 12 \,.\, 24 = \mathbf{12} \,.\, 48 = 576$	1 Fläche $F^{(b)}$	(67b₁)
$10B_2)$	$\pm B_1^{(1)} \ldots \mp G_1^{(2)}$ und $\mp G_2^{(2)}$ $\pm G_1^{(1)}$ und $\pm G_2^{(1)} \ldots \mp B_1^{(2)}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	$2 \,.\, 3 \,.\, 24 = \mathbf{6} \,.\, 24 = 144$		(67b₂).

Beispiel zu $10 B_2)$:

$S_g{}^1$, $S_g{}^2$, $S_g{}^3$, $S_g{}^4$, $S_g{}^5$ und $S_b{}^1$, $S_b{}^2$ wie im Beispiel zu $10 A_2)$,

S^2, S^8; S^4, S^6 fünfzählig geschaarte Collineationen wie im Beispiel zu $10 A_2)$,

$S^5 = S_g{}^5 \,..\, S_b{}^1 \,..\, [2\ -1\ -4\ 3]_1$ Nullcorrelation mit Complex $x_2 = 0$ (vgl. (80ε) in § 11).

Zehnzählige Correlationen mit z. K.:

$$\left\{\begin{array}{l} S^1 = \pm S_g{}^1 \ldots \mp S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ -1^*\ 2]_{73};\ S^9 = \pm S_g{}^4 \ldots \mp S_b{}^1 \ldots [-3\ 4\ -1^*\ 2]_{67} \\ S^3 = \pm S_g{}^3 \ldots \mp S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ -1^*\ 2]_{64};\ S^7 = \pm S_g{}^2 \ldots \mp S_b{}^1 \ldots [3\ -4\ 1^*\ -2]_{70} \end{array}\right\}$$

$$\Omega'_1 \ldots \frac{1}{2} x_1{}^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_3{}^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_5{}^2 - \operatorname{cotg}\varphi\ x_1\ x_3 - x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 = 0$$

$$\Omega'_2 \ldots -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_1{}^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_3{}^2 + \frac{1}{2} x_5{}^2 + \operatorname{cotg}\varphi\ x_1\ x_5 - x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 = 0.$$

Kernfläche:

$$\left.\begin{array}{l} F^{(b)} \,..\, (z_1{}^2 + z_2{}^2 - z_3{}^2 - z_4{}^2) \cos\varphi - 2\,(z_1\ z_4 + z_2\ z_3) \sin\varphi \equiv F_2{}^{(1)} \cos\varphi - F_{10}{}^{(1)} \sin\varphi \\ \quad \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 \equiv (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + x_2{}^2 + x_5{}^2 \end{array}\right\} = 0$$

$$C \ldots x_2 = 0; \qquad C', C'' \ldots x_1 \cos\varphi \pm i\ x_2 - x_3 \sin\varphi = 0.$$

11 A) 600 sechszählige allgemeine Collineationen.

Die zugehörigen Substitutionen sind aus $B^{(1)}$ und $C^{(2)}$ oder aus $C^{(1)}$ und $B^{(2)}$ in der aus der Zusammenstellung (68a) erkennbaren Weise zusammengesetzt, und zwar ist immer eine der beiden Substitutionen ((57ε) in § 46) $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ (oder $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$) und $J^{(1)}$ (oder $J^{(2)}$) mit einer Substitution ((57δ)) $B_1^{(2)}$, $B_2^{(2)}$ (oder $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$) und $J^{(2)}$ (oder $J^{(1)}$) combinirt. Die Potenzen einer solchen Substitution $S = S_c \ldots S_b$ entsprechen den nebenstehenden Wurzelwerthen für σ:

$S^1 = S_c{}^1 \,..\, S_b{}^1$, $\sigma = 1, \alpha, \alpha^2;\ 1, -1, -1$; $S^5 = S_c{}^2 \,..\, S_b{}^1$; $\sigma = 1, \alpha^2, \alpha;\ 1, -1, -1$.. (68α₁)

$S^2 = S_c{}^2 \,..\, S_b{}^2$, $\sigma = 1, \alpha^2, \alpha;\ 1, 1, 1$; $S^4 = S_c{}^1 \,..\, S_b{}^2$; $\sigma = 1, \alpha, \alpha^2;\ 1, 1, 1$.. (68α₂)

$S^3 = S_c{}^3 \ldots S_b{}^1$, $\sigma = 1, 1, 1;\ 1, 1, -1, -1$ (68α₃)

(Vgl. § 12 unter A₂)).

Die beiden Potenzen S, S^5 (68α₁), deren Exponenten prim zu 6 sind, bedeuten sechszählige, auf zwei Arten eigentliche allgemeine Collineationen, deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{c}_0{}^{(b)} = \mathfrak{b}_0{}^{(c)}$, vier Ebenen

$\gamma_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\gamma)}$ hat (vgl. (24b)..(24e) in § 42 VI; zu ihnen gehören die 96 in § 3 unter (12δ) aufgeführten 96 Punkte $\mathfrak{h}_0^{(e)} = \mathfrak{f}_0^{(k)}$ und Ebenen ($_0^{(e)} = \varphi_0^{(k)}$), während die Kantenpaare durch ein reelles Geradenpaar $c^{(b)} = b^{(c)}$ (vgl. (24f)..(24i) in § 42 VI), je ein imaginäres Geradenpaar c_0 (vgl. (19a), (19b) in § 42 II) und ein imaginäres Geradenpaar b_0 ((21a), (21b) in § 42 III) gebildet sind. Die nebeneinander gestellten Potenzen S, S^5 sind sowohl in tetraedrischen, als in x_i-Coordinaten durch zu einander transponirte Substitutionen dargestellt. Die Wurzelwerthe der Gleichung in τ sind

$$\tau = -i\,\alpha,\quad i\,\alpha,\quad -i\,\alpha^2,\quad i\,\alpha^2,$$

aus welchen wegen

$$\alpha_1\,\alpha_4 = \alpha_2\,\alpha_3 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_1\,\alpha_3 = \alpha_4\,\alpha_2 = -1$$

ersichtlich ist, dass die entsprechenden sechszähligen Collineationen auf zwei Arten eigentliche sind (vgl. (28ε, ε') in § 8 unter I). Die Gleichungen des tetraedralen Complexes Ω, der beiden Complexbüschel und der beiden Flächenbüschel folgen aus den Formeln des § 8 unter I. Zu den Gewinden des einen Büschels gehört je ein Complex $C_{(1)}$ ((42) in § 44) und je einer der Complexe $C^{(\beta)}$, $C^{(\beta')}$ ((55β) in § 45), zu den Gewinden des zweiten Büschels gehören zwei Complexe $C_{(1)}$; zu den Flächen des einen Büschels gehört die Fläche $F_1^{(1)}$ und je eine Fläche $F^{(c)}$ ((55c) in § 45), zu den Flächen des zweiten Büschels gehören zwei Flächen $F^{(c)}$.

Die beiden Potenzen S^2, S^4 bedeuten dreizählig geschaarte Collineationen mit dem Axenpaar c_0 (vergl. 5 A) unter (62a)), die Potenz S^3 bedeutet eine elliptisch geschaarte Involution mit dem Axenpaar b_0 (3 A) unter (60a)) des Haupttetraeders.

Die in der folgenden Zusammenstellung (68a$_1$)..(68a$_4$) aufgeführten Substitutionen (68a$_1$) sind bereits früher in § 12 A$_2$) Formeln (81) betrachtet worden; die drei Kantenpaare des Haupttetraeders sind die durch bezw. h, k_0 und e bezeichneten Geradenpaare $c^{(b)} = b^{(c)}$, c_0 und b_0; ebenso gehören die durch $F^{(6)}$ und $F^{(7)}$ bezeichneten Flächen der Büschel zu den Flächen $F^{(c)}$ (vgl. auch die Formeln (36) in § 8 und § 9 I B) unter 2a)).

Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Elemente des Haupttetraeders:	
$11A_1)\left\{\begin{matrix} B_1^{(1)} \ldots C_1^{(2)} \\ C_1^{(1)} \ldots B_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_2,\ T_3$	$2 \,.\, 3 \,.\, 8 = \mathbf{24} \,.\, 2 = 48$	4 Eckpunkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$ 4 Ebenen $\gamma_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\gamma)}$ 1 reelles Kantenpaar $c^{(b)} = b^{(c)}$ 1 imaginäres Kantenpaar c_0 1 „ „ b_0	. . (68a₁)
$11A_2)\left\{\begin{matrix} B_2^{(1)} \ldots C_2^{(2)} \\ C_2^{(1)} \ldots B_2^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_4 \,..\, T_{51}$	$2 \,.\, 12 \,.\, 12 = \mathbf{6} \,.\, 48 = 288$		. . (68a₂)
$11A_3)\left\{\begin{matrix} B_1^{(1)} \ldots C_2^{(2)} \\ C_2^{(1)} \ldots B_1^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	$2 \,.\, 3 \,.\, 12 = \mathbf{3} \,.\, 24 = 72$		. . (68a₃)
$11A_4)\left\{\begin{matrix} B_2^{(1)} \ldots C_1^{(2)} \\ C_1^{(1)} \ldots B_2^{(2)} \end{matrix}\right\}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	$2 \,.\, 12 \,.\, 8 = \mathbf{8} \,.\, 24 = 192$		. . (68a₄)

Beispiele:

1) Zu $11A_1)$ vgl. § 12 unter $A_2)$ (Formeln (81).

2) Zu $11A_2)$:

$$S_b^1 \,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{13} \\ x'_3 = x_{21} \\ x'_5 = x_{29} \end{matrix}\right\}, \quad S_b^2 \,..\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_1 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_5 = x_5 \end{matrix}\right\};$$

$$S_c^1 \,..\left\{\begin{matrix} x'_2 = x_{24} \\ x'_4 = x_8 \\ x'_6 = x_{16} \end{matrix}\right\}, \quad S_c^2 \,..\left\{\begin{matrix} x'_2 = -x_{30} \\ x'_4 = -x_{14} \\ x'_6 = x_{22} \end{matrix}\right\}, \quad S_c^3 \,..\left\{\begin{matrix} x'_2 = x_2 \\ x'_4 = x_4 \\ x'_6 = x_6 \end{matrix}\right\}.$$

$$S^1 = S_b^1 \ldots S_c^1 \ldots [2\ -4\ \ 3\ -1^*]_{20},\quad S^5 = S_b^1 \ldots S_c^2 \ldots [1\ \ -2\ \ -3\ \ 4]_{24}.$$

$$\left\{\begin{matrix}
Z_1 \ldots & -\frac{1}{2}(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\,\alpha^2 & -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+i\sqrt{3})\,\alpha^2 - i\operatorname{cotg}\varphi & \alpha + i\operatorname{tg}\varphi & \sqrt{3}-1 & \ldots Z_4 \\
Z_2 \ldots & \frac{1}{2}(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\,\alpha^2 & \frac{1}{2}(\sqrt{5}+i\sqrt{3})\,\alpha^2 - i\operatorname{cotg}\varphi & -\alpha + i\operatorname{tg}\varphi & \sqrt{3}+1 & \ldots Z_3 \\
Z_3 \ldots & \frac{1}{2}(\sqrt{5}+i\sqrt{3})\,\alpha & \frac{1}{2}(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\,\alpha + i\operatorname{cotg}\varphi & -\alpha^2 - i\operatorname{tg}\varphi & \sqrt{3}+1 & \ldots Z_2 \\
Z_4 \ldots & -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+i\sqrt{3})\,\alpha & -\frac{1}{2}(\sqrt{5}-i\sqrt{3})\,\alpha + i\operatorname{cotg}\varphi & \alpha^2 - i\operatorname{tg}\varphi & \sqrt{3}-1 & \ldots Z_1
\end{matrix}\right\}$$

$$K_{14},\ K_{23} \ldots \mp\frac{i}{2} \quad \sin\psi \quad \pm\frac{i}{2}\operatorname{cotg}\varphi \quad \cos\psi \quad \mp\frac{i}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad \ldots c^{(b)} = b^{(c)}$$

$$K_{12},\ K_{34} \ldots 0 \quad -\cos\psi \quad 0 \quad \sin\psi \quad 0 \quad \pm i \quad \ldots c''_0$$

$$K_{13},\ K_{42} \ldots \left\{\begin{matrix} -3 & 0 & -\operatorname{cotg}\varphi \pm 2\,i\operatorname{tg}\varphi & 0 & \operatorname{tg}\varphi \pm i\operatorname{cotg}\varphi & 0 \\ \text{oder } -\operatorname{tg}\varphi \pm 2\,i\operatorname{cotg}\varphi & 0 & 1 \pm 2\,i & 0 & \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \end{matrix}\right\} \ldots b''_0.$$

$$\Omega \ldots -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 + \operatorname{tg}\varphi\, x_1 x_5 - x_3 x_5 -$$
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_6^2 + x_2 x_4 = 0.$$

Zwei Complexbüschel:

$$\left\{\begin{matrix} \left(\frac{x_1}{2} - x_3\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} + x_5\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\right) + \mu'\,(x_2\sin\psi + x_4\cos\psi) = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}\,x_1}{2} + x_3\frac{\cos\psi}{2} - x_5\frac{\sin\psi}{2}\right) + \mu''\,(x_3\sin\psi + x_5\cos\psi) = 0 \end{matrix}\right\}$$

Zwei Flächenbüschel:

$$\left.\begin{aligned} Z_1\,Z_4+\lambda'\,Z_2\,Z_3 \equiv {} & [(\sqrt{3}+1)\,z_1^2+(\sqrt{3}-\operatorname{cotg}\varphi)\,z_2^2+(\sqrt{3}+\operatorname{cotg}\varphi)\,z_3^2+(\sqrt{3}-1)\,z_4^2- \\ & -(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+\operatorname{cotg}^2\varphi\,z_1\,z_4-\operatorname{tg}\varphi\,z_2\,z_3] \\ & +\lambda'\,[(\sqrt{3}-1)\,z_1^2+(\sqrt{3}+\operatorname{cotg}\varphi)\,z_2^2+(\sqrt{3}-\operatorname{cotg}\varphi)\,z_3^2+(\sqrt{3}+1)\,z_4^2+ \\ & +(z_1\,z_2+z_3\,z_4)-\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)-\operatorname{cotg}^2\varphi\,z_1\,z_4+\operatorname{tg}\varphi\,z_2\,z_3] \end{aligned}\right\} = 0$$

z. B. $\lambda' = 1 \ldots F_1^{(1)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 \equiv x_1^2+x_3^2+x_5^2 \equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2 = 0$

$$\lambda' = -1 \ldots F^{(c)} \ldots (z_1^2-z_4^2)-(z_2^2-z_3^2)\operatorname{cotg}\varphi-(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+(z_1\,z_3-z_4\,z_2)\operatorname{tg}^2\varphi+ \\ +z_1\,z_4\operatorname{cotg}^2\varphi-z_2\,z_3\operatorname{tg}\varphi = 0$$

oder $\left(\frac{x_1}{2}-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,x_3+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,x_5\right)^2+(x_2\cos\psi-x_4\sin\psi)^2+x_6^2 \equiv$

$$\left(\frac{\sqrt{3}\,x_1}{2}+\frac{\cos\psi}{2}\,x_3-\frac{\sin\psi}{2}\,x_5\right)^2+(x_3\sin\psi+x_5\cos\psi)^2+(x_2\sin\psi+x_4\cos\psi)^2 = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1\,Z_3+\lambda''\,Z_4\,Z_2 \equiv {} & [-2\,z_1^2+(1-i)\operatorname{tg}\varphi\,z_2^2-(1-i)\operatorname{tg}\varphi\,z_3^2+2\,z_4^2+(-1+i\operatorname{cotg}^3\varphi)(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+ \\ & +(\operatorname{tg}^2\varphi-i\operatorname{cotg}\varphi)\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+(\operatorname{cotg}^2\varphi+3\,i\operatorname{tg}\varphi)\,z_1\,z_4-\left(2+\operatorname{cotg}^2\varphi+\frac{i}{\cos^2\varphi}\right)z_2\,z_3] \\ & +\lambda''[-2\,z_1^2+(1+i)\operatorname{tg}\varphi\,z_2^2-(1+i)\operatorname{tg}\varphi\,z_3^2+2\,z_4^2+(-1-i\operatorname{cotg}^3\varphi)\,(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+ \\ & +(\operatorname{tg}^2\varphi+i\operatorname{cotg}\varphi)\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+(\operatorname{cotg}^2\varphi-3\,i\operatorname{tg}\varphi)\,z_1\,z_4-\left(2+\operatorname{cotg}^2\varphi-\frac{i}{\cos^2\varphi}\right)z_2\,z_3] \end{aligned}\right\} = 0$$

z. B. $\lambda'' = 1 \ldots F^{(c)} \ldots -2\,(z_1^2-z_4^2)+\operatorname{tg}\varphi\,(z_2^2-z_3^2)-(z_1\,z_2+z_3\,z_4)+\operatorname{tg}^2\varphi\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+$

$$\operatorname{cotg}^2\varphi\;z_1\,z_4-(2+\operatorname{cotg}^2\varphi)\,z_2\,z_3 = 0$$

oder $\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}+x_3\,\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}+x_5\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}\right)^2+(x_2\cos\psi-x_4\sin\psi)^2+x_6^2 \equiv$

$$\equiv\left(\frac{x_1\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+x_3\,\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cos\psi-\frac{x_5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\sin\psi\right)^2+(x_3\sin\psi-x_5\cos\psi)^2+(x_2\sin\psi-x_4\cos\psi)^2 = 0$$

$\lambda'' = -1 \ldots F^{(c)} \ldots -z_2^2+z_3^2+\operatorname{cotg}^4\varphi\,(z_1\,z_2+z_3\,z_4)-\operatorname{cotg}^2\varphi\,(z_1\,z_3-z_4\,z_2)+3\,z_1\,z_4-\sqrt{5}\,z_2\,z_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \text{oder } & \left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}}-x_3\,\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}-x_5\,\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}\right)^2+(x_2\cos\psi-x_4\sin\psi)^2+x_6^2 \equiv \\ & \equiv\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}+x_3\,\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}+x_5\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_3\,\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}+x_5\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\right)^2+(x_2\sin\psi+x_4\cos\psi)^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Die dreizählig geschaarten Collineationen mit Axenpaar c_0 (vgl. (5A)) sind dargestellt durch:

$$S^2 = S_b^2 \ldots S_c^2 \ldots [-4\;\;3\;\;2\;\;-1^*]_{56}, \quad S^4 = S_b^2 \ldots S_c^1 \ldots [4\;\;3\;\;-2\;\;-1^*]_{59}$$

und die elliptisch geschaarte Involution mit Axenpaar b_0 (vgl. (3A)) durch:

$$S^3 = S_b^1 \ldots S_c^3 \ldots [-1^*\;\;2\;\;3\;\;-4]_{66}.$$

3) Zu $11\,A_3$):

$$S_c^1 \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_{15} \\ x_3' = -x_{23} \\ x_5' = -x_7 \end{array}\right\}, \quad S_c^2 \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1' = -x_{19} \\ x_3' = -x_{27} \\ x_5' = x_{11} \end{array}\right\}, \quad S_c^3 \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 \\ x_3' = x_3 \\ x_5' = x_5 \end{array}\right\};$$

$$S_b^1 \ldots \left\{\begin{array}{l} x_2' = x_2 \\ x_4' = -x_4 \\ x_6' = -x_6 \end{array}\right\}, \quad S_b^2 \ldots \left\{\begin{array}{l} x_2' = x_2 \\ x_4' = x_4 \\ x_6' = x_6 \end{array}\right\};$$

$$S_1{}^1 = S_c{}^1 \ldots S_b{}^1 \ldots [4\ -3\ -2\ 1^*]_{74}, \quad S^5 = S_c{}^2 \ldots S_b{}^1 \ldots [4\ 3\ 2\ 1^*]_{70}.$$

$$\left.\begin{array}{llllll} Z_1 \ldots & \cos\frac{1}{2}\psi & -i\cos\frac{1}{2}\psi & \sin\frac{1}{2}\psi & i\sin\frac{1}{2}\psi & \ldots Z_4 \\ Z_2 \ldots & \sin\frac{1}{2}\psi & i\sin\frac{1}{2}\psi & -\cos\frac{1}{2}\psi & i\cos\frac{1}{2}\psi & \ldots Z_3 \\ Z_3 \ldots & \sin\frac{1}{2}\psi & -i\sin\frac{1}{2}\psi & -\cos\frac{1}{2}\psi & -i\cos\frac{1}{2}\psi & \ldots Z_2 \\ Z_4 \ldots & \cos\frac{1}{2}\psi & i\cos\frac{1}{2}\psi & \sin\frac{1}{2}\psi & -i\sin\frac{1}{2}\psi & \ldots Z_1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lccccccl} K_{14},\ K_{23} \ldots & \cos\psi & \mp i & 0 & 0 & -\sin\psi & 0 & \ldots c^{(b)} = b^{(c)} \\ K_{12},\ K_{34} \ldots & \sin\psi & 0 & \pm i & 0 & \cos\psi & 0 & \ldots c_0{}'' \\ K_{13},\ K_{42} \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm i & \ldots b_0. \end{array}\right\}$$

$$\Omega \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\, x_1{}^2 - \frac{1}{2}\, x_3{}^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\, x_5{}^2 - x_1\, x_5 + x_2{}^2 - x_4{}^2 - x_6{}^2 = 0.$$

Zwei Complexbüschel: $\left\{\begin{array}{c} (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi) + k'\, x_2 = 0 \\ x_4 + k''\, x_6 = 0 \end{array}\right\}.$

Zwei Flächenbüschel:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1\, Z_4 + \lambda'\, Z_2\, Z_3 \equiv \left[(z_1{}^2 + z_2{}^2)\cos^2\frac{1}{2}\psi + (z_3{}^2 + z_4{}^2)\sin^2\frac{1}{2}\psi + (z_1\, z_3 - z_4\, z_2)\sin\psi\right] \\ \quad + \lambda'\left[(z_1{}^2 + z_2{}^2)\sin^2\frac{1}{2}\psi + (z_3{}^2 + z_4{}^2)\cos^2\frac{1}{2}\psi - (z_1\, z_3 - z_4\, z_2)\sin\psi\right] \end{array}\right\} = 0$$

Z. B. $\lambda' = 1 \ldots F_1{}^{(1)} \ldots z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + z_4{}^2 \equiv x_1{}^2 + x_3{}^2 + x_5{}^2 \equiv x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' = -1 \,..\, F^{(c)} \,..\, (z_1{}^2 + z_2{}^2 - z_3{}^2 - z_4{}^2)\cos\psi + 2\,(z_1\, z_3 - z_4\, z_2)\sin\psi \equiv F_2{}^{(1)}\cos\psi + F_6{}^{(1)}\sin\psi \\ \qquad \equiv (x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_4{}^2 + x_6{}^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{vgl. (55c}_1\text{)} \\ \text{in § 45.}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1\, Z_3 + \lambda''\, Z_4\, Z_2 \equiv [(z_1{}^2 - z_2{}^2 - z_3{}^2 + z_4{}^2)\sin\psi - 2\,(z_1\, z_3 + z_4\, z_2)\cos\psi - \\ \qquad - i\,\{\, 2\sin\psi\,(z_1\, z_2 + z_3\, z_4) + 2\cos\psi\,(z_1\, z_4 - z_2\, z_3)\,\}] \\ \quad + \lambda''\, [(z_1{}^2 - z_2{}^2 - z_3{}^2 + z_4{}^2)\sin\psi - 2\,(z_1\, z_3 + z_4\, z_2)\cos\psi + \\ \qquad + i\,\{\, 2\sin\psi\,(z_1\, z_2 + z_3\, z_4) + 2\cos\psi\,(z_1\, z_4 - z_2\, z_3\,\}] \end{array}\right\} = 0$$

Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'' = 1 \,..\, F^{(c)} \,..\, (z_1{}^2 - z_2{}^2 - z_3{}^2 + z_4{}^2)\sin\psi - 2\,(z_1\, z_3 + z_4\, z_2)\cos\psi \equiv F_4{}^{(1)}\sin\psi - F_9{}^{(1)}\cos\psi \\ \qquad \equiv (x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_3{}^2 + x_6{}^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_2{}^2 + x_4{}^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{vgl. (55c}_2\text{)} \\ \text{in § 45}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'' = -1 \,..\, F^{(c)} \,..\, 2\,(z_1\, z_2 + z_3\, z_4)\sin\psi + 2\,(z_1\, z_4 - z_2\, z_3)\cos\psi \equiv F_8{}^{(1)}\sin\psi + F_7{}^{(1)}\cos\psi \\ \qquad \equiv (x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + x_2{}^2 + x_6{}^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{vgl. (55c}_3\text{)} \\ \text{in § 45.}\end{array}$$

Die dreizählig geschaarten Collineationen mit Axenpaar c_0 (vgl. (5A)) sind dargestellt durch:

$$S^2 = S_c{}^2 \ldots S_b{}^2 \ldots [3\ -4\ -1\ {}^*2]_{70}, \quad S^4 = S_c \ldots S_b{}^2 \ldots [3\ 4\ 1\ {}^*2]_{74}$$

und die elliptisch geschaarte Involution mit Axenpaar b_0 (vgl. (3A)) durch:

$$S^3 = S_c{}^3 \ldots S_b{}^1 \ldots [2\ -1\ -4\ 3]_1.$$

11B) 600 sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $F^{(c)}$.

Die Substitutionen resultiren aus denjenigen in 11 A) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Hierbei bedeuten die geraden Potenzen S^2, S^4 von

$$S^1 = \pm S_c^1 \dots \mp S_b^1, \quad \sigma = 1,\ \alpha,\ \alpha^2;\ -1,\ 1,\ 1 \text{ oder } \sigma = -1,\ -\alpha,\ -\alpha^2;\ 1,\ -1,\ -1$$

wiederum die dreizählig geschaarten Collineationen mit dem Axenpaar c_0, wie in 11 A), während die Potenz S^3 eine Null-Correlation bedeutet, deren Complex einer der 30 Complexe $C_{(1)}$ ((42) in § 44) ist.

Die beiden Potenzen

$$\left.\begin{aligned} S^1 &= \pm S_c^1 \dots \mp S_b^1, \quad \sigma = 1,\ \alpha,\ \alpha^2;\ -1,\ 1,\ 1 \\ S^5 &= \pm S_c^2 \dots \mp S_b^1, \quad \sigma = 1,\ \alpha^2,\ \alpha;\ -1,\ 1,\ 1 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (68\beta)$$

bedeuten sechszählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche; die letztere ist eine Fläche $F^{(c)}$ ((55c) in § 45) und zwar die Fläche $Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$ des ersten Flächenbüschels für die entsprechenden sechszähligen Collineationen in 11 A). Von den unter 5 B) betrachteten sechszähligen Correlationen mit z. K., für welche $F_1^{(1)}$ die Kernfläche ist, sind die Correlationen 11 B) wesentlich dadurch unterschieden, dass S^3 hier eine Null-Correlation, bei jenen aber die Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$ bedeutet (vgl. § 9 B) unter 4 b) α) und β)); dieser Unterschied zeigt sich auch sofort in den Wurzelwerthen für σ, welche für 5 B)

$$\sigma = 1,\ \alpha,\ \alpha^2;\ -1,\ -1,\ -1$$

sind. Die Gleichung des Complexes Ω', des festbleibenden linearen Complexes, welcher mit dem zu dem S^3 entsprechenden Nullsysteme gehörigen identisch ist, der Kernfläche und der beiden festbleibenden speciellen Complexe ergeben sich aus den Formeln in § 8 unter II).

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Kernfläche:	
$11B_1$)	$\pm B_1^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)}$, $\pm C_1^{(1)} \dots \mp B_1^{(2)}$	T_2, T_3	$2 . 3 . 8 = \mathbf{24} . 2 = 48$	Eine Fläche $F^{(6)}$	… (68b₁)
$11B_2$)	$\pm B_2^{(1)} \dots \mp C_2^{(2)}$, $\pm C_2^{(1)} \dots \mp B_2^{(2)}$	$T_4 \dots T_{51}$	$2 . 12 . 12 = \mathbf{6} . 48 = 288$	Eine Fläche $F^{(c)}$	… (68b₂)
$11B_3$)	$\pm B_1^{(1)} \dots \mp C_2^{(2)}$, $\pm C_2^{(1)} \dots \mp B_1^{(2)}$	$T_{52} \dots T_{75}$	$2 . 3 . 12 = \mathbf{3} . 24 = 72$	Eine Fläche $F^{(c)}$	… (68b₃)
$11B_4$)	$\pm B_2^{(1)} \dots \mp C_1^{(2)}$, $\pm C_1^{(1)} \dots \mp B_2^{(2)}$	$T_{52} \dots T_{75}$	$2 . 12 . 8 = \mathbf{8} . 24 = 192$	Eine Fläche $F^{(c)}$	… (68b₄)

Beispiele:

1) Zu $11 B_1$) vgl. § 12 unter B 2).

2) Zu $11 B_2$):

S_b^1, S_b^2 und S_c^1, S_c^2, S_c^3 wie im Beispiel 2) zu $11 A_2$);

S^2, S^4 dreizählig geschaarte Collineationen wie im Beispiel 2) zu $11 A_2$);

$S^3 = \pm S_b^1 \ldots \mp S_c^3 \ldots [\overline{2\ -4\ 3\ -1^*}]_{66}$ Nullcorrelation mit Complex: $x_{11} = 0$.

Sechszählige Correlationen mit z. K.:

$S^1 = \pm S_b^1 \ldots \mp S_c^1 \ldots [\overline{2\ -4\ 3\ -1^*}]_{20}$; $S^5 = \pm S_b^1 \ldots \mp S_c^2 \ldots [\overline{1\ -2\ -3\ 4}]_{24}$.

$$\Omega' \ldots -\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_3^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_5^2 - \operatorname{cotg}\varphi\, x_1 x_3 + \operatorname{tg}\varphi\, x_1 x_5 - x_3 x_5 +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_2^2 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_4^2 + \frac{1}{2} x_6^2 - x_2 x_4 = 0$$

Kernfläche: $F^{(c)} \ldots (z_1^2 - z_4^2) - (z_2^2 - z_3^2) \operatorname{cotg}\varphi - (z_1 z_2 + z_3 z_4) +$

$+ (z_1 z_3 - z_4 z_2) \operatorname{tg} 2\varphi + z_1 z_4 \operatorname{cotg} 2\varphi - z_2 z_3 \operatorname{tg}\varphi = 0$

(vgl. $Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$ im Beispiel 2) zu $11 A_2$).

$$C \ldots x_{11} \equiv \frac{x_1}{2} - x_3 \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} + x_5 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} = 0;$$

$$C', C'' \ldots \left(\frac{x_1}{2} - x_3 \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} + x_5 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\right) \pm i\,(x_2 \sin\psi + x_4 \cos\psi) = 0.$$

3) Zu $11 B_3$):

S_c^1, S_c^2, S_c^3 und S_b^1, S_b^2 wie im Beispiel 3) zu $11 A_3$);

S^2, S^4 dreizählig geschaarte Collineationen wie im Beispiel 3) zu $11 A$):

$S^3 = \pm S_c^3 \ldots \mp S_b^1 \ldots [\overline{2\ -1\ -4\ 3}]_1$ Nullcorrelation mit Complex $x_2 = 0$;

Sechszählige Correlationen mit z. K.:

$S^1 = \pm S_c^1 \ldots \mp S_b^1 \ldots [\overline{4\ -3\ -2\ 1^*}]_{74}$; $S^5 = \pm S_c^2 \ldots \mp S_b^1 \ldots [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{70}$.

$$\Omega' \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_3^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} x_5^2 - x_1 x_5 - x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0$$

Kernfläche: $F^{(c)} \ldots (z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2) \cos\psi + 2\,(z_1 z_3 - z_4 z_2) \sin\psi = 0$

(vgl. $Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$ im Beispiel 3) zu $11 A_3$).

$C \ldots x_2 = 0$; $C', C'' \ldots (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi) \pm i\, x_2 = 0$.

§ 48.

Uebersichtliche Zusammenstellung der eigentlichen Collineationen und Correlationen, sowie ihrer Vertheilung auf die 75 Tetraeder $T_1 \ldots T_{75}$.

In den nachfolgenden Tabellen ($69A$) und ($69B$) sind die sämmtlichen eigentlichen Collineationen und Correlationen der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ nochmals übersichtlich zusammengestellt und die je einem der 75 Tetraeder $T_1 \ldots T_{75}$ zugehörigen Substitutionen angegeben.

Collineationen:	Substitutionen:	Correlationen:	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl
1A) Identische Transformation	$J^{(1)} \,.\,.\, J^{(2)}$	1B) Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$	$\pm J^{(1)} \,.\,.\, \mp J^{(2)}$	T_1	1
2A) Hyperbolisch-geschaarte Involutionen mit Axenpaar B	$B_1^{(1)}$ und $B_2^{(1)} \,.\,.\, B_1^{(2)}$ und $B_2^{(2)}$	2B) Polarcorrelationen mit Kernflächen $F_2^{(1)} \,.\,.\, F_{226}^{(1)}$	$\pm B_1^{(1)}$ und $\pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)}$ und $\mp B_2^{(2)}$	T_1; $T_4 \,.\,.\, T_{51}$; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	225
3A) Elliptisch-geschaarte Involutionen mit Axenpaar b_0	$J^{(1)} \,.\,.\, B_1^{(2)}$ und $B_2^{(2)}$ $B_1^{(1)}$ und $B_2^{(1)} \,.\,.\, J^{(2)}$	3B) Nullcorrelationen mit Complex $C_{(1)}$	$\pm J^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)}$ und $\mp B_2^{(2)}$ $\pm B_1^{(1)}$ und $\pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp J^{(2)}$	T_1; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	30
4A) Dreizählige axiale Collineationen mit Axen C	$C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)} \,.\,.\, C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$	4B) Sechszählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{c}_0$ u. Flächen γ_0 des Haupttetraeders	$\pm C_1^{(1)}$ und $\pm C_2^{(1)} \,.\,.\, \mp C_1^{(2)}$ und $\mp C_2^{(2)}$	T_1; T_2, T_3; $T_4 \,.\,.\, T_{51}$; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	400
5A) Dreizählige geschaarteCollineationen mit Axenpaar c_0	$C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)} \,.\,.\, J^{(2)}$ $J^{(1)} \,.\,.\, C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$	5B) Sechszählige Correlationen mit z. K. $F_1^{(1)}$	$\pm C_1^{(1)}$ und $\pm C_2^{(1)} \,.\,.\, \mp J^{(2)}$ $\pm J^{(1)} \,.\,.\, \mp C_1^{(2)}$ und $\mp C_2^{(2)}$	T_2, T_3; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	40
6A) Fünfzählige axiale Collineationen mit Axen G	$G_1^{(1)} \,.\,.\, G_1^{(2)}$ $G_2^{(1)} \,.\,.\, G_2^{(2)}$	6B) Zehnzählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ u. Flächen χ_0 des Haupttetraeders. Zwei Systeme von Kernflächen	$\pm G_1^{(1)} \,.\,.\, \mp G_1^{(2)}$ $\pm G_2^{(1)} \,.\,.\, \mp G_2^{(2)}$	$T_4 \,.\,.\, T_{51}$	288
7A) Fünfzählige geschaarte Collineationen mit Axenpaar g_0	$G_1^{(1)}$ und $G_2^{(1)} \,.\,.\, J^{(2)}$ $J^{(1)} \,.\,.\, G_1^{(2)}$ und $G_2^{(2)}$	7B) Zehnzählige Correlationen mit z. K. $F_1^{(1)}$	$\pm G_1^{(1)}$ und $\pm G_2^{(1)} \,.\,.\, \mp J^{(2)}$ $\pm J^{(1)} \,.\,.\, \mp G_1^{(2)}$ und $\mp G_2^{(2)}$	$T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	48 (69A)
8A) Fünfzählige allgemeine Collineationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ und Ebenen χ_0 des Haupttetraeders	$G_1^{(1)} \,.\,.\, G_2^{(2)}$ $G_2^{(1)} \,.\,.\, G_1^{(2)}$	8B) Zehnzählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ und Ebenen χ_0 des Haupttetraeders. Ein System von Kernflächen	$\pm G_1^{(1)} \,.\,.\, \mp G_2^{(2)}$ $\pm G_2^{(1)} \,.\,.\, \mp G_1^{(2)}$	$T_4 \,.\,.\, T_{51}$	288
9A) Fünfzehnzählige allgemeine Collineationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$, Ebenen $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$ des Haupttetraeders	$C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)} \,.\,.\, G_1^{(2)}$ und $G_2^{(2)}$ $G_1^{(1)}$ und $G_2^{(1)} \,.\,.\, C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$	9B) Dreissigzählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$, Ebenen $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$ des Haupttetraeders	$\pm C_1^{(1)}$ und $\pm C_2^{(1)} \,.\,.\, \mp G_1^{(2)}$ und $\mp G_2^{(2)}$ $\pm G_1^{(1)}$ und $\pm G_2^{(1)} \,.\,.\, \mp C_1^{(2)}$ und $\mp C_2^{(2)}$	$T_4 \,.\,.\, T_{51}$; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	960
10A) Zehnzählige allgemeine Collineationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$, Ebenen $\chi_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\chi)}$ des Haupttetraeders	$B_1^{(1)}$ und $B_2^{(1)} \,.\,.\, G_1^{(2)}$ und $G_2^{(2)}$ $G_1^{(1)}$ und $G_2^{(1)} \,.\,.\, B_1^{(2)}$ und $B_2^{(2)}$	10B) Zehnzählige Correlationen mit z. K. $F^{(b)}$	$\pm B_1^{(1)}$ und $\pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp G_1^{(2)}$ und $\mp G_2^{(2)}$ $\pm G_1^{(1)}$ und $\pm G_2^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)}$ und $\mp B_2^{(2)}$	$T_4 \,.\,.\, T_{51}$; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	720
11A) Sechszählige allgemeine Collineationen. Eckpunkte $\mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{c})}$, Ebenen $\gamma_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\gamma)}$ des Haupttetraeders	$B_1^{(1)}$ und $B_2^{(1)} \,.\,.\, C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$ $C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)} \,.\,.\, B_1^{(2)}$ und $B_2^{(2)}$	11B) Sechszählige Correlationen mit z. K. $F^{(c)}$	$\pm B_1^{(1)}$ und $\pm B_2^{(1)} \,.\,.\, \mp C_1^{(2)}$ und $\mp C_2^{(2)}$ $\mp C_1^{(1)}$ und $\pm C_2^{(1)} \,.\,.\, \mp B_1^{(2)}$ und $\mp B_2^{(2)}$	T_2, T_3; $T_4 \,.\,.\, T_{51}$; $T_{52} \,.\,.\, T_{75}$	600

Von den 3600 eigentlichen Collineationen und ebenso von den 3600 eigentlichen Correlationen entfällt auf je eins der angegebenen 75 Tetraeder $T_1 \ldots T_{75}$ die in betreffender Columne der Tabelle (69B) aufgeführte Zahl von Substitutionen, deren Gesammtzahl für jedes Tetraeder 48 beträgt.

Collineationen:	Correlationen:	Tetraeder T_1	Je ein Tetraeder T_2, T_3	Je ein Tetraeder $T_4 \ldots T_{51}$	Je ein Tetraeder $T_{52} \ldots T_{75}$	
1 *A*)	1 *B*)	1	—	—	—	
2 *A*)	2 *B*)	9	—	3	3	
3 *A*)	3 *B*)	6	—	—	1	
4 *A*)	4 *B*)	32	16	3	8	(69B)
5 *A*)	5 *B*)	—	8	—	1	
6 *A*)	6 *B*)	—	—	6	—	
7 *A*)	7 *B*)	—	—	—	2	
8 *A*)	8 *B*)	—	—	6	—	
9 *A*)	9 *B*)	—	—	12	16	
10 *A*)	10 *B*)	—	—	12	6	
11 *A*)	11 *B*)	—	24	6	$3+8=11$	

§ 49.

Die hierhergehörigen 3600 uneigentlichen Collineationen und 3600 uneigentlichen Correlationen.

Die 3600 uneigentlichen Collineationen ergeben sich aus den Substitution $\mathfrak{S}^{(1')}$ und $\mathfrak{S}^{(2')}$ in (57α) und (57β) des § 46, wie bereits erwähnt wurde, dadurch, dass die Combinationen:

$$\mp\mathfrak{S}^{(1')} \ldots \pm\mathfrak{S}^{(2')} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (70a)$$

gebildet werden; ebenso resultiren die 3600 uneigentlichen Correlationen durch Combination von:

$$\mathfrak{S}^{(1')} \ldots \mathfrak{S}^{(2')} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (70b)$$

Es treten hierbei nur vier verschiedene Arten von uneigentlichen Collineationen und ebenso nur vier Arten von uneigentlichen Correlationen auf, nämlich 60 centrische Involutionen, 900 vierzählige, 1200 sechszählige und 1440 zehnzählige allgemeine uneigentliche Collineationen, und entsprechend 60 Polar-Correlationen, 900 vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art, 1200 sechszählige und 1440 zehnzählige allgemeine uneigentliche Correlationen.

Während aber bei den eigentlichen Collineationen und Correlationen, deren es je 11 verschiedene Arten giebt, die Beschaffenheit einer solchen Transformation aus der Bildung durch die erzeugenden Substitutionen J, A, B, C, G ((57) in § 46) und aus den dieselben charakterisirenden Wurzelwerthen für σ sofort erkannt wird, ist dies bei den uneigentlichen Transformationen nicht der Fall. Die Beschaffenheit einer solchen ist nicht ohne weiteres aus derjenigen der erzeugenden Substitutionen $\pm\mathfrak{S}^{(1')} \ldots \mathfrak{S}^{(2')}$ ersichtlich; man muss vielmehr zuvor entweder aus der Gleichung vierten Grades in τ oder aus derjenigen sechsten Grades in σ die charakteristischen Wurzelwerthe bestimmen, oder durch Bildung des Quadrates der vorliegenden Substitution, welches immer eine eigentliche Collineation darstellt (und zwar in den vier angegebenen Fällen: die Identität, eine hyperbolisch geschaarte Involution, eine dreizählige oder eine fünfzählige axiale Collineation) die Beschaffenheit der uneigentlichen Transformation feststellen. Auch ist die Vertheilung der uneigentlichen Transformationen auf die 75 Tetraeder $T_1 \ldots T_{75}$ eine minder einfache, als diejenige der eigentlichen Transformationen, indem bei jenen die 48 Tetraeder $T_4 \ldots T_{51}$ in die Unterabtheilungen (vergl. die Zusammenstellungen $T_I^{(1)}$, $T_I^{(2)}$, $T_I^{(3)}$ in § 41)

$$T_4 \ldots T_7 \text{ und } T_8 \ldots T_{19};\ T_{20} \ldots T_{23},\ T_{36} \ldots T_{39} \text{ und } T_{24} \ldots T_{35},\ T_{40} \ldots T_{51},$$

welche sich in Beziehung auf die eigentlichen Transformationen gleich verhalten, zu trennen sind.

Aus der folgenden Tabelle (70 A) sind die sämmtlichen uneigentlichen Transformationen nach ihrer Beschaffenheit, Zusammensetzung aus den erzeugenden Substitutionen und Zugehörigkeit zu den einzelnen Tetraedern zu entnehmen. Die Anordnung der ersten Columne entspricht genau derjenigen, welche in § 47 für die Substitutionen, welche eigentlichen Transformationen entsprechen, festgehalten wurde; das obere (Minus-)Zeichen der zuerst stehenden Substitution bestimmt eine uneigentliche Collineation, das untere (Plus-)Zeichen eine uneigentliche Correlation. Aus den abgekürzten Bezeichnungen: „Centr. (P. C.), 4-zählig, 6-zählig, 10-zählig" ist die Beschaffenheit der Transformation ersichtlich; dieselbe bedeutet für die Collineationen: Centrische Involution, vierzählige, sechszählige, zehnzählige Collineation, für die Correlationen: Polar-Correlation, vierzählige Axencorrelation, sechszählige, zehnzählige Correlation.

Nr.	Substitutionen:	T_1	T_2, T_3	$T_4 \,..\, T_7$	$T_8 \,..\, T_{19}$	$T_{20} \,..\, T_{23}$, $T_{36} \,..\, T_{39}$	$T_{24} \,..\, T_{35}$, $T_{40} \,..\, T_{51}$	$T_{52} \,..\, T_{75}$	Summe:	
1)	$-J^{(2)} \,..\, J^{(1)}$	1centr.(P.C.)	—	—	—	—	—	—	1 **1**	
2)	$-B_1^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	3centr.(P.C.) 6 4-zähl.	—	—	—	—	—	—	9	
„	$-B_2^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$	—	—	3centr.(P.C.)	1 6-zähl. 2 10-zähl.	3 6-zähl.	1 4-zähl. 2 10zähl	—	144	
„	$-B_1^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$ $-B_2^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	1 6-zähl. 2 10 „	72 **225**	
3)	$-J^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$ $-B_1^{(2)} \,..\, J^{(1)}$	6 4-zähl.	—	—	—	—	—	—	6	
„	$-J^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$ $-B_2^{(2)} \,..\, J^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	1 4-zähl.	24 **30**	
4)	$-C_1^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$ (S; S^2 bez. mit S; S^2)	32 6-zähl.	—	—	—	—	—	—	32	
„	$-C_1^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$ (S, S^2 bez. mit S^2; S)	—	4centr.(P.C.) 12 4-zähl.	—	—	—	—	—	32	
„	$-C_2^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$	—	—	3 6-zähl.	1centr.(P.C.) 2 10-zähl.	3 4-zähl.	1 4-zähl. 2 6-zähl.	—	144	
„	$-C_1^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$ $-C_2^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	2 4-zähl. 2 6 „ 4 10 „	192 **400**	
5)	$-C_1^{(2)} \,..\, J^{(1)}$ $-J^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$	—	8 6-zähl.	—	—	—	—	—	16	
„	$-C_2^{(2)} \,..\, J^{(1)}$ $-J^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	1 6-zähl.	24 **40**	
6)	$-G_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}$ $-G_2^{(2)} \,..\, G_2^{(1)}$	—	—	6 10-zähl.	2centr.(P.C.) 2 6-zähl. 2 10-zähl.	610-zähl.	4 6-zähl. 2 10 „	—	288 **288**	(70A)
7)	$-G_1^{(2)}, -G_2^{(2)} \,..\, J^{(1)}$ $-J^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	2 10zähl.	48 **48**	
8)	$-G_1^{(2)} \,..\, G_2^{(1)}$ $-G_2^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}$	—	—	6 6-zähl.	4 4-zähl. 2 6-zähl.	6 4-zähl.	1 4-zähl. 3 6 „ 2 10 „	—	288 **288**	
9)	$-C_2^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$ $-G_1^{(2)}, -G_2^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$	—	—	12 10-zähl.	8 4-zähl. 4 10-zähl.	12 10zäh.	2 4-zähl. 6 6 „ 4 10 „	—	576	
„	$-C_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$ $-G_1^{(2)}, -G_2^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	4 4-zähl. 4 6 „ 8 10 „	384 **960**	
10)	$-B_2^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$ $-G_1^{(2)}, -G_2^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$	—	—	12 4-zähl.	4 4-zähl. 8 10-zähl.	12 6-zäh.	4 4-zähl. 4 6 „ 4 10 „	—	576	
„	$-B_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$ $-G_1^{(2)}, -G_2^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	2 4-zähl. 2 6 „ 2 10 „	144 **720**	
11)	$-B_1^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$ $-C_1^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	—	24 6-zähl.	—	—	—	—	—	48	
„	$-B_2^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$ $-C_2^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$	—	—	6 4-zähl.	2 4 zähl. 4 6-zähl.	6 6-zähl.	2 6-zähl. 4 10 „	—	288	
„	$-B_1^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$ $-C_2^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	1 4-zähl. 2 10 „	72	
„	$-B_2^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$ $-C_1^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$	—	—	—	—	—	—	2 4-zähl. 2 6 „ 4 10 „	192 **600**	

In der Tabelle (70 B) sind die auf die einzelnen Tetraeder-Gruppen entfallenden Transformationen nochmals übersichtlich zusammengefasst.

Auf je ein Tetraeder T_i entfallen:	Centrische Involutionen (Polar-Correlationen):	Vierzählige Collineationen (Vierzählige Axen-Correlationen):	Sechszählige Collineationen (Correlationen):	Zehnzählige Collineationen (Correlationen):
T_1	$1+3=4$	$6+6=12$	32	—
T_2, T_3	4	12	$8+24=32$	—
$T_4 \,..\, T_7$	3	$12+6=18$	$3+6=9$	$6+12=18$
$T_8 \,..\, T_{19}$	$1+2=3$	$4+8+4+2=18$	$1+2+2+4=9$	$2+2+2+4+8=18$
$T_{20} \,..\, T_{23}$; $T_{36} \,..\, T_{39}$	—	$3+6=9$	$3+12+6=21$	$6+12=18$
$T_{24} \,..\, T_{35}$; $T_{40} \,..\, T_{51}$	—	$1+1+1+2+4=9$	$2+4+3+6+4+2=21$	$2+2+2+4+4+4=18$
$T_{52} \,..\, T_{75}$	—	$1+2+4+2+1+2=12$	$1+2+1+4+2+2=12$	$2+4+2+8+2+2+4=24$

(70 B)

§ 50.

Untersuchung und Darstellung der vier Arten uneigentlicher Collineationen und Correlationen.

12 A) 60 centrische Involutionen.

Die 60 centrisch-involutorischen Collineationen (vgl. § 9 unter I A 5)) haben zum Centrum je einen der 60 Punkte $\mathfrak{B}$, zur Ebene der Homologie je eine der 60 Ebenen B (vergl. § 41 (1α)...(1η)), welche die 75 Tetraeder $T_1 \,..\, T_{75}$ constituiren. Die Gleichung in τ hat die Wurzel -1 und die dreifache Wurzel $+1$, die Gleichung in σ hat die beiden dreifachen Wurzeln $+i$ und $-i$. Aus der nachfolgenden Zusammenstellung (71 a) ist die Art der Bildung der Substitutionen und ihre Beschaffenheit ersichtlich (vergl. die Tabelle (70 A) des vorigen §).

	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl:	Centrum und Ebene der Homologie:
$12 A_1$)	$-J^{(2)} \,..\, J^{(1)}$	T_1	1	$\mathfrak{B}_1 \,..\, B_1$
$12 A_2$)	$-B_1^{(2)} \,..\, B_1^{(1)}$	T_1	3	$\mathfrak{B}_2 \,..\, \mathfrak{B}_4$ und $B_2 \,..\, B_4$
$12 A_3$)	$-B_2^{(2)} \,..\, B_2^{(1)}$	$T_4 \,..\, T_7$	12	Je drei der Punkte $\mathfrak{B}_{13} \,..\, \mathfrak{B}_{24}$ und der Ebenen $B_{13} \,..\, B_{24}$
$12 A_4$)	$-C_1^{(2)} \,..\, C_1^{(1)}$	$T_2 \,..\, T_3$	8	Je vier der Punkte $\mathfrak{B}_5 \,..\, \mathfrak{B}_{12}$ und der Ebenen $B_5 \,..\, B_{12}$
$12 A_5$)	$-C_2^{(2)} \,..\, C_2^{(1)}$	$T_8 \,..\, T_{19}$	12	Je ein Punkt (eine Ebene) der Punkte $\mathfrak{B}_{25} \,..\, \mathfrak{B}_{60}$ und der Ebenen $B_{25} \,..\, B_{60}$
$12 A_6$)	$-G_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)}$; $-G_2^{(2)} \,..\, G_2^{(1)}$	$T_8 \,..\, T_{19}$	24	Je zwei Punkte (zwei Ebenen) der Punkte $\mathfrak{B}_{25} \,..\, \mathfrak{B}_{60}$ und der Ebenen $B_{25} \,..\, B_{60}$

... (71 a)

Die 12 unter 12 A_1), 12 A_2) und 12 A_4) aufgeführten centrischen Involutionen sind bereits früher (vgl. § 18 unter A 1)) aufgetreten.

Beispiele: Zu $12 A_1$) und $12 A_2$) vgl. § 18 unter A 1).

$$\text{Zu } 12A_3): \left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_{16} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = -x_{23} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = x_7 \end{matrix} \right\} \ldots [-1\ 4\ 2\ 3]_5;$$

$$\begin{matrix} \text{Centrum} \ldots\ldots \mathfrak{B}_{13} \\ \text{Homologie-Ebene} \ldots B_{13} \end{matrix} \Big\} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi.$$

$$\text{Zu } 12A_4): \left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_6 & x'_2 = -x_3 \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = -x_1 \end{matrix} \right\} \ldots [2\ -1\ 4\ 3]_2;$$

$$\begin{matrix} \text{Centrum} \ldots\ldots \mathfrak{B}_{10} \\ \text{Homologie-Ebene} \ldots B_{10} \end{matrix} \Big\} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Zu } 12A_5): \left\{ \begin{matrix} x'_1 = -x_{14} & x'_2 = x_{11} \\ x'_3 = x_{22} & x'_4 = x_{19} \\ x'_5 = x_{30} & x'_6 = x_{27} \end{matrix} \right\} \ldots [2\ -1\ 4\ 3]_9;$$

$$\begin{matrix} \text{Centrum} \ldots\ldots \mathfrak{B}_{25} \\ \text{Homologie-Ebene} \ldots B_{25} \end{matrix} \Big\} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi.$$

$$\text{Zu } 12A_6): \left\{ \begin{matrix} x'_1 = -x_{26} & x'_2 = -x_{29} \\ x'_3 = -x_{10} & x'_4 = x_{13} \\ x'_5 = -x_{18} & x'_6 = -x_{21} \end{matrix} \right\} \ldots [4\ 2\ -1\ 3]_{13};$$

$$\begin{matrix} \text{Centrum} \ldots\ldots \mathfrak{B}_{37} \\ \text{Homologie-Ebene} \ldots B_{37} \end{matrix} \Big\} \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi.$$

12 B) 60 uneigentliche Polarcorrelationen.

Die zugehörigen Substitutionen ergeben sich einfach aus denjenigen in 12 A) (vergl. Tabelle (71a) erste Columne) durch Weglassen des Minus-Zeichens des ersten Bestandtheils. Die Basisflächen dieser uneigentlichen Polarcorrelationen sind die in § 45 II genauer betrachteten 60 reellen (nicht geradlinigen) Flächen $F^{(2)}$, zu welchen, den 12 Substitutionen unter 12 B_1), 12 B_2) und 12 B_4) (vgl. § 18 unter B 1)) entsprechend, die 12 bereits früher aufgetretenen Flächen (54b) gehören. Die Wurzeln der Gleichung in σ sind

$$1,\ 1,\ 1;\ -1,\ -1,\ -1.$$

Beispiele: Zu $12B_1$) und $12B_2$) vgl. § 18 unter B 1). Formeln (87ζ, ζ').

$$\text{Zu } 12B_3): \left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_{16} & x'_2 = x_{15} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = x_{23} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = -x_7 \end{matrix} \right\} \ldots [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_5;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Basisfläche: } (x_1-x_{16})^2+(x_3-x_{24})^2+(x_5+x_8)^2 \\ \qquad\equiv (x_2-x_{15})^2+(x_4-x_{23})^2+(x_6+x_7)^2 \\ \equiv z_1{}^2+\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}z_2{}^2+\frac{1}{2}z_3{}^2-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}z_4{}^2-\operatorname{cotg}\varphi\, z_3 z_4-z_4 z_2-\operatorname{tg}\varphi\, z_2 z_3\end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (54h) und (54i), (54k) in § 45).

$$\text{Zu } 12B_4): \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_6 & x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = x_1 \end{array}\right\} \ldots [\overline{2\ {-1}\ 4\ 3}]_2;$$

Basisfläche: $x_1 x_6+x_2 x_3-x_4 x_5 = 0$

$$\text{oder: } \left.\begin{array}{r} z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2+z_4{}^2-2 z_1 z_2+2 z_1 z_3+2 z_1 z_4 \\ -2 z_3 z_4+2 z_4 z_2+2 z_2 z_3 \end{array}\right\} = 0.$$

$$\text{Zu } 12B_5): \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{14} & x'_2 = x_{11} \\ x'_3 = -x_{22} & x'_4 = x_{19} \\ x'_5 = -x_{30} & x'_6 = x_{27} \end{array}\right\} \ldots [\overline{2\ {-1}\ 4\ 3}]_9;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Basisfläche: } x_1 x_{14}-x_3 x_{22}-x_5 x_{30} \\ \qquad\equiv x_2 x_{11}+x_4 x_{19}+x_6 x_{27}\end{array}\right\} = 0$$

$$\text{oder: } z_1{}^2+\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}z_2{}^2+\frac{1}{2}z_3{}^2-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}z_4{}^2+\operatorname{cotg}\varphi\, z_3 z_4+z_4 z_2-\operatorname{tg}\varphi\, z_2 z_3 = 0.$$

$$\text{Zu } 12B_6): \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{26} & x'_2 = -x_{29} \\ x'_3 = x_{10} & x'_4 = x_{13} \\ x'_5 = x_{18} & x'_6 = -x_{21} \end{array}\right\} \ldots [\overline{4\ 2\ {-1}\ 3}]_{13};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Basisfläche: } x_1 x_{26}+x_3 x_{10}+x_5 x_{18} \\ \qquad\equiv x_2 x_{29}-x_4 x_{13}+x_6 x_{21}\end{array}\right\} = 0$$

$$\text{oder: } \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}z_1{}^2+\frac{1}{2}z_2{}^2+z_3{}^2-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}z_4{}^2-\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_2-z_1 z_4-\operatorname{cotg}\varphi\, z_4 z_2 = 0.$$

13A) 900 vierzählige uneigentliche Collineationen.

Die hierhergehörigen Substitutionen können nach ihrer Zusammensetzung und Zuordnung zu den Tetraedern $T_1 \ldots T_{75}$ aus der Tabelle (70A) entnommen werden. Die 12 auf das Tetraeder T_1 und die 24 auf die beiden Tetraeder T_2, T_3 entfallenden Substitutionen sind bereits früher (§ 18 A 2)) betrachtet worden.

Die Eckpunkte (Ebenen) je eines Haupttetraeders sind zwei reelle Punkte $\mathfrak{D}$ (Flächen Δ) (vgl. (7) in § 41), speciell die Punkte $\mathfrak{e}_{13} \ldots \mathfrak{e}_{24}$ (Ebenen $\varepsilon_{13} \ldots \varepsilon_{24}$) (§ 18 A 2)) und zwei imaginäre Punkte $\mathfrak{b}_0$ (Ebenen β_0) (vergl. (20a) und (b) in § 42), speciell die Punkte $\mathfrak{e}_{25} \ldots \mathfrak{e}_{60}$ (Ebenen $\varepsilon_{25} \ldots \varepsilon_{60}$) (vgl. (20a) in § 42); das reelle Kantenpaar eines Tetraeders ist ein Geradenpaar B, B' (vgl. (8a) in § 41), speciell e und $e^{(1)}$, die beiden imaginären Kantenpaare sind

zwei Geradenpaare $|\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0| = |\Delta\beta'_0|$ (vgl. (35b), (37b), (39b) in § 43), speciell zwei Geradenpaare d (vgl. § 18 A 2) und (31δ) in § 8); diese beiden Geradenpaare sind Tangenten an $F_1^{(1)}$ in den Eckpunkten des Tetraeders.

Die beiden Arten eigentlicher Transformationen, welche einer solchen Substitution entsprechen und sich mit Rücksicht auf die Wurzelwerthe $\tau = 1, -1, i, -i$ für $\alpha_1\,\alpha_4 = \alpha_2\,\alpha_3 = -i$ und für $\alpha_1\,\alpha_3 = \alpha_4\,\alpha_2 = i$ ergeben, kommen hier nicht in Betracht, da die in sich transformirten Büschel durchweg imaginär sind; dagegen existiren für die beiden Arten hier in Betracht kommender uneigentlicher Collineationen, welche sich aus

$$\alpha_1\,\alpha_2 = -\alpha_3\,\alpha_4 = -1,\ \alpha_1 = -\alpha_2 = 1 \text{ und } \alpha_3 = -\alpha_4 = i$$

ergeben, zwei Netze sich selbst entsprechender Flächen, zu welchen die (mit Ausnahme von $F_1^{(1)}$) reelle Flächen $F^{(1)}$ gehören (vergl. § 8 Formeln (28ε'), (ε''), (28λ'), (28λ'') und § 9 unter I B 1)). Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $\sigma = i, -i, 1, -1, 1, -1$. Der ersten und dritten Potenz einer Substitution S entsprechen zwei zusammengehörige vierzählige uneigentliche Collineationen, während S^2 die geschaart involutorische Collineation mit dem Axenpaar B, B' darstellt.

Beispiele: 1) Zu Tetraeder T_1: vgl. § 18 A 2).

2)
$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{30} & x'_2 = x_{27} \\ x'_3 = x_{14} & x'_4 = -x_{11} \\ x'_5 = x_{22} & x'_6 = -x_{19} \\ \multicolumn{2}{c}{-G_1^{(2)} \ldots B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [2\ 1\ {-4}\ 3]_4, \quad S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{28} & x'_2 = -x_{27} \\ x'_3 = -x_{12} & x'_4 = -x_{11} \\ x'_5 = -x_{20} & x'_6 = -x_{19} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots -G_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [1\ 4\ {-2}\ 3]_9;$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_7 & x'_6 = x_6 \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(1)} \ldots -B_1^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [2\ {-1^*}\ {-4}\ 3]_{70}: \left\{\begin{array}{l}\text{geschaarte Involution} \\ \text{mit Axenpaar } B, B'.\end{array}\right.$$

Haupttetraeder:

$$\left.\begin{array}{lllllll} Z_1\ (\mathfrak{D}_1) & \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \ldots\ Z_1\ (\Delta_1) \\ Z_2\ (\mathfrak{D}_2) & \ldots & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \ldots\ Z_2\ (\Delta_2) \\ Z_3\ (\mathfrak{b}_0) & \ldots & 1+i\operatorname{tg}\varphi & i(1+i\operatorname{tg}\varphi) & \operatorname{cotg}\varphi & -i\operatorname{cotg}\varphi & \ldots\ Z_4\ (\beta'_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{b}'_0) & \ldots & 1-i\operatorname{tg}\varphi & -i(1-i\operatorname{tg}\varphi) & \operatorname{cotg}\varphi & i\operatorname{cotg}\varphi & \ldots\ Z_3\ (\beta_0) \end{array}\right\}$$

$$K_{12}, K_{34} \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad \mp 2i \quad 1 \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \ldots (B, B')$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{13}, K_{42} \ldots -1\pm i\operatorname{cotg}\varphi \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \pm i\operatorname{tg}\varphi \quad -2 \quad -(\operatorname{tg}\varphi \pm i) \quad \pm 2i \\ K_{14}, K_{23} \ldots -(1\pm i\operatorname{cotg}\varphi) \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \mp i\operatorname{tg}\varphi \quad 2 \quad -(\operatorname{tg}\varphi \mp i) \quad \pm 2i \end{array}\right\} \begin{array}{l} |\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}_0| = |\Delta\beta'_0| \\ |\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}'_0| = |\Delta\beta_0| \end{array}$$

(vgl. (39b) in § 43).

Tetraedraler Complex: $(x_1\, x_4 - x_5\, x_6) + (x_1\, x_6 - x_3\, x_4) \operatorname{cotg} \varphi + (x_3\, x_6 + x_4\, x_5) \operatorname{tg} \varphi = 0.$

Complexbüschel: $\left(x_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{x_3}{2} + x_5 \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2}\right) + \mu'\, x_2 = 0$ oder $x_{27} + \mu'\, x_2 = 0.$

Das Netz in sich transformirter Flächen:

$$k\, Z_1^2 + l\, Z_2^2 + 2\, m\, Z_3\, Z_4 = 0$$

enthält $F_1^{(1)}$, entsprechend den Werthen $k = 1,\ l = 1,\ m = \frac{1}{8}$; ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = -\frac{1}{8}$ die Fläche

$$F^{(1)} \ldots z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2 \operatorname{cotg}^2 \varphi\, (z_1\, z_3 - z_4\, z_2) + 2 \operatorname{cotg} \varphi\, (z_1\, z_4 + z_2\, z_3) = 0$$

oder $\ldots x_{27}^2 + x_4^2 + x_6^2 \equiv x_{11}^2 + x_{19}^2 + x_2^2 = 0$ (vgl. § 45 unter I 2)) u. s. w.

3)
$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{30} & x'_1 = -x_1 \\ x'_3 = x_{14} & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = -x_{22} & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(2)} \ldots B_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1\ {*2}\ 3\ 4]_{72}, \quad S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = -x_{23} \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = -x_7 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = -x_{15} \\ \multicolumn{2}{c}{B_1^{(2)} \ldots -C_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1\ {*2}\ 3\ 4]_{59};$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{23} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = x_7 & x'_4 = -x_{14} \\ x'_5 = -x_{22} & x'_6 = -x_{15} \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(1)} \ldots -B_2^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [2\ 4\ 3\ 1]_{17}; \left\{ \begin{array}{c} \text{geschaarte Involution} \\ \text{mit Axenpaar } B,\ B'. \end{array}\right.$$

Haupttetraeder:

$$\left.\begin{array}{llllll} Z_1\ (\mathfrak{D}_1) \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots Z_1\ (\Delta_1) \\ Z_2\ (\mathfrak{D}_2) \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots Z_2\ (\Delta_2) \\ Z_3\ (\mathfrak{b}_0) \ldots & -\operatorname{cotg}^2 \varphi + 2\, i & -\operatorname{cotg} \varphi (1 + 2\, i) & \sqrt{5} & 0 & \ldots Z_4\ (\beta'_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{b}'_0) \ldots & -\operatorname{cotg}^2 \varphi - 2\, i & -\operatorname{cotg} \varphi (1 - 2\, i) & \sqrt{5} & 0 & \ldots Z_3\ (\beta_0) \end{array}\right\}$$

$$K_{12},\ K_{34} \ldots \operatorname{cotg} \varphi \quad \pm i \operatorname{cotg} \varphi \quad -\operatorname{tg} \varphi \quad \mp i \operatorname{tg} \varphi \quad 1 \quad \mp i \ldots (B,\ B')$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{13},\ K_{42} \ldots \sqrt{5} \quad -\sqrt{5} \quad \operatorname{cotg} \varphi\, (1 \pm 2\, i) \quad -\operatorname{cotg} \varphi\, (1 \pm 2\, i) \quad -\operatorname{cotg}^2 \varphi \pm 2\, i \quad -\operatorname{cotg}^2 \varphi \pm 2\, i \\ K_{14},\ K_{23} \ldots \sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad \operatorname{cotg} \varphi\, (1 \mp 2\, i) \quad -\operatorname{cotg} \varphi\, (1 \mp 2\, i) \quad -(\operatorname{cotg}^2 \varphi \pm 2\, i) \quad \operatorname{cotg}^2 \varphi \pm 2\, i \end{array}\right\}$$

$$|\, \mathfrak{D}\, \mathfrak{b}_0 \,| = |\, \Delta\, \beta'_0 \,| \text{ und } |\, \mathfrak{D}\, \mathfrak{b}'_0 \,| = |\, \Delta\, \beta_0 \,|\,.$$

Tetraedraler Complex:

$$x_1 \left(-\frac{x_2}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{x_4}{2} - \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2}\, x_6\right) + x_3 \left(-\frac{x_2}{2} - \frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{2}\, x_4 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2}\, x_6\right) + x_5 \left(\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2}\, x_2 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2}\, x_4 + \frac{x_6}{2}\right) = 0.$$

Complexbüschel: $x_{21} + \mu\, x_{16} = 0.$

Das Netz in sich transformirter Flächen:

$$k\, Z_1^2 + l\, Z_2^2 + 2\, m\, Z_3\, Z_4 = 0$$

enthält die Fläche $F_1^{(1)}$ entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = \frac{1}{8} \operatorname{tg} \varphi$;

ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = -\frac{1}{8} \operatorname{tg} \varphi$ die Fläche

$F^{(1)}: -z_1{}^2 - \mathrm{cotg}\,\varphi\; z_2{}^2 + \mathrm{tg}\,\varphi\; z_3{}^2 + 2\, z_4{}^2 + 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\; z_1\, z_2 + 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\; z_1\, z_3 + 2\, z_2\, z_3 = 0$

oder $x_{21}{}^2 + x_{24}{}^2 + x_8{}^2 \equiv x_{22}{}^2 + x_{23}{}^2 + x_7{}^2 = 0,$

welche zu den 144 in § 45 unter I 2) betrachteten Flächen $F^{(1)}_{11} \dots F^{(1)}_{154}$ gehört; u. s. w.

13 B) 900 vierzählige Axencorrelationen der zweiten Art.

Die zugehörigen Substitutionen sind bezüglich mit denjenigen für die 900 vierzähligen Collineationen 13 A) übereinstimmend; nur sind den beiden zusammensetzenden Substitutionen die gleichen Vorzeichen zu ertheilen. Die 12 auf das Tetraeder T_1 und die 24 auf T_2, T_3 entfallenden Substitutionen sind bereits in § 18 B 2) betrachtet worden.

Für die diesen Substitutionen entsprechenden vierzähligen Axencorrelationen der zweiten Art (vgl. § 9 II A 3)) sind die beiden sich involutorisch entsprechenden Axen je ein Geradenpaar B, B' und zwar dasselbe, welches für die entsprechende vierzählige Collineation das Kantenpaar K_{12}, K_{34} des Haupttetraeders (vgl. 13 A) und für das Quadrat der Substitution (sowohl der die Collineation als auch der die Correlation bedeutenden) das Axenpaar der zugehörigen geschaarten Involution darstellt. Die Mittelpunkte und Ebenen der festbleibenden Strahlbüschel sind das Punktpaar $\mathfrak{B}$ der einen und das Ebenenpaar B der anderen Axe; jeder der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ und jede der 60 Ebenen B tritt also 15 mal auf. Aus den früher (§ 9 II A 3)) Formeln (70)) aufgestellten Formeln lassen sich leicht die Gleichungen der beiden in sich transformirten Complexe, der in sich auf die zweite Art transformirten Flächen zweiten Grades u. s. w. entnehmen. Die Wurzeln der Gleichung in σ sind $1, -1, i, -i, i, -i$.

Beispiele: 1) Zu Tetraeder T_1 vgl. § 18 B 2).

2) $S \dots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{30} & x'_2 = x_{27} \\ x'_3 = -x_{14} & x'_4 = -x_{11} \\ x'_5 = -x_{22} & x'_6 = -x_{19} \\ \multicolumn{2}{c}{G_1^{(2)} \dots B_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \dots [\overline{2\ 1\ {-4}\ 3}]_4, \qquad S^3 \dots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{28} & x'_2 = x_{27} \\ x'_3 = -x_{12} & x'_4 = x_{11} \\ x'_5 = -x_{20} & x'_6 = x_{19} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \dots G_1^{(1)}} \end{matrix}\right\} \dots [\overline{1\ 4\ {-2}\ 3}]_9;$

$S^2 = B_2^{(1)} \dots B_1^{(2)}$ wie im Beispiel 2) zu 13 A) gesch. Invol. mit Axenpaar B, B'.

Axenpaar: $\mathrm{tg}\,\varphi \quad \mp 2\,i \quad 1 \quad 0 \quad \mathrm{cotg}\,\varphi \quad 0 \dots (B, B')$.

Mittelpunkte (Ebenen) der Strahlbüschel:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi & \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & \frac{1}{2} & \dots\ \mathfrak{B}_{23}\ (B_{23}) \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & \dots\ \mathfrak{B}_{31}\ (B_{31}). \end{matrix}\right\}$$

Die in sich transformirten Complexe sind:

$$x_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{x_3}{2} + x_5 \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2} \pm x_2 = 0 \quad \text{oder} \quad x_{27} \pm x_2 = 0.$$

Die Fläche $F_1^{(1)}$ wird auf die zweite Art in sich transformirt u. s. w.

3)

$$S \ldots \left\{ \begin{matrix} x'_1 = -x_{30} & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = -x_{14} & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = x_{22} & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(2)} \ldots B_1^{(1)}} \end{matrix} \right\} \ldots \overline{[-1^* \; 2 \; 3 \; 4]}_{72}, \quad S^3 \ldots \left\{ \begin{matrix} x'_1 = -x_2 & x'_2 = x_{23} \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = x_7 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = x_{15} \\ \multicolumn{2}{c}{B_1^{(2)} \ldots C_2^{(1)}} \end{matrix} \right\} \ldots \overline{[-1^* \; 2 \; 3 \; 4]}_{59};$$

$S^2 = B_2^{(1)} \ldots B_2^{(2)}$ wie im Beispiel 3) zu 13 A) geschaarte Invol. mit Axenpaar B, B'.

Axenpaar: $\operatorname{cotg} \varphi \quad \pm i \operatorname{cotg} \varphi \quad -\operatorname{tg} \varphi \quad \mp i \operatorname{tg} \varphi \quad 1 \quad \mp i \ldots (B, B')$

Mittelpunkte (Ebenen) der Strahlbüschel:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \varphi & 0 & \ldots \mathfrak{B}_{49} \; (B_{49}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \mathfrak{B}_4 \; (B_4). \end{matrix} \right\}$$

Die in sich transformirten Complexe sind:

$$\left(x_1 \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2} - x_3 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{x_5}{2}\right) \pm \left(-x_2 \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2} + x_4 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{x_6}{2}\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad x_{21} \pm x_{16} = 0.$$

Die Fläche $F_1^{(1)}$, ebenso die im Beispiel 3) zu 13 A) betrachtete Fläche $F^{(1)}$:

$$x_{21}^2 + x_{24}^2 + x_8^2 \equiv x_{22}^2 + x_{23}^2 + x_7^2 = 0$$

werden in sich auf die zweite Art transformirt u. s. w.

14 A) 1200 sechszählige uneigentliche Collineationen.

Die betreffenden Substitutionen können nach ihrer Zusammensetzung und Zuordnung zu den Tetraedern $T_1 \ldots T_{75}$ wiederum aus der Tabelle (70 A) entnommen werden. Die 32 auf das Tetraeder T_1 und die 2 $(8+24) = 64$ auf die beiden Tetraeder T_2, T_3 entfallenden Substitutionen sind bereits früher (§ 21 A) betrachtet worden; von den dort unter a) aufgeführten tritt hier nur die Hälfte auf.

Die Eckpunkte (Ebenen) je eines Haupttetraeders sind einmal ein reelles Punkt-(Ebenen-)Paar, nämlich je einer der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ (je eine der 60 Ebenen B), speciell je ein Punkt $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_{12}$ (je eine Ebene $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{12}$) und je einer der 600 Punkte $\mathfrak{K}$ (je eine der 600 Ebenen K) (vergl. § 41 unter 6)), speciell je einer der 48 Punkte $\mathfrak{d}$ (je eine der 48 Ebenen δ) (vergl. (6) in § 41 und (12ϑ) in § 3), sodann ein imaginär conjugirtes Punkt- (Ebenen-) Paar, nämlich $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ (γ'_0, γ_0). Das reelle Kantenpaar eines Haupttetraeders

ist ein Geradenpaar C, C' (vgl. (8b) in § 41), speciell ein Geradenpaar k, k' (vgl. ($8b_1$) und (11δ) in § 3); die beiden imaginären Kantenpaare, welche die die Fläche $F_1^{(1)}$ berühren, sind je ein Geradenpaar $| \mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0 | = | K\gamma'_0 |$ (vgl. (28a) (30a), (32a), (33a) in § 43) und je ein Geradenpaar $| \mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0 | = | B\gamma'_0 |$ (vgl. (28b), (30), (32b), (33b) in § 43); speciell sind die 192 in (28a) und (28b) aufgeführten Geraden $| \mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0 |$ und $| \mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0 |$ mit den früher (($13\delta'$), ($13\delta''$) in § 4 unter 4) durch p, p' bezeichneten Geraden identisch. Bei den 600 Haupttetraedern tritt also jeder der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ zehnmal, jeder der 600 Punkte $\mathfrak{K}$ einmal und jeder der 400 Punkte $\mathfrak{c}_0$ dreimal auf; von den 200 Geraden C tritt jede sechsmal und jede der 1200 Geraden $| \mathfrak{B}\,\mathfrak{c}_0 |$ und der 1200 Geraden $| \mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0 |$ einmal auf.

Die beiden, den Substitutionen S und S^5 entsprechenden Transformationen sind zwei zusammengehörige sechszählige, auf eine Art uneigentliche Collineationen (vergl. § 9 I B) unter 2 b)), während S^2 und S^4 zwei zusammengehörige dreizählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar C, C' (vergl. 4 A) in § 47) und S^3 die centrische Involution mit Centrum $\mathfrak{B}$ und Homologie-Ebene B (vergl. unter 12 A) dieses §) darstellt. Die Wurzeln der Gleichung in τ sind $\tau = 1, -1, -\alpha, -\alpha^2$, derjenigen in σ sind $\sigma = i, -i, i\alpha, -i\alpha, i\alpha^2, -i\alpha^2$ (vergl. (62δ) in § 9). Die Gleichung des in sich transformirten tetraedralen Complexes, des Complexbüschels, sowie des Netzes derjenigen Flächen, welche auf die zweite Art in sich transformirt werden und zu welchen ausser der Fläche $F_1^{(1)}$ auch eine Fläche $F^{(e)}$ (vgl. § 45 unter (55e)) gehört, ist mit Benutzung der früher aufgestellten Formeln leicht zu erhalten.

Beispiele: 1) Zu T_1 vgl. § 21 unter A).

2)
$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{20} & x'_2 = -x_{17} \\ x'_3 = -x_{28} & x'_4 = -x_{25} \\ x'_5 = -x_{12} & x'_6 = x_9 \\ \multicolumn{2}{c}{-G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [4\ 3\ -2\ 1]_{16}, \quad S^5 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = -x_{24} & x'_4 = -x_{29} \\ x'_5 = x_8 & x'_6 = -x_{13} \\ \multicolumn{2}{c}{-G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [-4\ 3\ -2\ -1^*]_{19}$$

Haupttetraeder

$$\begin{matrix} Z_1\ (\mathfrak{B}_4) \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots Z_1\ (B_4) \\ Z_2\ (\mathfrak{K}) \ldots & \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 & \ldots Z_2\ (K) \\ Z_3\ (\mathfrak{c}_0) \ldots & \cos\psi & i & -\sin\psi & 0 & \ldots Z_4\ (\gamma'_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{c}'_0) \ldots & \cos\psi & -i & -\sin\psi & 0 & \ldots Z_3\ (\gamma_0) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{llcccccccl} K_{12},\ K_{34} & \ldots & \cos\psi & \pm i\cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi & \mp i\sin\psi & \ldots & (C,\ C') \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{c}_0| = |K\,\gamma'_0| \ldots \sin\psi \quad i\sin\psi \quad i \quad -1 \quad -\cos\psi \quad i\cos\psi \\ |\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}'_0| = |B_4\,\gamma_0| \ldots \sin\psi \quad -i\sin\psi \quad -i \quad -1 \quad -\cos\psi \quad -i\cos\psi \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{c}'_0| = |K\,\gamma_0| \ldots \sin\psi \quad i\sin\psi \quad -i \quad 1 \quad -\cos\psi \quad i\cos\psi \\ |\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B_4\,\gamma'_0| \ldots \sin\psi \quad -i\sin\psi \quad i \quad 1 \quad -\cos\psi \quad -i\cos\psi \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{vgl. (32a) und (32b) in § 43.}$$

Tetraedraler Complex: $(x_1\,x_4 - x_2\,x_3)\sin\psi - (x_3\,x_6 + x_4\,x_5)\cos\psi = 0$.

Complexbüschel: $(x_1\cos\psi + x_5\sin\psi) + \mu'(x_2\cos\psi - x_6\sin\psi) = 0$.

Das Netz in sich transformirter Flächen:

$$k\,Z_1^2 + l\,Z_2^2 + 2\,m\,Z_3\,Z_4 = 0$$

enthält $F^{(1)}_1$, entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = \frac{1}{2}$; ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = -\frac{1}{2}$ die Fläche

$$F^{(e)} \ldots (z_1^2 - z_3^2)\cos 2\psi + (z_2^2 - z_4^2) - 2\,z_1\,z_3\sin 2\psi \equiv$$

$$\left.\begin{array}{l} \equiv (x_1\cos\psi + x_5\sin\psi)^2 + (x_2\sin\psi + x_6\cos\psi)^2 + x_4^2 \\ \equiv (x_1\sin\psi - x_5\cos\psi)^2 + (x_2\cos\psi - x_6\sin\psi)^2 + x_3^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55e) in § 45) u. s. w.

Die beiden Substitutionen S^2, S^4:

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{21} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = x_8 \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(1)} \ldots -C_2^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [4\ -3\ 2\ -1^*]_{19},\quad S^4 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{17} & x'_2 = -x_{20} \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = -x_{28} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = x_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(1)} \ldots C_2^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [-4\ -3\ 2\ 1]_{16}$$

bedeuten zwei zusammengehörige dreizählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar C, C' (vgl. § 47 unter 4 A)); die Substitution S^3 endlich

$$S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = x_1 \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = x_3 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = -x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{B_1^{(2)} \ldots -B_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1\ -2\ -3\ 4]_1$$

bedeutet die centrische Involution (vgl. 12 A) dieses §) mit Centrum $\mathfrak{B}_4$ und Ebene B_4.

3)
$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = x_1 \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = x_3 \\ x'_5 = x_8 & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(2)} \ldots J^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [3\ -4\ -1^*\ -2]_{74},\quad S^5 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = -x_{19} \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = -x_{27} \\ x'_5 = -x_6 & x'_6 = x_{11} \\ \multicolumn{2}{c}{-J^{(2)} \ldots C_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [3\ -4\ 1\ {}^*2]_{52}.$$

Haupttetraeder:

$$\left.\begin{array}{llccccll} Z_1\ (\mathfrak{B}_{44}) & \ldots & \frac{1}{2} & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & 0 & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & \ldots & Z_1\ (B_{44}) \\ Z_2\ (\mathfrak{K}) & \ldots & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\cos\psi}{2} & 0 & -\frac{\sin\psi}{2} & \ldots & Z_2\ (K)\,^{1)} \\ Z_3\ (\mathfrak{c}_0) & \ldots & 0 & \sin\psi & i & \cos\psi & \ldots & Z_4\ (\gamma'_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{c}'_0) & \ldots & 0 & \sin\psi & -i & \cos\psi & \ldots & Z_3\ (\gamma_0) \end{array}\right|$$

1) Vgl. Formel (6) unter 3) in § 41).

$$
\begin{array}{llllllll}
K_{12},\ K_{34} \ldots & -\cos\psi & \pm i\cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi & \mp i\sin\psi & \ldots (C,\ C') \\
\left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{B}_{44}\,\mathfrak{c}_0| = |K\gamma'_0| \ldots \\ |\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}'_0| = |B_{44}\,\gamma_0| \ldots \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha\sin\psi \\ \alpha^2\sin\psi \end{array} & \begin{array}{l} -i\sin\psi \\ i\sin\psi \end{array} & \begin{array}{l} i\alpha \\ -i\alpha^2 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \alpha\cos\psi \\ \alpha^2\cos\psi \end{array} & \left. \begin{array}{l} -i\cos\psi \\ i\cos\psi \end{array} \right\} & \\
\left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{B}_{44}\,\mathfrak{c}'_0| = |K\gamma_0| \ldots \\ |\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}_0| = |B_{44}\,\gamma'_0| \ldots \end{array} \right. & \begin{array}{l} -\alpha^2\sin\psi \\ -\alpha\sin\psi \end{array} & \begin{array}{l} i\sin\psi \\ -i\sin\psi \end{array} & \begin{array}{l} i\alpha^2 \\ -i\alpha \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} -\alpha^2\cos\psi \\ -\alpha\cos\psi \end{array} & \left. \begin{array}{l} i\cos\psi \\ -i\cos\psi \end{array} \right\} & \text{(vgl. (32a) und (32b) in § 43).}
\end{array}
$$

Tetraedraler Complex:

$$x_1\left(\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2}x_2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_4 + \frac{x_6}{2}\right) + x_3\left(-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_6\right) + x_5\left(\frac{x_2}{2} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}x_4 + \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2}x_6\right) = 0.$$

Complexbüschel: $(x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi) + \mu'(x_2 \cos\psi - x_6 \sin\psi) = 0.$

Das Netz in sich transformirter Flächen:

$$k\,Z_1{}^2 + l\,Z_2{}^2 + 2\,m\,Z_3\,Z_4 = 0$$

enthält $F_1^{(1)}$ entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = \frac{1}{2}$; ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = -\frac{1}{2}$ die Fläche

$$\left.\begin{array}{l} F^{(e)} \ldots (z_1{}^2 - z_3{}^2) + (z_2{}^2 - z_4{}^2)\cos 2\psi - 2\,z_4\,z_2\,\sin 2\psi \equiv \\ \equiv (x_1 \cos\psi - x_5 \sin\psi)^2 + (x_2 \sin\psi + x_6 \cos\psi)^2 + x_4{}^2 \\ \equiv (x_1 \sin\psi + x_5 \cos\psi)^2 + (x_2 \cos\psi - x_6 \sin\psi)^2 + x_3{}^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55e) in § 45) u. s. w.

Die beiden Substitutionen S^2, S^4:

$$S^2 \ldots \left|\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{15} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_8 \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(1)} \ldots -C_2^{(2)}} \end{array}\right| \ldots [1\ 4\ {-2}\ {-3}]_4 \qquad S^4 \ldots \left|\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{19} & x'_2 = -x_{20} \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = -x_{28} \\ x'_5 = x_{11} & x'_6 = x_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(1)} \ldots C_2^{(2)}} \end{array}\right| \ldots [1\ {-4}\ 2\ {-3}]_5$$

bedeuten wiederum zwei zusammengehörige dreizählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar C, C'; und die Substitution S^3:

$$S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{20} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = -x_{28} & x'_4 = x_{23} \\ x'_5 = x_{12} & x'_6 = x_7 \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(2)} \ldots -C_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [3\ {-4}\ 1\ 2]_{12}$$

bedeutet die centrische Involution mit Centrum $\mathfrak{B}_{44}$ und Ebene B_{44}.

14 B) 1200 sechszählige uneigentliche Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen werden aus denjenigen für die 1200 sechszähligen uneigentlichen Collineationen 14 A) erhalten, wenn den beiden zusammensetzenden Substitutionen gleiche Vorzeichen ertheilt werden. Die 32 auf das Tetraeder T_1 und die 2 (8+24) = 64 auf T_2 und T_3 entfallenden Substitutionen sind bereits früher (§ 21 B) betrachtet worden; von den dort unter a) aufgeführten tritt hier nur die Hälfte auf.

Für die je zwei zusammengehörigen Substitutionen S und S^5 entsprechenden sechszähligen uneigentlichen Correlationen (vgl. § 9 II B) 1)) hat das Haupttetraeder folgende Beschaffenheit. Ein Ecken- (Flächen-) Paar Z_1, Z_4 (Z_1, Z_4) ist reell und durch zwei Punkte $\mathfrak{P}$ (Ebenen Π) (vgl. § 43 unter 3b)), welche bei der Uebertragung auf den dreidimensionalen sphärischen Raum durch eine Umdrehung um $\frac{\pi}{4}$ auf dem Hauptkreise C aus den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ resultiren, speciell zwei Punkte $\mathfrak{p}$ (Ebenen π) (vergl. (50ζ) in § 8) gebildet, während das andere Ecken- (Flächen-) Paar Z_2, Z_3 (Z_3, Z_2) aus denselben beiden Punkten $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_0'$ (Ebenen γ'_0, γ), speciell $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}'_0$ $(\varkappa'_0, \varkappa_0)$ besteht, wie für die entsprechenden sechszähligen uneigentlichen Collineationen 14 A). Das reelle Kantenpaar K_{14}, K_{23} ist wiederum ein Geradenpaar C, C', speciell k, k'; die beiden imaginären Kantenpaare sind zwei Geradenpaare

$$|\mathfrak{P}_i\, \mathfrak{c}_0| = |\Pi_k\, \gamma'_0|,$$

speciell t (vgl. (41e), (41h), (41l) und (41o') in § 43 und (50ζ), (50η) in § 8). Das Geradenpaar C, C' bildet die Leitgeraden für die beiden festbleibenden linearen Complexe $\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}''$ und das Axenpaar für die beiden, den Potenzen S^2 und S^4 entsprechenden dreizähligen axialen Collineationen (vgl. 4 A) in § 47). Die Potenz S^3 bedeutet eine Polar-Correlation mit einer Basisfläche $F^{(2)}$ (vgl. 12 B) dieses §).

Aus den Wurzelwerthen $\sigma = 1, -1, \alpha, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^2$ für S und S^5, den Werthen (vgl. § 8 III unter 2) und § 9 II B unter 1))

$$\alpha_{14} = \alpha_{41} = 1,\ \alpha_{23} = \alpha,\ \alpha_{32} = \alpha^2 \ \text{und} \left\{\begin{matrix} \nu_1 = -1 & \nu_1' = \nu_3' = i\sqrt{3} \\ \nu_3 = 1 & \nu_5' = 0 \\ \nu_5 = 2 & \end{matrix}\right\}$$

ergeben sich in einfacher Weise die Gleichungen des Complexes Ω'', der festbleibenden Gewinde $\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}''$, der Flächen G_1, G_2, welche bez. durch eine Fläche $F^{(2)}$ und eine Fläche $F^{(f)}$ (vgl. (55f) in § 45) repräsentirt sind, der Kernflächen K_1, K_2 u. s. w.; der Complex Ω_w der Wechselstrahlen zerfällt wegen $\nu_1' = \nu_3'$ in die beiden speciellen linearen Complexe, deren Leitgerade je eine Gerade C, C' ist.

Beispiele: 1) Zu T_1 vgl. § 21 unter B).

2) $$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{20} & x'_2 = -x_{17} \\ x'_3 = x_{28} & x'_4 = -x_{25} \\ x'_5 = x_{12} & x'_6 = x_9 \\ \multicolumn{2}{c}{G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots \overline{[4\ 3\ -2\ 1]}_{16},\quad S^5 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = -x_{29} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = -x_{13} \\ \multicolumn{2}{c}{G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots \overline{[-4\ 3\ -2\ -1^*]}_{19};$$

S^2 und S^4 wie im Beispiel 2) zu $14\,A$)

$$S^3 \,.\,.\, \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_2 & x'_2 = x_1 \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = x_3 \\ x'_5 = -x_6 & x'_6 = -x_5 \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{-1\ -2\ -3\ 4}]_1$$

bedeutet die Polarcorrelation mit der Basisfläche

$$F^{(2)} \ldots z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2 \equiv (x_1 \pm x_2)^2+(x_3 \pm x_4)^2+(x_5 \mp x_6)^2 = 0.$$

Haupttetraeder für S und S^5:

$$\left.\begin{matrix} Z_1\ (\mathfrak{P}_i) & \ldots & \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots & Z_1\ (\Pi_i) \\ Z_2\ (\mathfrak{c}_0) & \ldots & \cos\psi & i & -\sin\psi & 0 & \ldots & Z_3\ (\gamma'_0) \\ Z_3\ (\mathfrak{c}'_0) & \ldots & \cos\psi & -i & -\sin\psi & 0 & \ldots & Z_2\ (\gamma_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{P}_k) & \ldots & \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots & Z_4\ (\Pi_k) \end{matrix}\right|$$

$$K_{14},\ K_{23} \ldots \cos\psi \quad \pm i\cos\psi \quad 0 \quad 0 \quad \sin\psi \quad \mp i\sin\psi \ldots (C,\ C')$$

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} |\,\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_k\,\gamma'_0\,| \ldots & \sin\psi & \sin\psi & i & i & -\cos\psi & \cos\psi \\ |\,\mathfrak{P}_k\,\mathfrak{c}'_0\,| = |\,\Pi_i\,\gamma_0\,| \ldots & \sin\psi & \sin\psi & -i & -i & -\cos\psi & \cos\psi \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} |\,\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{c}'_0\,| = |\,\Pi_k\,\gamma_0\,| \ldots & \sin\psi & -\sin\psi & -i & i & -\cos\psi & -\cos\psi \\ |\,\mathfrak{P}_k\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_i\,\gamma'_0\,| \ldots & \sin\psi & -\sin\psi & i & -i & -\cos\psi & -\cos\psi \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} \text{(vgl. (411) in § 43).}$$

$$\Omega'' \ldots -x_1\,x_2 \operatorname{cotg}\varphi + x_2\,x_6 + x_3\,x_4 - x_2\,x_5 - x_5\,x_6 \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

$$C' \ldots (x_1 - x_2)\cos\psi + (x_5 + x_6)\sin\psi = 0, \qquad C'' \ldots (x_1 + x_2)\cos\psi + (x_5 - x_6)\sin\psi = 0.$$

$$\left\{\begin{aligned} &G_1 \ldots Z_1\,Z_4 + Z_2\,Z_3 \equiv z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2 \equiv (x_1 \pm x_2)^2+(x_3 \pm x_4)^2+(x_5 \mp x_6)^2 = 0 \ldots F^{(2)} \\ &\qquad \text{(Basisfläche der } S^3 \text{ entsprechenden Polarcorrelation),} \\ &G_2 \ldots Z_1\,Z_4 - Z_2\,Z_3 \equiv (z_1^2 - z_3^2)\cos 2\psi + z_2^2 + z_4^2 - 2\,z_1\,z_3 \sin 2\psi \equiv \\ &\qquad \equiv (x_1\,x_2 + x_5\,x_6)\cos 2\psi + (x_2\,x_5 - x_1\,x_6)\sin 2\psi - x_3\,x_4 = 0 \ldots F^{(f)} \\ &\qquad \text{(vgl. (55 f) in § 45).} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &K_1 \ldots 2\,Z_1\,Z_4 - Z_2\,Z_3 \equiv Z_1\,Z_4 - 2\,Z_2\,Z_3 \equiv \operatorname{tg}\varphi\ z_1^2 + z_2^2 - \operatorname{cotg}\varphi\ z_3^2 + \\ &\qquad + 2\,z_4^2 - 2\,z_1\,z_3 \equiv -\operatorname{cotg}\varphi\ \zeta_1^2 - 2\,\zeta_2^2 + \operatorname{tg}\varphi\ \zeta_3^2 - \zeta_4^2 + 2\,\zeta_1\,\zeta_3 = 0 \\ &K_2 \ldots Z_1\,Z_4 - 2\,Z_2\,Z_3 \equiv 2\,Z_1\,Z_4 - Z_2\,Z_3 \equiv -\operatorname{cotg}\varphi\ z_1^2 - 2\,z_2^2 + \operatorname{tg}\varphi\ z_3^2 - z_4^2 + \\ &\qquad + 2\,z_1\,z_3 \equiv \operatorname{tg}\varphi\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \operatorname{cotg}\varphi\ \zeta_3^2 + 2\,\zeta_4^2 - 2\,\zeta_1\,\zeta_3 = 0. \end{aligned}\right.$$

3)

$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{16} & x'_2 = x_1 \\ x'_3 = -x_{24} & x'_4 = x_3 \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(2)} \ldots J^{(1)}} \end{matrix}\right\} \,.\,.\, [\overline{3\,-4\,-1^*\,-2}]_{74}, \qquad S^5 \,.\,.\, \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_2 & x'_2 = -x_{19} \\ x'_3 = x_4 & x'_4 = -x_{17} \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = x_{11} \\ \multicolumn{2}{c}{J^{(2)} \ldots C_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{3\ -4\ 1\ {}^*2}]_{52};$$

S^2 und S^4 wie im Beispiel 3) zu $14\,A$).

$$S^3 \,.\,.\, \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{20} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = x_{18} & x'_4 = x_{23} \\ x'_5 = -x_{12} & x'_6 = x_7 \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(2)} \ldots -C_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [\overline{3\ -4\ 1\ 2}]_{12}$$

bedeutet die Polarcorrelation mit der Basisfläche $F^{(2)}$:

$$F^{(2)} \ldots z_1^2 - \operatorname{tg}\varphi\ z_2^2 + 2\,z_3^2 + \operatorname{cotg}\varphi\ z_4^2 - 2 \operatorname{cotg}\varphi\ z_1\,z_2 + 2 \operatorname{tg}\varphi\ z_1\,z_4 + 2\,z_4\,z_2 = 0$$

$$\equiv -(x_1\,x_2 - x_3\,x_6 + x_5\,x_4)\operatorname{cotg}\varphi + (x_1\,x_6 + x_3\,x_4 + x_5\,x_2) + (x_1\,x_4 + x_3\,x_2 + x_5\,x_6)\operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Haupttetraeder für S und S^5

$$\left.\begin{array}{llcccccl}
Z_1\ (\mathfrak{P}_i) & \ldots & \frac{c_2}{2} & -\frac{c_1 \cos\psi}{2} & 0 & \frac{c_1 \sin\psi}{2}{}^{1)} & \ldots & Z_1\ (\Pi_i) \\
Z_2\ (\mathfrak{c}_0) & \ldots & 0 & \sin\psi & i & \cos\psi & \ldots & Z_3\ (\gamma'_0) \\
Z_3\ (\mathfrak{c}'_0) & \ldots & 0 & \sin\psi & -i & \cos\psi & \ldots & Z_2\ (\gamma_0) \\
Z_4\ (\mathfrak{P}_k) & \ldots & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2 \cos\psi}{2} & 0 & -\frac{c_2 \sin\psi}{2}{}^{1)} & \ldots & Z_4\ (\Pi_k)
\end{array}\right|$$

$$K_{14},\ K_{23} \ldots -\cos\psi \quad \pm i\cos\psi \quad 0 \quad 0 \quad \sin\psi \quad \mp i \sin\psi \ldots (C,\ C')$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
|\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_k\,\gamma'_0| \ldots \quad \alpha\sin\psi \quad -\sin\psi \quad \alpha i \quad -i \quad \alpha\cos\psi \quad -\cos\psi \\
|\mathfrak{P}_k\,\mathfrak{c}'_0| = |\Pi_i\,\gamma_0| \ldots \quad \alpha^2\sin\psi \quad -\sin\psi \quad -\alpha^2 i \quad i \quad \alpha^2\cos\psi \quad -\cos\psi
\end{array}\right\} \\
\left\{\begin{array}{l}
|\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{c}'_0| = |\Pi_k\,\gamma_0| \ldots \quad \alpha^2\sin\psi \quad \sin\psi \quad -\alpha^2 i \quad -i \quad \alpha^2\cos\psi \quad \cos\psi \\
|\mathfrak{P}_k\,\mathfrak{c}_0| = |\Pi_i\,\gamma'_0| \ldots \quad \alpha\sin\psi \quad \sin\psi \quad \alpha i \quad i \quad \alpha\cos\psi \quad \cos\psi
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\ \text{(vgl. (411) in § 43).}$$

$$\Omega'' \ldots x_1\left(x_2 \frac{1}{\sin^2\varphi} - x_4 \operatorname{tg}\varphi - x_6\right) + x_3\,(x_2 \operatorname{tg}\varphi + x_4 + x_6 \operatorname{cotg}\varphi) + \\ + x_5\left(-x_2 - x_4 \operatorname{cotg}\varphi + x_6 \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) = 0;$$

$$C' \ldots (x_1+x_2)\cos\psi - (x_5+x_6)\sin\psi = 0; \quad C'' \ldots (x_1-x_2)\cos\psi - (x_5-x_6)\sin\psi = 0;$$

$$\left\{\begin{array}{l}
G_1 \ldots Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 - \operatorname{tg}\varphi\, z_2^2 + 2 z_3^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, z_4^2 - 2\operatorname{cotg}\varphi\, z_1 z_2 + 2\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 + \\
\qquad + 2 z_4 z_2 = 0 \,..\, F^{(2)} \text{ (die Basisfläche der } S^3 \text{ entsprechenden Polarcorrelation),} \\
G_2 \,..\left\{\begin{array}{l}
Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv z_1^2 - \frac{9-\sqrt{5}}{6} z_2^2 - 2 z_3^2 - \frac{9+\sqrt{5}}{6} z_4^2 - 2\operatorname{cotg}\varphi\, z_1 z_2 + \\
\qquad + 2\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 - \frac{2}{3} z_4 z_2 = 0 \\
\equiv x_1\left(\frac{9+\sqrt{5}}{6} x_2 - x_4 \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{3} x_6\right) + x_3\,(x_2 \operatorname{tg}\varphi + x_4 + x_6 \operatorname{cotg}\varphi) + \\
\qquad + x_5\left(-\frac{1}{3} x_2 - x_4 \operatorname{cotg}\varphi + \frac{9-\sqrt{5}}{6} x_6\right) = 0
\end{array}\right\} \,..\, F^{(f)}
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
K_1 \ldots 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv \\
\qquad \equiv z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - 2\operatorname{cotg}\varphi\, z_1 z_2 + 2\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 = 0 \\
K_2 \ldots Z_1 Z_4 - 2 Z_2 Z_3 \equiv 2 Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \equiv \\
\qquad \equiv z_1^2 - \frac{1}{\cos^2\varphi} z_2^2 - 4 z_3^2 - \frac{1}{\sin^2\varphi} z_4^2 - 2\operatorname{cotg}\varphi\, z_1 z_2 + 2\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_4 - 2 z_4 z_2 = 0.
\end{array}\right.$$

15 A) 1440 zehnzählige uneigentliche Collineationen.

Die hierhergehörigen Substitutionen sind nach ihrer Zusammensetzung und Zuordnung zu den Tetraedern $T_4 \,..\, T_{75}$ wiederum aus der Tabelle (70 A) zu entnehmen.

Die Eckpunkte (Ebenen) eines den Substitutionen S, S^9; S^3, S^7 entsprechenden Haupttetraeders sind einmal ein reelles Punkt- (Ebenen-) Paar, nämlich je einer der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ (je eine der 60 Ebenen B) und je einer der 360 Punkte $\mathfrak{J}$ (je eine der 360 Ebenen I) (vergl. (5) in § 41), zweitens

1) Hier ist, wie früher, $c_1^2 = 2+\sqrt{3}$, $c_2^2 = 2-\sqrt{3}$.

ein imaginär-conjugirtes Punkt- (Ebenen-) Paar $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}'_0$ (χ'_0, χ_0) (vgl. (14a), (14b) in § 42). Das reelle Kantenpaar des Tetraeders ist ein Geradenpaar G, G' ((8c) in § 41); die beiden imaginären Kantenpaare, welche $F_1^{(1)}$ berühren, sind je ein Geradenpaar $| \mathfrak{B}\, \mathfrak{g}_0 | = | I\, \chi'_0 |$ (vgl. (26a) in § 43) und je ein Geradenpaar $| \mathfrak{J}\, \mathfrak{g}_0 | = | B\, \chi'_0 |$ (vgl. (26b) § 43). Bei den 360 Haupttetraedern tritt also jeder der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ sechsmal, jeder der 360 Punkte $\mathfrak{J}$ einmal und jeder der 144 Punkte $\mathfrak{g}_0$ fünfmal auf, von den 72 Geraden G jede zehnmal, jede der 720 Geraden $| \mathfrak{B}\, \mathfrak{g}_0 |$ und der 720 Geraden $| \mathfrak{J}\, \mathfrak{g}_0 |$ einmal.

Die vier bez. den Substitutionen S, S^9; S^3, S^7 entsprechenden Transformationen sind zwei Paare von zusammengehörigen zehnzähligen, auf eine Art uneigentlichen Collineationen mit demselben Haupttetraeder, während S^2, S^8; S^4, S^6 zusammengehörige fünfzählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar G, G' (vergl. 6 A) in § 47) bedeuten und S^5 die centrische Involution mit dem Centrum $\mathfrak{B}$ und der Homologie-Ebene B darstellt. Die Wurzeln der Gleichung in τ sind für

$$S,\ S^9\ (S^3,\ S^7):\ \tau = 1,\ -1,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^4,$$
$$\text{für } S^3,\ S^7\ (S,\ S^9):\ \tau = 1,\ -1,\ -\varepsilon^2,\ -\varepsilon^3,$$
$$\text{für } S^2,\ S^8\ (S^4,\ S^6):\ \tau = 1,\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,$$
$$\text{für } S^4,\ S^6\ (S^2,\ S^8):\ \tau = 1,\ 1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon$$
$$\text{und für } S^5:\ \tau = 1,\ -1,\ -1,\ -1,$$

während die Wurzeln der Gleichung in σ für

$$S,\ S^9\ (S^3,\ S^7):\ \sigma = i,\ -i,\ i\,\varepsilon,\ -i\,\varepsilon,\ i\,\varepsilon^4,\ -i\,\varepsilon^4,$$
$$\text{für } S^3\ S^7\ (S,\ S^9):\ \sigma = i,\ -i,\ i\,\varepsilon^2,\ -i\,\varepsilon^2,\ i\,\varepsilon^3,\ -i\,\varepsilon^3 \text{ u. s. w. sind.}$$

Die Gleichungen des in sich transformirten tetraedralen Complexes, des Complexbüschels, des Netzes von Flächen, welche auf die zweite Art in sich transformirt werden und zu denen ausser $F_1^{(1)}$ auch je eine Fläche $F^{(a)}$ (vgl. (55a) in § 45) gehört u. s. w., sind nach den früher (§ 8 I) gegebenen Formeln leicht aufzustellen.

Beispiele:

1)
$$S \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = x_{29} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = x_{13} \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [-4\ -3\ -2\ 1]_{17}, \quad S^9 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{22} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = -x_{30} & x'_4 = -x_{23} \\ x'_5 = -x_{14} & x'_6 = x_7 \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [-4\ -3\ -2\ 1]_{16};$$

$$S^3 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{12} & x'_2 = x_9 \\ x'_3 = -x_{20} & x'_4 = -x_{17} \\ x'_5 = -x_{28} & x'_6 = x_{25} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [3\ 2\ -4\ 1]_{18}, \quad S^7 \ldots \left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{10} & x'_2 = -x_{11} \\ x'_3 = x_{18} & x'_4 = x_{19} \\ x'_5 = -x_{26} & x'_6 = x_{27} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{matrix}\right\} \ldots [3\ -2\ -4\ -1^*]_{19}.$$

Haupttetraeder:

$$\left.\begin{array}{llllllll} Z_1\ (\mathfrak{B}_4) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & Z_1\ (B_4) \\ Z_2\ (\mathfrak{J}) & \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \ldots & Z_2\ (I) \\ Z_3\ (\mathfrak{g}_0) & \ldots & i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots & Z_4\ (\chi'_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{g}'_0) & \ldots & -i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots & Z_3\ (\chi_0) \end{array}\right|$$

$$K_{12},\ K_{34}\ \ldots\ -\cos\varphi \quad \mp i\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad \pm i\sin\varphi \quad 0 \quad 0\ \ldots\ (G,\ G')$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} \left\{\begin{array}{l} |\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{g}_0\,| = |\,I\chi'_0\,| \\ |\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}'_0\,| = |\,B_4\chi_0\,| \end{array}\right. & \begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array} & \begin{array}{l} \sin\varphi \\ \sin\varphi \end{array} & \begin{array}{l} i\sin\varphi \\ -i\sin\varphi \end{array} & \begin{array}{l} \cos\varphi \\ \cos\varphi \end{array} & \begin{array}{l} i\cos\varphi \\ -i\cos\varphi \end{array} & \begin{array}{l} i \\ -i \end{array} & \left.\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} |\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{g}'_0\,| = |\,I\chi_0\,| \\ |\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{g}_0\,| = |\,B_4\chi'_0\,| \end{array}\right. & \begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array} & \begin{array}{l} \sin\varphi \\ \sin\varphi \end{array} & \begin{array}{l} i\sin\varphi \\ -i\sin\varphi \end{array} & \begin{array}{l} \cos\varphi \\ \cos\varphi \end{array} & \begin{array}{l} i\cos\varphi \\ -i\cos\varphi \end{array} & \begin{array}{l} -i \\ i \end{array} & \left.\begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{(vgl. (26a) und (26b) in § 43).}$$

Tetraedraler Complex: $\Omega \equiv (x_1\, x_6 + x_2\, x_5) \sin\varphi + (x_3\, x_6 + x_4\, x_5) \cos\varphi = 0.$

Complexbüschel: $(x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi) + \mu' (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi) = 0.$

Das Netz in sich transformirter Flächen

$$k\, Z_1^2 + l\, Z_2^2 + 2\, m\, Z_3\, Z_4 = 0$$

enthält $F_1^{(1)}$ entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = \frac{1}{2}$; ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1,\ m = -\frac{1}{2}$ die Fläche

$$\left.\begin{array}{l} F^{(a)}\ \ldots\ \sqrt{5}\,(z_1^2 - z_4^2) + (z_2^2 - z_3^2 - 4\, z_2\, z_3) \\ \equiv (x_1 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi)^2 + (x_2 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)^2 + x_6^2 \\ \equiv (x_1 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi)^2 + (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi)^2 + x_5^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55a) in § 45) u. s. w.

Die vier Substitutionen S^2, S^4, S^6, S^8:

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{11} & x'_2 = -x_{10} \\ x'_3 = -x_{19} & x'_4 = x_{18} \\ x'_5 = x_{27} & x'_6 = x_{26} \\ \multicolumn{2}{c}{-G_2^{(1)} \ldots G_2^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19}, \qquad S^8 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_9 & x'_2 = -x_{12} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = -x_{25} & x'_5 = -x_{28} \\ \multicolumn{2}{c}{G_2^{(1)} \ldots G_2^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [-3\ -2\ 4\ 1]_{18}$$

$$S^4 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = x_{30} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_{14} \\ \multicolumn{2}{c}{G_1^{(1)} \ldots G_1^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [4\ 3\ 2\ 1]_{16}, \qquad S^6 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{21} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = -x_8 \\ \multicolumn{2}{c}{-G_1^{(1)} \ldots -G_1^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [4\ 3\ 2\ 1]_{17}$$

bedeuten vier zusammengehörige fünfzählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar $G,\ G'$ (vgl. 6 A) in § 47); und die Substitution S^5:

$$S^5 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_2 & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = x_4 & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = -x_6 & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{-B_1^{(2)} \ldots B_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1\ -2\ -3\ 4]_1$$

bedeutet die centrische Involution mit Centrum $\mathfrak{B}_4$ und Homologie-Ebene B_4 (vgl. 12 A) dieses §).

2)
$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_8 & x'_2 = -x_3 \\ x'_3 = x_{16} & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = x_{24} & x'_6 = x_1 \\ \multicolumn{2}{c}{-G_2^{(2)} \ldots C_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1^* \; 4 \; 2 \; 3]_{74}, \quad S^9 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_6 & x'_2 = -x_{11} \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = -x_{19} \\ x'_5 = x_4 & x'_6 = x_{27} \\ \multicolumn{2}{c}{-C_1^{(2)} \ldots G_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-1^* \; 3 \; 4 \; 2]_{56};$$

$$S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{26} & x'_2 = -x_{13} \\ x'_3 = -x_{10} & x'_4 = -x_{21} \\ x'_5 = x_{18} & x'_6 = -x_{29} \\ \multicolumn{2}{c}{G_1^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-3 \; 4 \; -1 \; -2]_{42}, \quad S^7 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{14} & x'_2 = x_{23} \\ x'_3 = x_{22} & x'_4 = -x_7 \\ x'_5 = x_{30} & x'_6 = x_{15} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots -G_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [-3 \; -2 \; -4 \; 1]_{32}.$$

Haupttetraeder:

$$\left.\begin{array}{llccccl} Z_1 \; (\mathfrak{B}_{51}) & \ldots & \frac{1}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & 0 & \ldots \; Z_1 \; (B_{51}) \\ Z_2 \; (\mathfrak{J}) & \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi}{2} & -\frac{\cos\varphi}{2} & \frac{\sin\varphi}{2} & -\sin\varphi & \ldots \; Z_2 \; (I) \\ Z_3 \; (\mathfrak{g}_0) & \ldots & -\varepsilon^3 \sin\varphi & -\varepsilon^4 \cos\varphi & \varepsilon \sin\varphi & \cos\varphi & \ldots \; Z_4 \; (\chi'_0) \\ Z_4 \; (\mathfrak{g}'_0) & \ldots & -\varepsilon^2 \sin\varphi & -\varepsilon \cos\varphi & \varepsilon^4 \sin\varphi & \cos\varphi & \ldots \; Z_3 \; (\chi_0) \end{array}\right\}$$

$$K_{12}, K_{34} \ldots 0 \quad \cos\varphi \quad \mp i \cos\varphi \quad -\sin\varphi \quad \pm i \sin\varphi \quad 0 \ldots (G, G')$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcccccc} |\mathfrak{B}_{51} \, \mathfrak{g}_0| = |I \chi'_0| \ldots & i & i\,\varepsilon^2 \sin\varphi & \sin\varphi & i\,\varepsilon^2 \cos\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^2 \\ |\mathfrak{J} \, \mathfrak{g}'_0| = |B_{51} \chi_0| \ldots & -i & -i\,\varepsilon^3 \sin\varphi & \sin\varphi & -i\,\varepsilon^3 \cos\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^3 \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{lcccccc} |\mathfrak{B}_{51} \, \mathfrak{g}'_0| = |I \chi_0| \ldots & -i & i\,\varepsilon^3 \sin\varphi & \sin\varphi & i\,\varepsilon^3 \cos\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^3 \\ |\mathfrak{J} \, \mathfrak{g}_0| = |B_{51} \chi'_0| \ldots & i & -i\,\varepsilon^2 \sin\varphi & \sin\varphi & -i\,\varepsilon^2 \cos\varphi & \cos\varphi & \varepsilon^2 \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$ (vgl. (26a) und (26b) in § 43).

Tetraedraler Complex:

$$\Omega \equiv x_1 \left(x_2 + x_4 \operatorname{cotg}\varphi - \frac{x_6}{\cos^2\varphi}\right) + x_3 (x_2 \operatorname{tg}^2\varphi + x_4 \operatorname{tg}\varphi + x_6) + x_5 (x_2 \operatorname{tg}\varphi + x_4 + x_6 \operatorname{cotg}\varphi) = 0.$$

Complexbüschel: $(x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi) + \mu' (x_3 \cos\varphi - x_5 \sin\varphi) = 0.$

Das Netz in sich transformirter Flächen:

$$k \, Z_1^2 + l \, Z_2^2 + 2 \, m \, Z_3 \, Z_4 = 0$$

enthält $F_1^{(1)}$ entsprechend den Werthen $k = l = 1$, $m = \frac{1}{2}$; ferner entsprechend den Werthen $k = l = 1$, $m = -\frac{1}{2}$ die Fläche

$$F^{(a)} \ldots \frac{1}{\sqrt{5}} (z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2) - 2 (z_1 \, z_2 + z_3 \, z_4) \sin^2\varphi - (z_1 \, z_3 - z_4 \, z_2) \sin 2\varphi - $$
$$- 2 (z_1 \, z_4 + z_2 \, z_3) \cos^2\varphi = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \equiv (x_2 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)^2 + (x_3 \cos\varphi - x_5 \sin\varphi)^2 + x_6^2 \equiv \\ \equiv (x_2 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi)^2 + (x_3 \sin\varphi + x_5 \cos\varphi)^2 + x_1^2 \end{array}\right\} = 0$$

(vgl. (55a) in § 45) u. s. w.

Die vier Substitutionen S^2, S^4, S^6, S^8:

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{29} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = x_{13} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = x_{21} & x'_6 = -x_8 \\ \multicolumn{2}{c}{-G_1^{(1)} \ldots -G_1^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [-4 \; 3 \; 2 \; -1]_{35}, \quad S^8 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{27} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = x_{11} & x'_4 = -x_{30} \\ x'_5 = x_{19} & x'_6 = x_{14} \\ \multicolumn{2}{c}{G_1^{(1)} \ldots G_1^{(2)}} \end{array}\right\} \ldots [4 \; -1 \; -3 \; 2]_{24};$$

$$S^4 \,.\,. \left\{ \begin{matrix} x'_1 = -x_{17} & x'_2 = x_{10} \\ x'_3 = -x_{25} & x'_4 = -x_{18} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = -x_{26} \\ \multicolumn{2}{c}{G_2^{(1)} \ldots G_2^{(2)}} \end{matrix} \right\} \ldots [1\ 2\ 3\ 4]_{22}, \quad S^6 \,.\,. \left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_{15} & x'_2 = x_{12} \\ x'_3 = -x_{23} & x'_4 = -x_{20} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = x_{28} \\ \multicolumn{2}{c}{-G_2^{(1)} \ldots -G_2^{(2)}} \end{matrix} \right\} \ldots [2\ 3\ 1\ 4]_{29}$$

bedeuten vier zusammengehörige fünfzählige axiale Collineationen mit dem Axenpaar G, G' (vgl. 6 A) in § 47) und die Substitution S^5:

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_{28} & x'_2 = x_{25} \\ x'_3 = -x_{12} & x'_4 = -x_9 \\ x'_5 = x_{20} & x'_6 = -x_{17} \\ \multicolumn{2}{c}{-C_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)}} \end{matrix} \right\} \ldots [-2\ -4\ -3^*\ 1]_{19}$$

bedeutet die centrische Involution mit Centrum $\mathfrak{B}_{51}$ und Homologie-Ebene B_{51} (vgl. 12 A) dieses §).

15 B) 1440 zehnzählige uneigentliche Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen werden aus denjenigen für die 1440 zehnzähligen uneigentlichen Collineationen 15 A) erhalten, wenn den beiden zusammensetzenden Substitutionen gleiche Vorzeichen ertheilt werden.

Für die den zusammengehörigen Substitutionen S, S^9; S^3, S^7 entsprechenden zehnzähligen uneigentlichen Correlationen hat das Haupttetraeder folgende Beschaffenheit: Ein Ecken- (Flächen-) Paar Z_1, Z_4 (Z_1, Z_4) ist reell und durch zwei Punkte $\mathfrak{L}$ (zwei Ebenen A) (vgl. § 43 unter 3 a), Formeln (40c)), welche bei der Uebertragung auf den dreidimensionalen sphärischen Raum durch eine Umdrehung um $\frac{\pi}{4}$ auf dem Hauptkreise G aus den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ resultiren, gebildet, während das andere Ecken- (Flächen-) Paar Z_2, Z_3 (Z_3, Z_2) aus denselben beiden Punkten $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}'_0$ (Ebenen χ'_0, χ_0) besteht, wie für die entsprechenden zehnzähligen uneigentlichen Collineationen 15 A). Das reelle Kantenpaar K_{14}, K_{23} ist wiederum ein Geradenpaar G, G'; die beiden imaginären Kantenpaare sind zwei Geradenpaare $|\, \mathfrak{L}_i\, \mathfrak{g}_0 \,| = |\, A_k\, \chi'_0 \,|$ (vergl. (40d), (40e) in § 43). Das Geradenpaar G, G' bildet die Leitgeraden für die beiden festbleibenden linearen Complexe C', C'' und das Axenpaar für die vier, den Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 entsprechenden fünfzähligen axialen Collineationen (vgl. 6 A) in § 47). Die Potenz S^5 bedeutet eine Polar-Correlation mit einer Basisfläche $F^{(2)}$ (vgl. 12 B) dieses §).

Aus den Wurzelwerthen

$$\sigma = 1,\ -1,\ \varepsilon,\ -\varepsilon,\ \varepsilon^4,\ -\varepsilon^4 \text{ für } S \text{ und } S^9 \text{ (bez. } S^3 \text{ und } S^7\text{)},$$
$$\sigma = 1,\ -1,\ \varepsilon^2,\ -\varepsilon^2,\ \varepsilon^3\ -\varepsilon^3 \text{ für } S^3 \text{ und } S^7 \text{ (bez. } S \text{ und } S^9\text{)}$$

folgt bez. (vgl. § 8 III)

$$\alpha_{14} = \alpha_{41} = 1,\ \alpha_{23} = \varepsilon,\ \alpha_{32} = \varepsilon^4, \text{ und hieraus } \left\{\begin{array}{ll} \nu_1 = \varepsilon + \varepsilon^4 = \operatorname{tg}\varphi, & \nu'_1 = \nu'_3 = \varepsilon - \varepsilon^4 = \dfrac{i}{\sin\varphi} \\ \nu_3 = -(\varepsilon^4 + \varepsilon) = -\operatorname{tg}\varphi, & \\ \nu_5 = 2, & \nu'_5 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{und } \alpha_{14} = \alpha_{41} = 1,\ \alpha_{23} = \varepsilon^2,\ \alpha_{32} = \varepsilon^3 \text{ und hieraus } \left\{\begin{array}{ll} \nu_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = \operatorname{cotg}\varphi, & \nu'_1 = \nu'_3 = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \dfrac{i}{\cos\varphi} \\ \nu_3 = -(\varepsilon^3 + \varepsilon^2) = \operatorname{cotg}\varphi, & \\ \nu_5 = 2, & \nu'_5 = 0. \end{array}\right\}$$

Daraus ergeben sich in einfacher Weise die Gleichungen der beiden Complexe Ω''_1, Ω''_2, der festbleibenden Gewinde $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$, der Flächen $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, welche bez. durch die Fläche $F^{(2)}$ (die Basisfläche der S^5 entsprechenden Polarcorrelation) und eine Fläche $F^{(g)}$ (vgl. (55g) in § 45) repräsentirt sind, der beiden Systeme von Kernflächen $K^{(1)}_1$, $K^{(1)}_2$; $K^{(2)}_1$, $K^{(2)}_2$ u. s. w.; die Complexe Ω_{w_1}, Ω_{w_2} der Wechselstrahlen zerfallen wegen $\nu'_1 = \nu'_3$ in die beiden speciellen linearen Complexe, deren Leitgerade je eine Gerade G, G' ist.

Beispiele

1) (Vgl. 1) unter 15 A)).

$$S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = -x_{24} & x'_4 = x_{29} \\ x'_5 = x_8 & x'_6 = x_{13} \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-4\ -3\ -2\ 1}]_{17}, \qquad S^9 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{22} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = x_{30} & x'_4 = -x_{23} \\ x'_5 = x_{14} & x'_6 = x_7 \\ \multicolumn{2}{c}{B_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-4\ -3\ -2\ 1}]_{16};$$

$$S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{12} & x'_2 = x_9 \\ x'_3 = x_{20} & x'_4 = -x_{17} \\ x'_5 = x_{28} & x'_6 = x_{25} \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{3\ 2\ -4\ 1}]_{18}, \qquad S^7 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{10} & x'_2 = -x_{11} \\ x'_3 = -x_{18} & x'_4 = x_{19} \\ x'_5 = x_{26} & x'_6 = x_{27} \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(2)} \ldots -B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{3\ -2\ -4\ -1^*}]_{19};$$

S^2, S^4, S^6, S^8 wie im Beispiel 1) zu 15 A);

$$S^5 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = x_5 \\ \multicolumn{2}{c}{B_1^{(2)} \ldots B_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-1\ -2\ -3\ 4}]_1$$

bedeutet die Polar-Correlation mit der Basisfläche:

$$F^{(2)} \ldots z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \equiv (x_1 \pm x_2)^2 + (x_3 \pm x_4)^2 + (x_5 \mp x_6)^2 = 0.$$

Haupttetraeder zu S, S^9; S^3, S^7:

$$\left.\begin{array}{llllll} Z_1\ (\mathfrak{L}_i) \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 1 & \ldots Z_1\ (A_i) \\ Z_2\ (\mathfrak{g}_0) \ldots & i & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots Z_3\ (\chi'_0) \\ Z_3\ (\mathfrak{g}'_0) \ldots & -i & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \ldots Z_2\ (\chi_0) \\ Z_4\ (\mathfrak{L}_k) \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -1 & \ldots Z_4\ (A_k) \end{array}\right\}$$

$$K_{14},\ K_{23}\ \ldots\ -\cos\varphi \quad \mp i\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad \pm i\sin\varphi \quad 0 \quad 0\ \ldots\ (G,\ G')$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{L}_i\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_k\,\chi'_0|\ \ldots\ \sin\varphi \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi \quad \cos\varphi \quad i \quad -i \\ |\mathfrak{L}_k\,\mathfrak{g}'_0| = |\Lambda_i\,\chi_0|\ \ldots\ \sin\varphi \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi \quad \cos\varphi \quad -i \quad i \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{L}_i\,\mathfrak{g}'_0| = |\Lambda_k\,\chi_0|\ \ldots\ \sin\varphi \quad -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad -\cos\varphi \quad -i \quad -i \\ |\mathfrak{L}_k\,\mathfrak{g}_0| = |\Lambda_i\,\chi'_0|\ \ldots\ \sin\varphi \quad -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad -\cos\varphi \quad i \quad i \end{array}\right\} \end{array}\right|\ \text{(vgl. (40d) und (40e) in § 43).}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega''_1\ \ldots\ x_1\,x_2\,\mathrm{cotg}\,\varphi - (x_1\,x_4 + x_2\,x_3 + x_5\,x_6)\,\mathrm{tg}\,\varphi + x_3\,x_4 = 0 \\ \Omega''_2\ \ldots\ -x_1\,x_2 + (x_1\,x_4 + x_2\,x_3 - x_5\,x_6)\,\mathrm{cotg}\,\varphi + x_3\,x_4\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{C}\ \ldots\ (x_1+x_2)\cos\varphi - (x_3+x_4)\sin\varphi = 0, \qquad \boldsymbol{C}''\ \ldots\ (x_1-x_2)\cos\varphi - (x_3-x_4)\sin\varphi = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{G}_1\ \ldots\ Z_1\,Z_4 + Z_2\,Z_3 \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \equiv (x_1 \pm x_2)^2 + (x_3 \pm x_4)^2 + (x_5 \mp x_6)^2 = 0\ \ldots\ F^{(2)} \\ \qquad \text{(Basisfläche der } S^5 \text{ entsprechenden Polarcorrelation);} \\ \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{G}_2\ \ldots\ Z_1\,Z_4 - Z_2\,Z_3 \equiv -(z_1^2 + z_4^2) - (z_2^2 - z_3^2)\cos 2\varphi + 2\,z_2\,z_3\sin 2\varphi \\ \qquad \equiv (x_1\,x_2 - x_3\,x_4)\cos 2\varphi - (x_1\,x_4 + x_2\,x_3)\sin 2\varphi + x_5\,x_6 \end{array}\right\} = 0\ \ldots\ F^{(9)} \end{array}\right.$$

(vgl. (55g) in § 45).

$$\left|\begin{array}{l} K_1^{(1)}\ \ldots\ 2\,Z_1\,Z_4 + \mathrm{tg}\,\varphi\,Z_2\,Z_3 \equiv \mathrm{tg}\,\varphi\,Z_1\,Z_4 + 2\,Z_2\,Z_3 \equiv \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \equiv \mathrm{tg}\,\varphi\,z_1^2 + z_2^2 + \mathrm{cotg}\,\varphi\,z_3^2 - 2\,z_4^2 + 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,z_2\,z_3 \\ \equiv 2\,\zeta_1^2 + \mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_2^2 + \zeta_3^2 - \mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_4^2 - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_2\,\zeta_3 \end{array}\right\} = 0 \\ K_2^{(1)}\ \ldots\ \mathrm{tg}\,\varphi\,Z_1\,Z_4 + 2\,Z_2\,Z_3 \equiv 2\,Z_1\,Z_4 + \mathrm{tg}\,\varphi\,Z_2\,Z_3 \equiv \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \equiv 2\,z_1^2 + \mathrm{cotg}\,\varphi\,z_2^2 + z_3^2 - \mathrm{tg}\,\varphi\,z_4^2 - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,z_2\,z_3 \\ \equiv \mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_3^2 - 2\,\zeta_4^2 + 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_2\,\zeta_3 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} K_1^{(2)}\ \ldots\ 2\,Z_1\,Z_4 - \mathrm{cotg}\,\varphi\,Z_2\,Z_3 \equiv \mathrm{cotg}\,\varphi\,Z_1\,Z_4 - 2\,Z_2\,Z_3 \equiv \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \equiv \mathrm{cotg}\,\varphi\,z_1^2 + \mathrm{tg}\,\varphi\,z_2^2 - z_3^2 + 2\,z_4^2 - 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,z_2\,z_3 \\ \equiv -2\,\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_3^2 - \mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_4^2 + 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_2\,\zeta_3 \end{array}\right\} = 0 \\ K_2^{(2)}\ \ldots\ \mathrm{cotg}\,\varphi\,Z_1\,Z_4 - 2\,Z_2\,Z_3 \equiv 2\,Z_1\,Z_4 - \mathrm{cotg}\,\varphi\,Z_2\,Z_3 \equiv \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \equiv -2\,z_1^2 - z_2^2 + \mathrm{tg}\,\varphi\,z_3^2 - \mathrm{cotg}\,\varphi\,z_4^2 + 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,z_2\,z_3 \\ \equiv \mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_1^2 + \mathrm{tg}\,\varphi\,\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\,\zeta_4^2 - 2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\zeta_2\,\zeta_3 \end{array}\right\} = 0. \end{array}\right|$$

2) (vgl. 2) unter 15 A)).

$$S\ \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_8 & x'_2 = -x_3 \\ x'_3 = -x_{16} & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = -x_{24} & x'_6 = x_1 \\ \multicolumn{2}{c}{G_2^{(2)}\ \ldots\ C_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-1^*\ 4\ 2\ 3}]_{74}, \qquad S^9\ \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_6 & x'_2 = -x_{11} \\ x'_3 = -x_2 & x'_4 = -x_{19} \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = x_{27} \\ \multicolumn{2}{c}{C_1^{(2)}\ \ldots\ G_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-1^*\ 3\ 4\ 2}]_{56};$$

$$S^3\ \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{26} & x'_2 = -x_{13} \\ x'_3 = x_{10} & x'_4 = -x_{21} \\ x'_5 = -x_{18} & x'_6 = -x_{29} \\ \multicolumn{2}{c}{-G_1^{(2)}\ \ldots\ -B_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-3\ 4\ -1\ -2}]_{42}, \qquad S^7\ \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{14} & x'_2 = x_{23} \\ x'_3 = -x_{22} & x'_4 = -x_7 \\ x'_5 = -x_{30} & x_6 = x_{15} \\ \multicolumn{2}{c}{-B_2^{(2)}\ \ldots\ -G_1^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-3\ -2\ -4\ 1}]_{32};$$

S^2, S^4, S^6, S^8 wie im Beispiel 2) zu 15 A);

$$S^5\ \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{28} & x'_2 = x_{25} \\ x'_3 = x_{12} & x'_4 = -x_9 \\ x'_5 = -x_{20} & x'_6 = -x_{17} \\ \multicolumn{2}{c}{C_2^{(2)}\ \ldots\ C_2^{(1)}} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-2\ -4\ -3\ 1^*}]_{19}$$

bedeutet die Polar-Correlation mit der Basisfläche:

$$F^{(2)} \ldots z_1^2+\operatorname{cotg}\varphi\, z_2^2-\operatorname{tg}\varphi\, z_3^2+2\, z_4^2-2\operatorname{tg}\varphi\, z_1 z_2+2\operatorname{cotg}\varphi\, z_1 z_3+2\, z_2 z_3=0$$
$$\equiv(x_1+x_{28})^2+(x_3-x_{12})^2+(x_5+x_{20})^2\equiv(x_2-x_{25})^2+(x_4+x_9)^2+(x_6+x_{17})^2=0$$

(vgl. § 45 unter II 2), Formeln (54h) . . . (54l)).

Haupttetraeder zu S, S^9; S^3, S^7:

$$\begin{array}{llllll} Z_1\,(\mathfrak{L}_i)\ldots & \dfrac{1+\operatorname{cotg}\varphi\cos\varphi}{2} & \dfrac{\operatorname{tg}\varphi-\cos\varphi}{2} & -\dfrac{\operatorname{cotg}\varphi-\sin\varphi}{2} & -\sin\varphi & \ldots Z_1\,(\varLambda_i)\\ Z_2\,(\mathfrak{g}_0)\ldots & -\varepsilon^3\sin\varphi & -\varepsilon^4\cos\varphi & \varepsilon\sin\varphi & \cos\varphi & \ldots Z_3\,(\chi'_0)\\ Z_3\,(\mathfrak{g}'_0)\ldots & -\varepsilon^2\sin\varphi & -\varepsilon\cos\varphi & \varepsilon^4\sin\varphi & \cos\varphi & \ldots Z_2\,(\chi_0)\\ Z_4\,(\mathfrak{L}_k)\ldots & \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi\cos\varphi-1}{2} & -\dfrac{\operatorname{tg}\varphi+\cos\varphi}{2} & \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi+\sin\varphi}{2} & -\sin\varphi & \ldots Z_4\,(\varLambda_k) \end{array}$$

$$K_{14},\ K_{23}\ \ldots\ 0\quad \cos\varphi\quad \mp i\cos\varphi\quad -\sin\varphi\quad \pm i\sin\varphi\quad 0\ \ldots\ (G,\ G')$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lllllll} |\,\mathfrak{L}_i\,\mathfrak{g}_0\,|=|\,\varLambda_k\,\chi'_0\,|\ldots & i & -\varepsilon^2\sin\varphi & \sin\varphi & -\varepsilon^2\cos\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon^2\\ |\,\mathfrak{L}_k\,\mathfrak{g}'_0\,|=|\,\varLambda_i\,\chi_0\,|\ldots & -i & -\varepsilon^3\sin\varphi & \sin\varphi & -\varepsilon^3\cos\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon^3 \end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{lllllll} |\,\mathfrak{L}_i\,\mathfrak{g}'_0\,|=|\,\varLambda_k\,\chi_0\,|\ldots & -i & \varepsilon^3\sin\varphi & \sin\varphi & \varepsilon^3\cos\varphi & \cos\varphi & i\,\varepsilon^3\\ |\,\mathfrak{L}_k\,\mathfrak{g}_0\,|=|\,\varLambda_i\,\chi'_0\,|\ldots & i & \varepsilon^2\sin\varphi & \sin\varphi & \varepsilon^2\cos\varphi & \cos\varphi & -i\,\varepsilon^2 \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

(vgl. (40d) und (40e) in § 43).

$$\left.\begin{array}{l} \Omega''_1\ldots x_1\,(x_2+x_4\operatorname{cotg}\varphi+x_6\operatorname{cotg}\varphi)+x_8\,(-x_2\operatorname{cotg}^2\varphi+x_4\operatorname{tg}\varphi+x_6)+\\ \qquad\qquad +x_5\,(x_2\operatorname{tg}\varphi-2\,x_4+x_6\operatorname{cotg}\varphi)=0\\ \Omega''_2\ldots x_1\,(x_2\operatorname{tg}^2\varphi+x_4\operatorname{tg}+x_6)+x_3\,(x_2\operatorname{cotg}^2\varphi-x_4\sqrt{5}+x_6\operatorname{tg}^2\varphi)+\\ \qquad\qquad +x_5\,(-x_2\sqrt{5}+x_4\operatorname{tg}^2\varphi+x_6\operatorname{tg}\varphi)=0 \end{array}\right\}$$

$$C'\ldots(x_2-x_3)\cos\varphi-(x_4-x_5)\sin\varphi=0;\quad C''\ldots(x_2+x_3)\cos\varphi-(x_4+x_5)\sin\varphi=0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} G_1\ldots Z_1\,Z_2+Z_3\,Z_4\equiv\\ \quad\equiv\frac{1}{2}\,z_1^2+\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,z_2^2-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,z_3^2+z_4^2-\operatorname{tg}\varphi\,z_1\,z_2+\operatorname{cotg}\varphi\,z_1\,z_3+z_2\,z_3=0\ \ldots F^{(2)}\\ \quad\equiv(x_1+x_{28})^2+(x_3-x_{12})^2+(x_5+x_{20})^2\equiv(x_2-x_{25})^2+(x_4+x_9)^2+(x_6+x_{17})^2=0\\ \qquad\text{(Basisfläche der } S^5 \text{ entsprechenden Polarcorrelation);}\\ G_2\ldots Z_1\,Z_2-Z_3\,Z_4\equiv\operatorname{tg}^3\varphi\,.\,z_1^2+\frac{3\sqrt{5}-1}{2}\,z_2^2+\frac{3\sqrt{5}+1}{2}\,z_3^2+2\,z_4^2+2\operatorname{cotg}^2\varphi\,.\,z_1\,z_2-\\ \qquad -2\operatorname{cotg}\varphi\,z_1\,z_3+4\operatorname{cotg}\varphi\,z_1\,z_4+4\operatorname{tg}\varphi\,z_3\,z_4-4\,z_4\,z_2+2\,z_2\,z_3=0\\ \quad\equiv\frac{1}{\cos^2\varphi}\,(x_1\,x_2+x_3\,x_6)+\sqrt{5}\,(x_1\,x_4+x_5\,x_6)+\operatorname{tg}^2\varphi\,(x_3\,x_4+x_2\,x_5)+\\ \qquad +\frac{1}{\sin^2\varphi}\,x_1\,x_6-\operatorname{cotg}^3\varphi\;x_2\,x_3-\frac{3\sqrt{5}+1}{2}\,x_4\,x_5=0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(1)}\ldots 2\,Z_1\,Z_4+\operatorname{tg}\varphi\,Z_2\,Z_3\equiv\operatorname{tg}\varphi\,(z_1^2+z_2)^2-(z_3^2-z_4^2)-\operatorname{cotg}\varphi\,z_1\,z_2+\\ \qquad +\operatorname{cotg}^2\varphi\,z_1\,z_3-z_1\,z_4-\operatorname{tg}^2\varphi\,z_3\,z_4+\operatorname{tg}\varphi\,z_4\,z_2+z_2\,z_3=0\\ \quad\equiv\frac{1}{\cos^2\varphi}\,\zeta_1^2+3\,\zeta_2^2+\operatorname{tg}^2\varphi\,\zeta_3^2+2\operatorname{cotg}\varphi\,\zeta_4^2+2\operatorname{cotg}\varphi\,\zeta_1\,\zeta_3+2\,\zeta_1\,\zeta_4+\\ \qquad +2\operatorname{tg}^2\varphi\,\zeta_3\,\zeta_4-2\operatorname{tg}\varphi\,\zeta_4\,\zeta_2+2\operatorname{cotg}\varphi\,\zeta_2\,\zeta_3=0;\\ K_2^{(1)}\ldots\operatorname{tg}\varphi\;Z_1\,Z_4+2\,Z_2\,Z_3\equiv\frac{1}{\cos^2\varphi}\,z_1^2+3\,z_2^2+\operatorname{tg}^2\varphi\,z_3^2+2\operatorname{cotg}\varphi\,z_4^2+\\ \qquad +2\operatorname{cotg}\varphi\,z_1\,z_3+2\,z_1\,z_4+2\operatorname{tg}^2\varphi\,z_3\,z_4-2\operatorname{tg}\varphi\,z_4\,z_2+2\operatorname{cotg}\varphi\,z_2\,z_3=0\\ \quad\equiv\operatorname{tg}\varphi\,(\zeta_1^2+\zeta_2^2)-(\zeta_3^2-\zeta_4^2)-\operatorname{cotg}\varphi\,\zeta_1\,\zeta_2+\operatorname{cotg}^2\varphi\,\zeta_1\,\zeta_3-\zeta_1\,\zeta_4-\operatorname{tg}^2\varphi\,\zeta_3\,\zeta_4+\\ \qquad +\operatorname{tg}\varphi\,\zeta_4\,\zeta_2+\zeta_2\,\zeta_3=0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1^{(2)} \;\ldots\; 2\, Z_1\, Z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\, Z_2\, Z_3 \equiv z_2^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, z_3^2 + \operatorname{tg}\varphi\, z_4^2 + \sqrt{5}\, z_1\, z_2 - \operatorname{cotg}\varphi\, z_1\, z_3 + \\ \qquad + \operatorname{cotg}^2\varphi\, z_1\, z_4 + z_3\, z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\, z_4\, z_2 + \operatorname{tg}\varphi\, z_2\, z_3 = 0 \\ \qquad \equiv \operatorname{tg}^2\varphi\, \zeta_1^2 + \operatorname{cotg}^2\varphi\, \zeta_2^2 + 3\, \zeta_3^2 + 2\, \zeta_4^2 + 4\, \zeta_1\, \zeta_2 - 2\, \zeta_1\, \zeta_3 + 2 \operatorname{cotg}^2\varphi\, \zeta_1\, \zeta_4 + \\ \qquad + 2\, \zeta_3\, \zeta_4 - 2 \operatorname{cotg}\varphi\, \zeta_4\, \zeta_2 + 2\, \zeta_2\, \zeta_3 = 0; \\ K_2^{(2)} \;\ldots\; \operatorname{cotg}\varphi\, Z_1\, Z_4 - 2\, Z_2\, Z_3 \equiv \operatorname{tg}^2\varphi\, z_1^2 + \operatorname{cotg}^2\varphi\, z_2^2 + 3\, z_3^2 + 2\, z_4^2 + 4\, z_1\, z_2 - \\ \qquad - 2\, z_1\, z_3 + 2 \operatorname{cotg}^2\varphi\, z_1\, z_4 + 2\, z_3\, z_4 - 2 \operatorname{cotg}\varphi\, z_4\, z_2 + 2\, z_2\, z_3 = 0 \\ \qquad \equiv \zeta_2^2 + \operatorname{cotg}\varphi\, \zeta_3^2 + \operatorname{tg}\varphi\, \zeta_4^2 + \sqrt{5}\, \zeta_1\, \zeta_2 - \operatorname{cotg}\varphi\, \zeta_1\, \zeta_3 + \operatorname{cotg}^2\varphi\, \zeta_1\, \zeta_4 + \zeta_3\, \zeta_4 - \\ \qquad - \operatorname{cotg}\varphi\, \zeta_4\, \zeta_2 + \operatorname{tg}\varphi\, \zeta_2\, \zeta_3 = 0. \end{array}\right.$$

§ 51.

Eine besondere Untergruppe der Hauptgruppe G_{14400}.

Von den zahlreichen Untergruppen, welche in der Hauptgruppe G_{14400} von 7200 Collineationen und ebensovielen Correlationen, bezw. in der invarianten Gruppe $G^{(c)}_{7200}$ enthalten sind und von denen die Untergruppe $G^{(1)}_{576}$ bez. $G^{(c)_1}_{288}$ bereits oben (§ 23 und § 46) erwähnt wurde, soll hier nur noch eine besondere Untergruppe G_{240} bez. $G^{(c)}_{120}$ betrachtet werden, welche auch in geometrischer Beziehung grosses Interesse bietet und mit Rücksicht auf eine weiter folgende Anwendung als Pentatop-Gruppe bezeichnet werden möge.

1) Die 120 Collineationen (und ebenso die 120 Correlationen) dieser Untergruppe gehören zu je 8 einem von 15 der 51 Polartetraeder $T_1 \ldots T_{51}$ an, welche in § 41 unter $T^{(1)}_I$, $T^{(2)}_I$, $T^{(3)}_I$ aufgeführt wurden, und zwar von 5 Systemen D je dreier Tetraeder in desmischer Lage aus der ersten Gruppe D_I.

Solcher Zusammenstellungen von 5 Systemen D giebt es 12, welche sämmtlich D_1 gemein haben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lllllclllll} D_1 & D_2 & D_5 & D_8 & D_9 & \text{und} & D_1 & D_{10} & D_{12} & D_{14} & D_{16} \\ D_1 & D_3 & D_4 & D_6 & D_7 & " & D_1 & D_{11} & D_{13} & D_{15} & D_{17} \\ D_1 & D_4 & D_5 & D_{10} & D_{13} & " & D_1 & D_7 & D_9 & D_{14} & D_{17} \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_{11} & D_{12} & " & D_1 & D_6 & D_8 & D_{15} & D_{16} \\ D_1 & D_3 & D_5 & D_{16} & D_{17} & " & D_1 & D_7 & D_8 & D_{10} & D_{11} \\ D_1 & D_2 & D_4 & D_{14} & D_{15} & " & D_1 & D_6 & D_9 & D_{12} & D_{13} \end{array}\right\} \quad (72)$$

Wir wählen für die folgenden Betrachtungen die Zusammenstellung

$$D_1\ D_7\ D_9\ D_{14}\ D_{17} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72\alpha)$$

oder (vgl. § 41 unter (D_I)):

$$\left.\begin{array}{llll} D_1 & \ldots\ T_1 & T_2 & T_3 \\ D_7 & \ldots\ T_9 & T_{35} & T_{47} \\ D_9 & \ldots\ T_{11} & T_{26} & T_{38} \\ D_{14} & \ldots\ T_{16} & T_{24} & T_{44} \\ D_{17} & \ldots\ T_{19} & T_{33} & T_{37} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72\beta)$$

Von den $5 \,.\, 12 = 60$ Eckpunkten (Seitenflächen) dieser 15 Tetraeder treten 10 Punkte $\mathfrak{B}$ (10 Ebenen B) dreimal und zwar zu je zweien als Eckpunkte (Seitenflächen) von drei Tetraedern auf, wie aus der folgenden Zusammenstellung erhellt, in welcher diese 10 Punkte

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}}_2,\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_4,\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_6,\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_8,\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_9,\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{11},\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{34},\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{36},\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{53},\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{56}$$

(Ebenen $B_2,\ B_4,\ B_6,\ B_8,\ B_9,\ B_{11},\ B_{34},\ B_{36},\ B_{53},\ B_{56}$)

durch fetten Druck hervorgehoben sind; die übrigen 30 Punkte $\mathfrak{B}$ (Ebenen B) treten nur einmal auf (vgl. T_I, T_{II}, T_{III} in § 41).

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{llllll}
T_1 & \ldots & \mathfrak{B}_1 & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_2 & \mathfrak{B}_3 & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_4 \\
T_2 & \ldots & \mathfrak{B}_5 & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_6 & \mathfrak{B}_7 & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_8 \\
T_3 & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_9 & \mathfrak{B}_{10} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{11} & \mathfrak{B}_{12}
\end{array}\right\}(D_1), \quad
\left.\begin{array}{llllll}
T_9 & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_2 & \mathfrak{B}_{26} & \mathfrak{B}_{30} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{34} \\
T_{35} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_8 & \mathfrak{B}_{19} & \mathfrak{B}_{37} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{53} \\
T_{47} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{11} & \mathfrak{B}_{18} & \mathfrak{B}_{38} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{56}
\end{array}\right\}(D_7), \\
\left.\begin{array}{llllll}
T_{11} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_2{}^* & \mathfrak{B}_{28} & \mathfrak{B}_{32} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{36} \\
T_{26} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_6 & \mathfrak{B}_{20} & \mathfrak{B}_{40} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{56} \\
T_{38} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_9{}^* & \mathfrak{B}_{17} & \mathfrak{B}_{39} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{53}
\end{array}\right\}(D_9), \quad
\left.\begin{array}{llllll}
T_{16} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_4 & \mathfrak{B}_{49} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{53} & \mathfrak{B}_{57} \\
T_{24} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_6 & \mathfrak{B}_{23} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{34} & \mathfrak{B}_{45} \\
T_{44} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{11} & \mathfrak{B}_{21} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{36} & \mathfrak{B}_{47}
\end{array}\right\}(D_{14}), \\
\qquad\qquad \left.\begin{array}{llllll}
T_{19} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}^*{}_4 & \mathfrak{B}_{52} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{56} & \mathfrak{B}_{60} \\
T_{33} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_8 & \mathfrak{B}_{24} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{36} & \mathfrak{B}_{48} \\
T_{37} & \ldots & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_9{}^* & \mathfrak{B}_{22} & \boldsymbol{\mathfrak{B}}_{34} & \mathfrak{B}_{46}
\end{array}\right\}(D_{17})
\end{array}\right\} \ldots (72\gamma)$$

Diese 10 ausgezeichneten Ebenen B (Punkte $\mathfrak{B}$) sollen durch ϱ (und $\mathfrak{r}$) in folgender Weise bezeichnet werden (vgl. Formeln $(1\gamma)\,..\,(1\vartheta)$ in § 41):

$$\left.\begin{array}{llcccclll}
\varrho_1 & (B_{36}) \ldots & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_1 & (\mathfrak{B}_{36}) \\
\varrho_2 & (B_{34}) \ldots & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_2 & (\mathfrak{B}_{34}) \\
\varrho_3 & (B_{56}) \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \ldots & \mathfrak{r}_3 & (\mathfrak{B}_{56}) \\
\varrho_4 & (B_{53}) \ldots, & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \ldots & \mathfrak{r}_4 & (\mathfrak{B}_{53}) \\
\hline
\varrho_5 & (B_2) \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{r}_5 & (\mathfrak{B}_2) \\
\varrho_6 & (B_4) \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & \mathfrak{r}_6 & (\mathfrak{B}_4) \\
\varrho_7 & (B_{11}) \ldots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_7 & (\mathfrak{B}_{11}) \\
\varrho_8 & (B_9) \ldots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_8 & (\mathfrak{B}_9) \\
\varrho_9 & (B_8) \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_9 & (\mathfrak{B}_8) \\
\varrho_{10} & (B_6) \ldots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & \mathfrak{r}_{10} & (\mathfrak{B}_6)
\end{array}\right\} \ldots . (72\delta)$$

Die 10 Ebenen $\varrho_1\,..\,\varrho_{10}$ schneiden sich zu dreien in 10 Geraden $K_1\,..\,K_{10}$, welche zu den in § 41 unter 5b) durch C (bezw. k) bezeichneten

200 Geraden gehören, ferner zu je zweien in 15 Geraden $l_1 \ldots l_{15}$, welche zu den in § 41 unter 5a) durch B (bez. e) bezeichneten 450 Geraden gehören. Entsprechend liegen die 10 Punkte $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_{10}$ zu dreien auf 10 Geraden $K'_1 \ldots K'_{10}$ und zu zweien auf 15 Geraden $l'_1 \ldots l'_{15}$, welche bezw. die reciproken Polaren der Geraden K und l sind. Die Plücker'schen und Klein'schen Coordinaten dieser Geraden sind in der unten folgenden Zusammenstellung (72η) und (72ϑ) angegeben.

Die Schnittpunkte der 10 Ebenen $\varrho_1 \ldots \varrho_{10}$ sind einmal fünf Punkte $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$, durch deren jeden sechs Ebenen ϱ hindurchgehen und zwar je vier Gerade K und drei Gerade l; entsprechend giebt es fünf Verbindungsebenen $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, deren jede sechs Punkte $\mathfrak{r}$ enthält und zwar je vier Gerade K' und drei Gerade l', welche bez. den Seiten und Diagonalen eines vollständigen Vierseits entsprechen. Die 5 Punkte $\mathfrak{T}$ (Ebenen τ) gehören zu den 300 Punkten $\mathfrak{D}$ (Ebenen Δ) (vgl. § 41 unter 4) Formeln (7)).

Zweitens schneiden sich die 10 Ebenen ϱ zu vieren in 10 Punkten $\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_{10}$, durch deren jeden eine Gerade K und drei Geraden l hindurchgehen; entsprechend liegen die 10 Punkte $\mathfrak{r}$ zu vieren in 10 Ebenen $P_1 \ldots P_{10}$, deren jede eine Gerade K' und drei Gerade l' enthält. Die zehn Punkte $\mathfrak{R}$ (Ebenen P) gehören zu den 600 Punkten $\mathfrak{K}$ (Ebenen K) (vergl. § 41 unter 4) Formeln (6)).

Die 3 Kantenpaare l und l' der drei zu einem der fünf desmischen Systeme gehörigen Tetraeder schneiden sich zu je dreien (in der aus (72ι) ersichtlichen Gruppirung) ausser in einem der 5 Punkte $\mathfrak{T}_0 \ldots \mathfrak{T}_4$ noch in drei Punkten $\mathfrak{L}$, welche mit $\mathfrak{T}$ zusammen die Eckpunkte eines der drei Tetraeder bilden, welche das zu dem betrachteten desmischen Systeme conjugirte constituiren. Entsprechend liegen die 3 Kantenpaare l' und l zu je dreien ausser in einer der fünf Ebenen $\tau_0 \ldots \tau_4$ noch in drei Ebenen λ, welche mit τ zusammen die Seitenflächen des zu dem conjugirten desmischen Systeme gehörigen Tetraeders bilden. Diese 5 Polartetraeder, deren Elemente in (72ι) zusammengestellt sind, kommen als Fundamentaltetraeder für die Transformationen der in Rede stehenden Gruppe in Betracht.

$$\left.\begin{array}{llccccll}
\mathfrak{T}_0 \ldots (\varrho_5\ \varrho_6\ \varrho_7\ \varrho_8\ \varrho_9\ \varrho_{10}) \ldots & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \tau_0 \ldots & [\mathfrak{r}_5\ \mathfrak{r}_6\ \mathfrak{r}_7\ \mathfrak{r}_8\ \mathfrak{r}_9\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{T}_1 \ldots (\varrho_2\ \varrho_3\ \varrho_4\ \varrho_5\ \varrho_7\ \varrho_9) \ldots & & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \tau_1 \ldots & [\mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_5\ \mathfrak{r}_7\ \mathfrak{r}_9] \\
\mathfrak{T}_2 \ldots (\varrho_4\ \varrho_1\ \varrho_3\ \varrho_5\ \varrho_8\ \varrho_{10}) \ldots & & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \tau_2 \ldots & [\mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_5\ \mathfrak{r}_8\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{T}_3 \ldots (\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_4\ \varrho_6\ \varrho_7\ \varrho_{10}) \ldots & & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \tau_3 \ldots & [\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_6\ \mathfrak{r}_7\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{T}_4 \ldots (\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3\ \varrho_6\ \varrho_8\ \varrho_9) \ldots & & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \tau_4 \ldots & [\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_6\ \mathfrak{r}_8\ \mathfrak{r}_9]
\end{array}\right\} (72\varepsilon)$$

$$\left.\begin{array}{lccccll}
\mathfrak{R}_1 \ldots (\varrho_1;\ \varrho_5\ \varrho_7\ \varrho_9) \ldots & \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_1 \ldots & [\mathfrak{r}_1;\ \mathfrak{r}_5\ \mathfrak{r}_7\ \mathfrak{r}_9] \\
\mathfrak{R}_2 \ldots (\varrho_2;\ \varrho_5\ \varrho_8\ \varrho_{10}) \ldots & \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_2 \ldots & [\mathfrak{r}_2;\ \mathfrak{r}_5\ \mathfrak{r}_8\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{R}_3 \ldots (\varrho_3;\ \varrho_6\ \varrho_7\ \varrho_{10}) \ldots & \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & 0 & \ldots P_3 \ldots & [\mathfrak{r}_3;\ \mathfrak{r}_6\ \mathfrak{r}_7\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{R}_4 \ldots (\varrho_4;\ \varrho_6\ \varrho_8\ \varrho_9) \ldots & \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & 0 & \ldots P_4 \ldots & [\mathfrak{r}_4;\ \mathfrak{r}_6\ \mathfrak{r}_8\ \mathfrak{r}_9] \\
\mathfrak{R}_5 \ldots (\varrho_5;\ \varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_6) \ldots & -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & \ldots P_5 \ldots & [\mathfrak{r}_5;\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_6] \\
\mathfrak{R}_6 \ldots (\varrho_6;\ \varrho_3\ \varrho_4\ \varrho_5) \ldots & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & \ldots P_6 \ldots & [\mathfrak{r}_6;\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_5] \\
\mathfrak{R}_7 \ldots (\varrho_7;\ \varrho_1\ \varrho_3\ \varrho_8) \ldots & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_7 \ldots & [\mathfrak{r}_7;\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_8] \\
\mathfrak{R}_8 \ldots (\varrho_8;\ \varrho_2\ \varrho_4\ \varrho_7) \ldots & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_8 \ldots & [\mathfrak{r}_8;\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_7] \\
\mathfrak{R}_9 \ldots (\varrho_9;\ \varrho_1\ \varrho_4\ \varrho_{10}) \ldots & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_9 \ldots & [\mathfrak{r}_9;\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_4\ \mathfrak{r}_{10}] \\
\mathfrak{R}_{10} \ldots (\varrho_{10};\ \varrho_2\ \varrho_3\ \varrho_9) \ldots & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & \ldots P_{10} \ldots & [\mathfrak{r}_{10};\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_3\ \mathfrak{r}_9]
\end{array}\right\} (72\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
K_1 \ldots |\varrho_5\ \varrho_7\ \varrho_9| = |\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_1;\ \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{r}_1| \ldots \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \ldots -1\ -i\ \ 1\ -i\ \ 1\ -i \\
K_2 \ldots |\varrho_5\ \varrho_8\ \varrho_{10}| = |\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_2;\ \mathfrak{R}_2\ \mathfrak{r}_2| \ldots \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \ldots\ \ 1\ \ i\ \ 1\ -i\ -1\ \ i \\
K_3 \ldots |\varrho_6\ \varrho_7\ \varrho_{10}| = |\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_3;\ \mathfrak{R}_3\ \mathfrak{r}_3| \ldots \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \ldots\ \ 1\ -i\ \ 1\ -i\ \ 1\ \ i \\
K_4 \ldots |\varrho_6\ \varrho_8\ \varrho_9| = \mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_4;\ \mathfrak{R}_4\ \mathfrak{r}_4 \ldots \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \ldots\ \ 1\ -i\ -1\ \ i\ \ 1\ \ i
\end{array}\right\} (72\eta)$$

$K_5 \,..\, \vert \varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_6 \vert = \vert \mathfrak{T}_3\ \mathfrak{T}_4;\ \mathfrak{R}_5\ \mathfrak{r}_5 \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{cotg}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}$	$..\ \operatorname{cotg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad 0\quad 0\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad -i\operatorname{tg}\varphi$	(72η)
$K_6 \,..\, \vert \varrho_3\ \varrho_4\ \varrho_5 \vert = \vert \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_2;\ \mathfrak{R}_6\ \mathfrak{r}_6 \vert \,..$	$\begin{matrix} 0 & 0 & \operatorname{tg}\varphi \\ \operatorname{cotg}\varphi & 0 & 0 \end{matrix}$	$..\ \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad 0\quad 0\quad \operatorname{tg}\varphi\quad -i\operatorname{tg}\varphi$	
$K_7 \,..\, \vert \varrho_1\ \varrho_3\ \varrho_8 \vert = \vert \mathfrak{T}_4\ \mathfrak{T}_2;\ \mathfrak{R}_7\ \mathfrak{r}_7 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ 0\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad 0$	
$K_8 \,..\, \vert \varrho_2\ \varrho_4\ \varrho_7 \vert = \vert \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_3;\ \mathfrak{T}_8\ \mathfrak{r}_8 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & -\sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ 0\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad 0$	
$K_9 \,..\, \vert \varrho_1\ \varrho_4\ \varrho_{10} \vert = \vert \mathfrak{T}_2\ \mathfrak{T}_3;\ \mathfrak{R}_9\ \mathfrak{r}_9 \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{tg}\varphi & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & -\sqrt{5} & -\operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ \operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad -\operatorname{cotg}\varphi\quad -i\operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad -i\operatorname{cotg}\varphi$	
$K_{10} \,..\, \vert \varrho_2\ \varrho_3\ \varrho_9 \vert = \vert \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_4;\ \mathfrak{R}_{10}\ \mathfrak{r}_{10} \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & -\operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ \operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 0\quad -i\operatorname{cotg}\varphi$	

Die entsprechende Darstellung für die Bestimmung der 10 Geraden $K'_1 \,..\, K'_{10}$ folgt aus (72η), wenn bezw. ϱ, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}$, τ, P, ϱ ersetzt, in den Plücker'schen Coordinatenwerthen die beiden Horizontalreihen mit einander vertauscht werden und in den Klein'schen Coordinatenwerthen dem Factor i durchweg das entgegengesetzte Zeichen ertheilt wird.

$l_1 \,..\, \vert \varrho_9\ \varrho_{10};\ \lambda_2\ \lambda_3 \vert = \vert \mathfrak{R}_9\ \mathfrak{R}_{10};\ \mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}_7;\ \mathfrak{L}_1\ \mathfrak{T}_0 \vert \,..$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$..\ 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad i\quad 0$	(72ϑ)
$l_2 \,..\, \vert \varrho_5\ \varrho_6;\ \lambda_3\ \lambda_1 \vert = \vert \mathfrak{R}_5\ \mathfrak{R}_6;\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_3;\ \mathfrak{L}_2\ \mathfrak{T}_0 \vert \,..$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$..\ 0\quad 0\quad i\quad 1\quad 0\quad 0$	
$l_3 \,..\, \vert \varrho_7\ \varrho_8;\ \lambda_1\ \lambda_2 \vert = \vert \mathfrak{R}_7\ \mathfrak{R}_8;\ \mathfrak{B}_{10}\ \mathfrak{B}_{12};\ \mathfrak{L}_3\ \mathfrak{T}_0 \vert \,..$	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$..\ 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad i$	
$l_4 \,..\, \vert \varrho_2\ \varrho_5;\ \lambda_5\ \lambda_6 \vert = \vert \mathfrak{R}_2\ \mathfrak{R}_5;\ \mathfrak{B}_{26}\ \mathfrak{B}_{30};\ \mathfrak{L}_4\ \mathfrak{T}_1 \vert \,..$	$\begin{matrix} 0 & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 \end{matrix}$	$..\ \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 1\quad -i\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi$	
$l_5 \,..\, \vert \varrho_4\ \varrho_9;\ \lambda_6\ \lambda_4 \vert = \vert \mathfrak{R}_4\ \mathfrak{R}_9;\ \mathfrak{B}_{19}\ \mathfrak{B}_{37};\ \mathfrak{L}_5\ \mathfrak{T}_1 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{tg}^2\varphi \\ -\operatorname{cotg}^2\varphi & -\sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ -\operatorname{cotg}\varphi\quad -i\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad 1\quad i\operatorname{tg}\varphi$	
$l_6 \,..\, \vert \varrho_3\ \varrho_7;\ \lambda_4\ \lambda_5 \vert = \vert \mathfrak{R}_3\ \mathfrak{R}_7;\ \mathfrak{B}_{18}\ \mathfrak{B}_{38};\ \mathfrak{L}_6\ \mathfrak{T}_1 \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 & \operatorname{tg}^2\varphi \\ -\operatorname{cotg}^2\varphi & \sqrt{5} & -\operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ -1\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad -i$	
$l_7 \,..\, \vert \varrho_3\ \varrho_{10};\ \lambda_8\ \lambda_9 \vert = \vert \mathfrak{R}_3\ \mathfrak{R}_{10};\ \mathfrak{B}_{20}\ \mathfrak{B}_{40};\ \mathfrak{L}_7\ \mathfrak{T}_2 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & -1 & \operatorname{tg}^2\varphi \\ -\operatorname{cotg}^2\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ -\operatorname{cotg}\varphi\quad -i\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad 1\quad i\operatorname{tg}\varphi$	
$l_8 \,..\, \vert \varrho_4\ \varrho_8;\ \lambda_9\ \lambda_7 \vert = \vert \mathfrak{R}_4\ \mathfrak{R}_8;\ \mathfrak{B}_{17}\ \mathfrak{B}_{39};\ \mathfrak{L}_8\ \mathfrak{T}_2 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & 1 & -\operatorname{tg}^2\varphi \\ \operatorname{cotg}^2\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ 1\quad i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i$	
$l_9 \,..\, \vert \varrho_1\ \varrho_5;\ \lambda_7\ \lambda_8 \vert = \vert \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}_5;\ \mathfrak{B}_{28}\ \mathfrak{B}_{32};\ \mathfrak{L}_9\ \mathfrak{T}_2 \vert \,..$	$\begin{matrix} 0 & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 \end{matrix}$	$..\ \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad -1\quad i\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi$	
$l_{10} \,..\, \vert \varrho_4\ \varrho_6;\ \lambda_{11}\ \lambda_{12} \vert = \vert \mathfrak{R}_4\ \mathfrak{R}_6;\ \mathfrak{B}_{49}\ \mathfrak{B}_{57};\ \mathfrak{L}_{10}\ \mathfrak{T}_3 \vert \,..$	$\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{cotg}\varphi \end{matrix}$	$..\ -\operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 1\quad -i\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{cotg}\varphi$	
$l_{11} \,..\, \vert \varrho_2\ \varrho_{10};\ \lambda_{12}\ \lambda_{10} \vert = \vert \mathfrak{R}_2\ \mathfrak{R}_{10};\ \mathfrak{B}_{23}\ \mathfrak{B}_{45};\ \mathfrak{L}_{11}\ \mathfrak{T}_3 \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & -\sqrt{5} & \operatorname{tg}^2\varphi \end{matrix}$	$..\ \operatorname{cotg}\varphi\quad -i\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad 1\quad -i\operatorname{tg}\varphi$	
$l_{12} \,..\, \vert \varrho_1\ \varrho_7;\ \lambda_{10}\ \lambda_{11} \vert = \vert \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}_7;\ \mathfrak{B}_{21}\ \mathfrak{B}_{47};\ \mathfrak{L}_{12}\ \mathfrak{T}_3 \vert \,..$	$\begin{matrix} \operatorname{cotg}^2\varphi & 1 & -\operatorname{cotg}\varphi \\ -\operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{tg}^2\varphi \end{matrix}$	$..\ 1\quad -i\operatorname{cotg}\varphi\quad \operatorname{cotg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad -\operatorname{tg}\varphi\quad i$	

$$\left.\begin{array}{ll}
l_{13} \ldots | \varrho_1\, \varrho_9;\ \lambda_{14}\, \lambda_{15} | = | \mathfrak{R}_1\, \mathfrak{R}_9;\ \mathfrak{B}_{24}\, \mathfrak{B}_{48};\ \mathfrak{L}_{13}\, \mathfrak{T}_4 | \ldots \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2\varphi & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & \operatorname{tg}^2\varphi \end{vmatrix} & \ldots \operatorname{cotg}\varphi \quad -i \quad \operatorname{tg}\varphi \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad 1 \quad -i\operatorname{tg}\varphi \\
l_{14} \ldots | \varrho_2\, \varrho_8;\ \lambda_{15}\, \lambda_{13} | = | \mathfrak{R}_2\, \mathfrak{R}_8;\ \mathfrak{B}_{22}\, \mathfrak{B}_{46};\ \mathfrak{L}_{14}\, \mathfrak{T}_4 | \ldots \begin{vmatrix} -\operatorname{cotg}^2\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \sqrt{5} & -\operatorname{tg}^2\varphi \end{vmatrix} & \ldots -1 \quad i\operatorname{cotg}\varphi \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad i\operatorname{tg}\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi \quad -i \\
l_{15} \ldots | \varrho_3\, \varrho_6;\ \lambda_{13}\, \lambda_{14} | = | \mathfrak{R}_3\, \mathfrak{R}_6;\ \mathfrak{B}_{52}\, \mathfrak{B}_{60};\ \mathfrak{L}_{15}\, \mathfrak{T}_4 | \ldots \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{cotg}\varphi \end{vmatrix} & \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi \quad 1 \quad -i \quad -\operatorname{cotg}\varphi \quad -i\operatorname{cotg}\varphi
\end{array}\right\} (72\vartheta)$$

Für die reciproken Polaren $l'_1 \ldots l'_{15}$ ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke, wenn bez. ϱ, λ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{L}$, P, B, λ, τ ersetzt und in den Plücker'schen und Klein'schen Coordinatenwerthen die angegebenen Vertauschungen und Zeichen-Aenderungen vorgenommen werden.

Die Beschaffenheit der 5 Polartetraeder $T^{(0)} \ldots T^{(4)}$, deren Eckpunkte (Seitenflächen) je ein Punkt $\mathfrak{T}$ (je eine Ebene τ) und drei Punkte $\mathfrak{L}$ (drei Ebenen λ) sind, ist aus der nachfolgenden Zusammenstellung (72 ι) ersichtlich. Die 15 Punkte $\mathfrak{L}_1 \ldots \mathfrak{L}_{15}$ (Ebenen $\lambda_1 \ldots \lambda_{15}$) gehören, wie die Punkte $\mathfrak{T}$ (Ebenen τ) zu den 300 Punkten $\mathfrak{D}$ (Ebenen $\varDelta$) (vgl. § 41 unter 4), Formeln (7) und § 43 unter 2 c α), β), γ) Formeln (34a), (36a)).

$\mathfrak{L}_1$	$\ldots (l_1, l'_2, l'_3) \ldots$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_1 \ldots$	$[l'_1, l_2, l_3]$	$T^{(0)} \ldots (72\iota_1)$
$\mathfrak{L}_2$	$\ldots (l'_1, l_2, l'_3) \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\ldots \lambda_2 \ldots$	$[l_1, l'_2, l_3]$	
$\mathfrak{L}_3$	$\ldots (l'_1, l'_2, l_3) \ldots$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_3 \ldots$	$[l_1, l_2, l'_3]$	
$\mathfrak{T}_0$	$\ldots (l_1, l_2, l_3) \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\ldots \tau_0 \ldots$	$[l'_1, l'_2\ l'_3]$	
$\mathfrak{L}_4$	$\ldots (l_4, l'_5, l'_6) \ldots$	$-\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}$	0	$-\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_4 \ldots$	$[l'_4, l_5, l_6]$	$T^{(1)} \ldots (72\iota_2)$
$\mathfrak{L}_5$	$\ldots (l'_4, l_5, l'_6) \ldots$	$-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_5 \ldots$	$[l_4, l'_5, l_6]$	
$\mathfrak{L}_6$	$\ldots (l'_4, l'_5, l_6) \ldots$	$-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_6 \ldots$	$[l_4, l_5, l'_6]$	
$\mathfrak{T}_1$	$\ldots (l_4, l_5, l_6) \ldots$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	0	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \tau_1 \ldots$	$[l'_4, l'_5, l'_6]$	
$\mathfrak{L}_7$	$\ldots (l_7, l'_8, l'_9) \ldots$	$-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_7 \ldots$	$[l'_7, l_8, l_9]$	$T^{(2)} \ldots (72\iota_3)$
$\mathfrak{L}_8$	$\ldots (l'_7, l_8, l'_9) \ldots$	$-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_8 \ldots$	$[l_7, l'_8, l_9]$	
$\mathfrak{L}_9$	$\ldots (l'_7, l'_8, l_9) \ldots$	$-\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}$	0	$-\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \lambda_9 \ldots$	$[l_7, l_8, l'_9]$	
$\mathfrak{T}_2$	$\ldots (l_7, l_8, l_9) \ldots$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	0	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\ldots \tau_2 \ldots$	$[l'_7, l'_8, l'_9]$	

$$\left.\begin{array}{llccccll}
\mathfrak{L}_{10} \ldots (l_{10}, l'_{11}, l'_{12}) \ldots & & \frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \lambda_{10} \ldots & [l'_{10}, l_{11}, l_{12}] \\
\mathfrak{L}_{11} \ldots (l'_{10}, l_{11}, l'_{12}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots \lambda_{11} \ldots & [l_{10}, l'_{11}, l_{12}] \\
\mathfrak{L}_{12} \ldots (l'_{10}, l'_{11}, l_{12}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots \lambda_{12} \ldots & [l_{10}, l_{11}, l'_{12}] \\
\mathfrak{T}_{3} \ldots (l_{10}, l_{11}, l_{12}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \tau_{3} \ldots & [l'_{10}, l'_{11}, l'_{12}]
\end{array}\right\} T^{(3)} \ldots (72\iota_4)$$

$$\left.\begin{array}{llccccll}
\mathfrak{L}_{13} \ldots (l_{13}, l'_{14}, l'_{15}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots \lambda_{13} \ldots & [l'_{13}, l_{14}, l_{15}] \\
\mathfrak{L}_{14} \ldots (l'_{13}, l_{14}, l'_{15}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots \lambda_{14} \ldots & [l_{13}, l'_{14}, l_{15}] \\
\mathfrak{L}_{15} \ldots (l'_{13}, l'_{14}, l_{15}) \ldots & & \frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \lambda_{15} \ldots & [l_{13}, l_{14}, l'_{15}] \\
\mathfrak{T}_{4} \ldots (l_{13}, l_{14}, l_{15}) \ldots & & -\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \tau_{4} \ldots & [l'_{13}, l'_{14}, l'_{15}]
\end{array}\right\} T^{(4)} \ldots (72\iota_5)$$

In jeder der 30 Ebenen B, welche bei den 15 Tetraedern (72γ) nur einmal auftreten, kommen für die nachfolgenden Transformationen noch je zwei Gerade G in Betracht, welche in einer solchen Ebene liegend je fünf der 30 Punkte $\mathfrak{B}$ enthalten, von denen jeder bei den 15 Tetraedern nur einmal auftritt. Da sich in jeder Geraden G fünf Ebenen B schneiden, so giebt es $\frac{30\,.\,2}{5} = 12$ derartige Gerade, welche sich zu je zweien polarreciprok entsprechen. In den Formeln (72$\varkappa_1$) . . (72$\varkappa_6$) sind diese Geradenpaare nach ihrer Lage nebst ihren x_i-Coordinaten aufgeführt (vergl. Formeln 8 c) in § 41). Die Reihenfolge der Punkte $\mathfrak{B}$, sowie die Einführung der Gegenpunkte $\mathfrak{B}'$ ist hierbei mit Rücksicht auf die Projection der Figur auf den dreidimensionalen sphärischen Raum und auf den hier in Betracht kommenden Fall der Regelmässigkeit so gewählt, dass die aufeinanderfolgenden, einem Hauptkreise G angehörigen Punkte einen Winkelabstand von 36° haben.

$$\left\{\begin{array}{l}
G_1 \ldots |\,\mathfrak{B}_3\ \mathfrak{B}_{19}\ \mathfrak{B}_{22}\ \mathfrak{B}'_{21}\ \mathfrak{B}'_{20}\,| = |\,B_1\ B_{47}\ B_{37}\ B_{40}\ B_{46}\,| \ldots \mathrm{tg}\,\varphi \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad i \\
G'_1 \ldots |\,\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_{47}\ \mathfrak{B}_{37}\ \mathfrak{B}_{40}\ \mathfrak{B}_{46}\,| = |\,B_3\ B_{19}\ B_{22}\ B_{21}\ B_{20}\,| \ldots \mathrm{tg}\,\varphi \ -i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0 \quad 1 \ -i
\end{array}\right\} (72\varkappa_1)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
G_2 \ldots |\,\mathfrak{B}_3\ \mathfrak{B}_{18}\ \mathfrak{B}_{23}\ \mathfrak{B}_{24}\ \mathfrak{B}_{17}\,| = |\,B_1\ B_{45}\ B_{39}\ B_{38}\ B_{48}\,| \ldots \mathrm{tg}\,\varphi \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0 \ -1 \ -i \\
G'_2 \ldots |\,\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_{45}\ \mathfrak{B}_{39}\ \mathfrak{B}'_{38}\ \mathfrak{B}'_{48}\,| = |\,B_3\ B_{18}\ B_{23}\ B_{24}\ B_{17}\,| \ldots \mathrm{tg}\,\varphi \ -i\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad 0 \quad 0 \ -1 \quad i
\end{array}\right\} (72\varkappa_2)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
G_3 \ldots |\,\mathfrak{B}_7\ \mathfrak{B}_{57}\ \mathfrak{B}'_{22}\ \mathfrak{B}'_{38}\ \mathfrak{B}'_{28}\,| = |\,B_5\ B_{18}\ B_{49}\ B_{32}\ B_{46}\,| \ldots 1 \quad 0 \quad \mathrm{tg}\,\varphi \quad i \quad 0 \quad i\,\mathrm{tg}\,\varphi \\
G'_3 \ldots |\,\mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}'_{18}\ \mathfrak{B}'_{49}\ \mathfrak{B}'_{32}\ \mathfrak{B}_{46}\,| = |\,B_7\ B_{57}\ B_{22}\ B_{38}\ B_{28}\,| \ldots 1 \quad 0 \quad \mathrm{tg}\,\varphi \ -i \quad 0 \ -i\,\mathrm{tg}\,\varphi
\end{array}\right\} (72\varkappa_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_4 \ldots \mid \mathfrak{B}_7\ \mathfrak{B}_{17}\ \mathfrak{B}'_{52}\ \mathfrak{B}'_{30}\ \mathfrak{B}'_{47} \mid = \mid B_5\ B_{60}\ B_{21}\ B_{39}\ B_{26} \mid \ldots 1\quad 0\ -\operatorname{tg}\varphi\quad i\quad 0\ -i\operatorname{tg}\varphi \\ G'_4 \ldots \mid \mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}'_{60}\ \mathfrak{B}'_{21}\ \mathfrak{B}'_{39}\ \mathfrak{B}_{26} \mid = \mid B_7\ B_{17}\ B_{52}\ B_{30}\ B_{47} \mid \ldots 1\quad 0\ -\operatorname{tg}\varphi\ -i\quad 0\quad i\operatorname{tg}\varphi \end{array}\right\} (72\varkappa_4)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_5 \ldots \mid \mathfrak{B}_{10}\ \mathfrak{B}'_{26}\ \mathfrak{B}'_{40}\ \mathfrak{B}'_{24}\ \mathfrak{B}'_{57} \mid = \mid B_{12}\ B_{20}\ B_{49}\ B_{30}\ B_{48} \mid \ldots 0\quad 1\ -i\quad \operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 0 \\ G'_5 \ldots \mid \mathfrak{B}_{12}\ \mathfrak{B}'_{20}\ \mathfrak{B}'_{49}\ \mathfrak{B}'_{30}\ \mathfrak{B}'_{48} \mid = \mid B_{10}\ B_{26}\ B_{40}\ B_{24}\ B_{57} \mid \ldots 0\quad 1\quad i\quad \operatorname{tg}\varphi\ -i\operatorname{tg}\varphi\quad 0 \end{array}\right\} (72\varkappa_5)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_6 \ldots \mid \mathfrak{B}_{10}\ \mathfrak{B}'_{19}\ \mathfrak{B}'_{52}\ \mathfrak{B}'_{32}\ \mathfrak{B}'_{45} \mid = \mid B_{12}\ B_{28}\ B_{37}\ B_{23}\ B_{60} \mid \ldots 0\quad 1\ -i\ -\operatorname{tg}\varphi\ -i\operatorname{tg}\varphi\quad 0 \\ G'_6 \ldots \mid \mathfrak{B}_{12}\ \mathfrak{B}_{28}\ \mathfrak{B}_{37}\ \mathfrak{B}_{23}\ \mathfrak{B}_{60} \mid = \mid B_{10}\ B_{19}\ B_{52}\ B_{32}\ B_{45} \mid \ldots 0\quad 1\quad i\ -\operatorname{tg}\varphi\quad i\operatorname{tg}\varphi\quad 0 \end{array}\right\} (72\varkappa_6).$$

An der betrachteten Raumfigur lässt sich noch eine grosse Reihe interessanter Lagenbeziehungen nachweisen, welche anschaulich hervortreten, wenn man die in je einer Ebene auftretenden Geraden und Punkte (analog die durch je einen Eckpunkt hindurchgehenden Geraden und Ebenen) in's Auge fasst. Einige der wichtigsten dieser Beziehungen mögen noch kurz erwähnt werden.

In jeder der 5 Ebenen $\tau_0 \,.\,.\, \tau_4$ liegen 4 Gerade K', welche als Seitenpaare eines Vierseits 3 Eckenpaare $\mathfrak{r}$, 3 Diagonalen l' und 3 Diagonalpunkte $\mathfrak{L}$ bestimmen. In jeder der 10 Ebenen ϱ treten 3 Gerade K auf, welche ein Dreieck mit 3 Eckpunkten $\mathfrak{T}$ bilden; die drei von den Eckpunkten ausgehenden Geraden l, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{R}$ schneiden, treffen die gegenüberliegenden Seiten K in je einem weiteren Punkte $\mathfrak{R}$; die harmonische Polare zu dem ersten Punkte $\mathfrak{R}$ ist eine Gerade K', welche die 3 vierten harmonischen Punkte $\mathfrak{r}$ enthält; auf jeder der drei Geraden l tritt ein Punktpaar $\mathfrak{B}$ (zu den 30 Punkten $\mathfrak{B}$ gehörig) auf, welches mit dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{T}$ einen Punkt $\mathfrak{L}$ als vierten harmonischen Punkt bestimmt.

In jeder der 10 Ebenen P liegen 6 der 15 Punkte $\mathfrak{L}$ und zwar so, dass das von ihnen gebildete Sechseck ein Pascal'sches (die Pascal'sche Gerade K' enthält 3 Punkte $\mathfrak{r}$) und zugleich ein Brianchon'sches (durch den Brianchon'schen Punkt $\mathfrak{r}$ gehen 3 Gerade l' hindurch) ist u. s. f.

Bei der unten zu betrachtenden Projection dieser Raumfigur auf den dreidimensionalen sphärischen Raum können diese Lagenbeziehungen auf den einzelnen Hauptkugeln leicht überblickt und die bezüglichen sphärischen Abstände, Neigungswinkel u. s. w. aus den Coordinatenwerthen sofort abgeleitet werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die fünf Punkte $\mathfrak{T}_0 \,.\,.\, \mathfrak{T}_4$ (und analog die fünf Ebenen $\tau_0 \,.\,.\, \tau_4$ des Pentaeders) nicht beliebig angenommen werden dürfen, um die obige Raumfigur zu erhalten. Die Figur eines beliebigen räumlichen Fünfecks enthält zwar ebenfalls 10 Verbindungsgerade

K, 10 Verbindungsebenen ϱ, 15 Schnittgerade l und 10 Schnittpunkte $\mathfrak{R}$, aber die für die obige Raumfigur charakteristischen Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$ (analog die Ebenen B und λ) treten in einer solchen Figur nicht auf, so dass insbesondere die für die specielle Raumfigur vorhandenen fünfzähligen Collineationen für die allgemeine Figur nicht existiren.

Die Configuration eines räumlichen Fünfecks, speciell des hier betrachteten mit den 5 Punkten $\mathfrak{T}_0 \,..\, \mathfrak{T}_4$, den 10 Ebenen ϱ und den 10 Geraden K und 15 Geraden l lässt sich durch das Symbol (vgl. § 1 unter 3)):

$$(5^6_{4+(3)},\ 10^3_2 + [15^2_1],\ 10^{3+(3)}_3),$$

die dieser reciproke Configuration eines Pentaeders, speciell des hier vorliegenden mit den 5 Ebenen $\tau_0 \,..\, \tau_4$, den 10 Punkten $\mathfrak{r}$ und den 10 Geraden K' und 15 Geraden l' durch das Symbol

$$(10^3_{3+(3)},\ 10^2_3 + [15^1_2],\ 5^{4+(3)}_6)$$

charakterisiren.

2) Es sollen nunmehr die 120 Collineationen (und ebenso die 120 Correlationen), welche die unter 1) betrachtete Raumfigur in sich überführen, übersichtlich angegeben werden. Wie bereits im Eingang von 1) erwähnt wurde, gehören je 8 dieser Collineationen (und je 8 der Correlationen) einem der 15 Polartetraeder (72γ) an, und zwar je 4 eigentliche und 4 uneigentliche. Dieselben sind in den 7200 Collineationen (und 7200 Correlationen), welche zur Cf. (60_{15}, 72_5) gehören und in den § 46—50 behandelt wurden, enthalten und sollen, wie dort geschehen, durch die Substitutionen in x_i- und in tetraedrischen Coordinaten charakterisirt werden.

2 I) Die hierhergehörigen 60 eigentlichen Collineationen und 60 eigentlichen Correlationen.

I_1 A) Die identische Transformation:

$$x'_k = x_k \text{ oder } z'_\iota = z_\iota \; (\zeta'_\iota = \zeta_\iota) \qquad (73\alpha)$$

$$\text{oder } J^{(1)} \,...\, J^{(2)} \text{ oder } [1\ 2\ 3\ 4]_1 \qquad (73\beta)$$

(vgl. § 47 unter 1 A)).

I_1 B) Die Polar-Correlation in Beziehung auf $F^{(1)}_1$.

$$-J^{(1)} \,...\, J^{(2)} \text{ oder } J^{(1)} \,...\, -J^{(2)} \qquad (73\alpha')$$

$$\text{oder } [x_1 — x_2\ x_3 — x_4\ x_5 — x_6] = \overline{[1\ 2\ 3\ 4]}_1 \qquad (73\beta')$$

(vgl. § 47 unter 1 B)).

$I_{2-16}A$) 15 hyperbolisch geschaarte Involutionen mit reellem Axenpaar l, l'.

Von diesen Substitutionen gehören drei: $B_1^{(1)} \,..\, B_1^{(2)}$ (vgl. § 47 unter (59a$_1$) dem Tetraeder T_1, sodann je eine: $B_2^{(1)} \,..\, B_2^{(2)}$ (vgl. (59a$_2$) einem der 12 Tetraeder $T_9 \,..\, T_{47}$ (vgl. (72β) an. Es sind in übersichtlicher Zusammenstellung die folgenden:

$$I_2 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_1 & x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3 & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = x_5 & x'_6 = -x_6 \end{array}\right\} \ldots [-3\ \ 4\ -1\ \ 2]_1;\ \text{Axenpaar: } l_1,\ l'_1,$$

$$I_3 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_1 & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_3 & x'_4 = x_4 \\ x'_5 = -x_5 & x'_6 = -x_6 \end{array}\right\} \ldots [1\ -2\ \ 3\ -4]_1;\ \text{„}\ : l_2,\ l'_2,$$

$$I_4 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 & x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_3 & x'_4 = -x_4 \\ x'_5 = -x_5 & x'_6 = x_6 \end{array}\right\} \ldots [-3\ -4\ -1\ -2]_1;\ \text{„}\ : l_3,\ l'_3;$$

(74α)

$$I_5 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{19} & x'_2 = x_{22} \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = x_{30} \\ x'_5 = -x_{11} & x'_6 = x_{14} \end{array}\right\} \ldots [3\ -1\ -2\ \ 4]_9;\ \text{„}\ : l_9,\ l'_9,$$

$$I_6 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{11} & x'_2 = x_{30} \\ x'_3 = -x_{19} & x'_4 = x_{14} \\ x'_5 = -x_{27} & x'_6 = x_{22} \end{array}\right\} \ldots [3\ \ 1\ -2\ -4]_{35};\ \text{„}\ : l_{12},\ l'_{12},$$

$$I_7 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{27} & x'_2 = x_{14} \\ x'_3 = -x_{11} & x'_4 = x_{22} \\ x'_5 = -x_{19} & x'_6 = x_{30} \end{array}\right\} \ldots [3\ -1\ -2\ \ 4]_{47};\ \text{„}\ : l_{13},\ l'_{13};$$

(74β)

$$I_8 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = -x_{18} \\ x'_3 = -x_{23} & x'_4 = x_{26} \\ x'_5 = x_7 & x'_6 = -x_{10} \end{array}\right\} \ldots [3\ \ 1^*\ \ 2\ \ 4]_{11};\ \text{„}\ : l_4,\ l'_4,$$

$$I_9 A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_7 & x'_2 = -x_{26} \\ x'_3 = -x_{15} & x'_4 = x_{10} \\ x'_5 = x_{23} & x'_6 = -x_{18} \end{array}\right\} \ldots [3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]_{26};\ \text{„}\ : l_{14},\ l'_{14},$$

$$I_{10} A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{23} & x'_2 = -x_{10} \\ x'_3 = -x_7 & x'_4 = x_{18} \\ x'_5 = x_{15} & x'_6 = -x_{26} \end{array}\right\} \ldots [3\ \ 1^*\ \ 2\ \ 4]_{38};\ \text{„}\ : l_{11},\ l'_{11};$$

(74γ)

$$I_{11} A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{21} & x'_2 = -x_{16} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = x_{13} & x'_6 = x_8 \end{array}\right\} \ldots [4\ -3\ -2\ \ 1]_{16};\ \text{„}\ : l_{15},\ l'_{15},$$

$$I_{12} A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{13} & x'_2 = -x_{24} \\ x'_3 = x_{21} & x'_4 = -x_8 \\ x'_5 = x_{29} & x'_6 = x_{16} \end{array}\right\} \ldots [-4\ -3\ \ 2\ \ 1]_{24};\ \text{„}\ : l_6,\ l'_6,$$

$$I_{13} A) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{29} & x'_2 = -x_8 \\ x'_3 = x_{13} & x'_4 = -x_{16} \\ x'_5 = x_{21} & x'_6 = x_{24} \end{array}\right\} \ldots [4\ -3\ -2\ \ 1]_{44};\ \text{„}\ : l_7,\ l'_7;$$

(74δ)

(74a)

$$I_{14}A)\dots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{17} & x'_2=x_{20}\\ x'_3=x_{25} & x'_4=-x_{28}\\ x'_5=-x_9 & x'_6=-x_{12}\end{array}\right\}\dots[4\ 3\ 2\ 1^*]_{19};\ \text{Axenpaar: } l_{10},\ l'_{10},$$

$$I_{15}A)\dots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_9 & x'_2=x_{28}\\ x'_3=x_{17} & x'_4=-x_{12}\\ x'_5=-x_{25} & x'_6=-x_{20}\end{array}\right\}\dots[4\ 3\ 2\ 1]_{33};\quad ,,\ :\ l_8,\ l'_8,\qquad (74\varepsilon)\ (74a)$$

$$I_{16}A)\dots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{25} & x'_2=x_{12}\\ x'_3=x_9 & x'_4=-x_{20}\\ x'_5=-x_{17} & x'_6=-x_{28}\end{array}\right\}\dots[4\ 3\ 2\ 1^*]_{37};\quad ,,\ :\ l_5,\ l'_5.$$

I_{2-16} B) 15 Polarcorrelationen mit Kernflächen $F^{(1)}$.

Die aus den Substitutionen (74a) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$ entstehenden Substitutionen, nämlich $\pm B_1^{(1)}\dots\mp B_1^{(2)}$ für I_{2-4} B) und $\pm B_2^{(1)}\dots\mp B_2^{(2)}$ für I_{5-16} B), bedeuten Polar-Correlationen, deren Kernflächen 15 der in § 45 unter I 1), 2) betrachteten reellen Flächen $F^{(1)}_2\dots F^{(1)}_{154}$ sind.

Beispiele:

$$I_3\ B):\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_1 & x'_2=x_2\\ x'_3=x_3 & x'_4=-x_4\\ x'_5=-x_5 & x'_6=x_6\end{array}\right\}\dots[\overline{1\ -2\ 3\ -4}]_1;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kernfläche: } x_1^2+x_4^2+x_5^2\equiv x_2^2+x_3^2+x_6^2=0\\ \text{oder: } z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2=0\end{array}\right\}\ F_3^{(1)}\ (\text{vgl. } (17\varepsilon) \text{ in § 7}).$$

$$I_9\ B):\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_7 & x'_2=x_{26}\\ x'_3=-x_{15} & x'_4=-x_{16}\\ x'_5=x_{23} & x'_6=x_{18}\end{array}\right\}\dots[\overline{3\ 1\ 2\ 4}]_{26};$$

$$\text{Kernfläche: } x_{17}^2+x_{25}^2+x_{20}^2\equiv x_9^2+x_{12}^2+x_{28}^2=0$$

$$\text{oder: }\left.\begin{array}{l} -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2+\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}z_3^2\\ +z_1z_2+z_4z_2+z_2z_3\\ -\operatorname{tg}\varphi\, z_3z_4\qquad+\operatorname{cotg}\varphi\, z_1z_4\end{array}\right\}=0.$$

I_{17-36} A) 20 dreizählige axiale Collineationen mit Axen $K..K'$.

Von diesen Substitutionen gehören je vier: $C_1^{(1)}\dots C_1^{(2)}$ (vgl. § 47 unter 61a$_2$)) einem der beiden Tetraeder T_2, T_3, je eine: $C_2^{(1)}\dots C_2^{(2)}$ (vgl. 61a$_3$)) einem der 12 Tetraeder $T_9\dots T_{47}$ an. Die Büschel- und Reihenaxen sind je eine Gerade K und K' (vgl. (72η) und 5b) in § 41).

$$I_{17-18}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_5 & x'_2 = x_4 \\ x'_3 = -x_1 & x'_4 = x_6 \\ x'_5 = x_3 & x'_6 = x_2 \end{array}\right\} \ldots [3\ -4\ -1\ 2]_2;$$

Büschel-, Reihen-Axe

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_3 & x'_2 = x_6 \\ x'_3 = x_5 & x'_4 = x_2 \\ x'_5 = -x_1 & x'_6 = x_4 \end{array}\right\} \ldots [4\ 3\ -2\ -1]_3 \ldots K_1 \ldots K'_1.$$

$$I_{19-20}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_5 & x'_2 = -x_4 \\ x'_3 = x_1 & x'_4 = -x_6 \\ x'_5 = -x_3 & x'_6 = x_2 \end{array}\right\} \ldots [1\ 2\ -3\ -4]_2;$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_3 & x'_2 = x_6 \\ x'_3 = -x_5 & x'_4 = -x_2 \\ x'_5 = -x_1 & x'_6 = -x_4 \end{array}\right\} \ldots [2\ 1\ -4\ -3]_3 \ldots K_2 \ldots K'_2.$$

(75α)

$$I_{21-22}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_5 & x'_2 = x_4 \\ x'_3 = x_1 & x'_4 = -x_6 \\ x'_5 = x_3 & x'_6 = -x_2 \end{array}\right\} \ldots [3\ 4\ -1\ -2]_2;$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_3 & x'_2 = -x_6 \\ x'_3 = x_5 & x'_4 = x_2 \\ x'_5 = x_1 & x'_6 = -x_4 \end{array}\right\} \ldots [2\ -1\ -4\ 3]_3 \ldots K_3 \ldots K'_3.$$

$$I_{23-24}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_5 & x'_2 = -x_4 \\ x'_3 = -x_1 & x'_4 = x_6 \\ x'_5 = -x_3 & x'_6 = -x_2 \end{array}\right\} \ldots [1\ -2\ -3\ 4]_2;$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_3 & x'_2 = -x_6 \\ x'_3 = -x_5 & x'_4 = -x_2 \\ x'_5 = x_1 & x'_6 = x_4 \end{array}\right\} \ldots [4\ -3\ -2\ 1]_3 \ldots K_4 \ldots K'_4.$$

(75 a)

$$I_{25-26}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{15} & x'_2 = x_{18} \\ x'_3 = -x_{23} & x'_4 = x_{26} \\ x'_5 = -x_7 & x'_6 = x_{10} \end{array}\right\} \ldots [3\ 1\ -2\ -4]_9;$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{19} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = -x_{27} & x'_4 = x_{30} \\ x'_5 = x_{11} & x'_6 = -x_{14} \end{array}\right\} \ldots [3\ -1^*\ 2\ -4]_{11} \ldots K_5 \ldots K'_5.$$

$$I_{27-28}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{17} & x'_2 = -x_{20} \\ x'_3 = x_{25} & x'_4 = -x_{28} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = x_{12} \end{array}\right\} \ldots [-4\ -3\ 2\ 1]_{16};$$

(75β)

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{21} & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = x_{29} & x'_4 = -x_{24} \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = -x_8 \end{array}\right\} \ldots [4\ -3\ 2\ -1^*]_{19} \ldots K_6 \ldots K'_6.$$

$$I_{29-30}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{11} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = x_{19} & x'_4 = -x_{14} \\ x'_5 = x_{27} & x'_6 = x_{22} \end{array}\right\} \ldots [-2\ -1\ 4\ 3]_{24};$$

$$S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{13} & x'_2 = x_{24} \\ x'_3 = -x_{21} & x'_4 = x_8 \\ x'_5 = -x_{29} & x'_6 = x_{16} \end{array}\right\} \ldots [2\ 4\ -3\ -1]_{35} \ldots K_7 \ldots K'_7.$$

$$\left.\left.\begin{array}{l}
I_{31-32}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_9 & x'_2 = -x_{28} \\ x'_3 = -x_{17} & x'_4 = x_{12} \\ x'_5 = x_{25} & x'_6 = x_{20} \end{array}\right\} \ldots [2\ 4\ 3\ 1]_{26}; \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Büschel-, Reihen-Axe} \\
S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_7 & x'_2 = x_{26} \\ x'_3 = x_{15} & x'_4 = -x_{10} \\ x'_5 = -x_{23} & x'_6 = -x_{18} \end{array}\right\} \ldots [2\ 1\ 4\ 3]_{33} \ldots K_8 \ldots K'_8. \\
I_{33-34}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{25} & x'_2 = x_{12} \\ x'_3 = -x_9 & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = -x_{17} & x'_6 = x_{28} \end{array}\right\} \ldots [-2\ -4\ 3\ 1]_{47}; \\
S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{27} & x'_2 = x_{14} \\ x'_3 = x_{11} & x'_4 = -x_{22} \\ x'_5 = -x_{19} & x'_6 = -x_{30} \end{array}\right\} \ldots [-2\ 1^*\ -4\ 3]_{37} \ldots K_9 \ldots K'_9. \\
I_{35-36}\ A) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{29} & x'_2 = -x_8 \\ x'_3 = -x_{13} & x'_4 = x_{16} \\ x'_5 = x_{21} & x'_6 = -x_{24} \end{array}\right\} \ldots [-2\ 4\ -3\ 1^*]_{38}; \\
S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{23} & x'_2 = -x_{10} \\ x'_3 = x_7 & x'_4 = -x_{18} \\ x'_5 = x_{15} & x'_6 = x_{26} \end{array}\right\} \ldots [-2\ -1\ 4\ 3]_{44} \ldots K_{10} \ldots K'_{10}.
\end{array}\right\} (75\beta)\right\} (75a)$$

I_{17-36} B) 20 sechszählige allgemeine Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen resultiren aus denjenigen in (75a) durch Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Ueber die Beschaffenheit dieser Transformationen S, S^5, des Haupttetraeders, der Complexe Ω'', der festbleibenden Flächen G_1, G_2 und der Kernflächen K_1, K_2 ist ist das in § 47 unter 4 B) Gesagte zu vergleichen.

S^2 und S^4 sind die dreizähligen axialen Collineationen I_{17-36} A) in (75a) mit Axen $K..K'$, S^3 ist die Polar-Correlation I_1 B).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l}
I_{21-22}\ B) \ldots S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_5 & x'_2 = -x_4 \\ x'_3 = x_1 & x'_4 = x_6 \\ x'_5 = x_3 & x'_6 = x_2 \end{array}\right\} \ldots [3\ 4\ -1\ -2]_2; \\
S^5 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_3 & x'_2 = x_6 \\ x'_3 = x_5 & x'_4 = -x_2 \\ x'_5 = x_1 & x'_6 = x_4 \end{array}\right\} \ldots [2\ -1\ -4\ 3]_3. \\
\begin{array}{c}\text{Haupttetraeder} \\ \text{(Eckpunkte } \mathfrak{c}_0, \\ \text{Seitenflächen } \gamma_0\text{):}\end{array}
\left\{\begin{array}{lcccccl}
Z_1 \ldots & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & 0 & \ldots Z_4 \\
Z_2 \ldots & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & i\sqrt{\frac{1}{2}} & \ldots Z_3 \\
Z_3 \ldots & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -i\sqrt{\frac{1}{2}} & \ldots Z_2 \\
Z_4 \ldots & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\alpha^2}{\sqrt{3}} & \frac{\alpha}{\sqrt{3}} & 0 & \ldots Z_1
\end{array}\right.
\end{array}\right\} (75b)$$

$$\left.\begin{array}{l}
K_{14} \text{ und } K_{23} \ldots 1 \quad \mp i \quad 1 \quad \mp i \quad 1 \quad \pm i \ldots K_3 \text{ und } K'_3 \\
\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} K_{12} \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad -\alpha^2 \\ K_{34} \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha^2 \quad 0 \quad -\alpha \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} K_{14} \ldots 1 \quad 0 \quad \alpha^2 \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \\ K_{23} \ldots 1 \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha^2 \quad 0 \end{array}\right.
\end{array}\right\} \ldots c_0 \\
C' \ldots x_1+x_3+x_5=0, \quad \Omega'' \ldots x_1\,x_5+x_3\,x_1+x_5\,x_3-x_2\,x_4+x_4\,x_6+x_6\,x_2=0 \\
C'' \ldots x_2+x_4-x_6=0; \\
G_1 \ldots Z_1\,Z_4+Z_2\,Z_3 \,..\, x_1^2+x_3^2+x_5^2=0 \text{ oder } z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0 \,..\, F_1^{(1)}, \\
G_2 \ldots Z_1\,Z_4-Z_2\,Z_3 \,..\, \left.\begin{array}{l} 2\,(x_1+x_3+x_5)^2+3\,(x_3-x_5)^2+(-2\,x_1+x_3+x_5)^2 \\ \equiv 2\,(x_2+x_4+x_6)^2+3\,(x_4-x_6)^2+(-2\,x_2+x_4+x_6)^2 \end{array}\right\}=0 \\
\qquad\qquad \text{oder } z_1^2+z_2^2+z_3^2-3\,z_4^2+4\,(z_1\,z_2-z_1\,z_3+z_2\,z_3)=0. \\
K_1 \,..\, 2\,Z_1\,Z_4-Z_2\,Z_3 \equiv Z_1\,Z_4-2\,Z_2\,Z_3 \equiv z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2+ \\
\qquad\qquad +2\,(z_1\,z_2-z_1\,z_3+z_2\,z_3)=0, \\
K_2 \,..\, Z_1\,Z_4-2\,Z_2\,Z_3 \equiv 2\,Z_1\,Z_4-Z_2\,Z_3 \equiv -z_4^2+2\,(z_1\,z_2-z_1\,z_3+z_2\,z_3)=0.
\end{array}\right\} (75\,b)$$

I_{27-28} B) Dies Beispiel ist in § 47 unter 4 B) ausführlich behandelt.

I_{37-60} A) 24 fünfzählige allgemeine Collineationen.

Dieselben sind in den im § 47 unter 8 A) behandelten 288 fünfzähligen allgemeinen Collineationen $G_1^{(1)} \ldots G_2^{(2)}$ und $G_2^{(1)} \ldots G_1^{(2)}$ enthalten und zwar gehören jedem der 12 Tetraeder $T_9 \,..\, T_{47}$ zwei solcher Substitutionen an. Diese 24 Substitutionen sind im Folgenden aufgeführt; es möge genügen, für je vier zusammengehörige Substitutionen S, S^4; S^2, S^3 das reelle Kantenpaar G, G' des Haupttetraeders anzugeben; mit Benutzung der früher (§ 47 unter 8 A) und § 8 I, sowie § 9 I B) unter 5)) aufgestellten Beziehungen können die Coordinatenwerthe für die imaginären Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ (Seitenflächen χ_0), die beiden imaginären Kantenpaare g_0, ebenso die Gleichungen für die tetraedralen Complexe, das Complexbüschel und das festbleibende Flächenbüschel leicht erhalten werden.

$$I_{37-40}A) \left\{\begin{array}{l}
S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_7 & x'_2 = x_2; \\ x'_3 = -x_{15} & x'_4 = x_{10} \\ x'_5 = -x_{23} & x'_6 = x_{18} \end{array}\right\} \ldots [3 \; -1 \; -2 \; 4]_{35}, \\
S^4 \,..\, \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = -x_{30} \\ x'_3 = -x_{19} & x'_4 = x_{14} \\ x'_5 = x_{27} & x'_6 = -x_{22} \end{array}\right\} \ldots [-3 \; 1 \; -2 \; 4]_{26}; \\
S^2 \,..\, \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{29} & x'_2 = x_8 \\ x'_3 = x_{13} & x'_4 = -x_{16} \\ x'_5 = -x_{21} & x'_6 = -x_{24} \end{array}\right\} \ldots [-4 \; 3 \; -2 \; 1^*]_{37}, \\
S^3 \,..\, \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{25} & x'_2 = -x_{12} \\ x'_3 = x_9 & x'_4 = -x_{20} \\ x'_5 = x_{17} & x'_6 = x_{28} \end{array}\right\} \ldots [-4 \; -3 \; 2 \; 1]_{44}
\end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Reelles} \\ \text{Kanten-} \\ \text{paar des} \\ \text{Haupt-} \\ \text{tetraeders:} \\ \\ G_1 \ldots G'_1 \\ \text{vgl. } (72\varkappa_1) \end{array} \Bigg\} (76\,a_1) \Bigg\} (76\,a)$$

$$
I_{41-44}A)\left\{\begin{array}{ll}
S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{23} & x'_2=x_{10}\\ x'_3=-x_7 & x'_4=x_{18}\\ x'_5=-x_{15} & x'_6=x_{26}\end{array}\right\}\ldots & [-3\ -1\ 2\ 4]_{47},\\
S^4\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{27} & x'_2=-x_{14}\\ x'_3=-x_{11} & x'_4=x_{22}\\ x'_5=x_{19} & x'_6=-x_{30}\end{array}\right\}\ldots & [-3\ 1^*\ -2\ 4]_{38};\\
S^2\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_9 & x'_2=-x_{28}\\ x'_3=x_{17} & x'_4=-x_{12}\\ x'_5=x_{25} & x'_6=x_{20}\end{array}\right\}\ldots & [4\ -3\ -2\ 1]_{24},\\
S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{13} & x'_2=x_{24}\\ x'_3=x_{21} & x'_4=-x_8\\ x'_5=-x_{29} & x'_6=-x_{16}\end{array}\right\}\ldots & [-4\ 3\ -2\ 1]_{33}
\end{array}\right.
$$

Reelles Kanten-paar des Haupt-tetraeders

$G_2 \ldots G'_2$ vgl. $(72\varkappa_2)$ $(76\,a_2)$

$$
I_{45-48}A)\left\{\begin{array}{ll}
S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{17} & x'_2=x_{20}\\ x'_3=-x_{25} & x'_4=x_{28}\\ x'_5=-x_9 & x'_6=x_{12}\end{array}\right\}\ldots & [-2\ -4\ 3\ 1]_9,\\
S^4\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{19} & x'_2=x_{22}\\ x'_3=x_{27} & x'_4=-x_{30}\\ x'_5=-x_{11} & x'_6=-x_{14}\end{array}\right\}\ldots & [-2\ 1^*\ -4\ 3]_{19};\\
S^2\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_7 & x'_2=-x_{26}\\ x'_3=x_{15} & x'_4=-x_{10}\\ x'_5=x_{23} & x'_6=x_{18}\end{array}\right\}\ldots & [2\ -1\ -4\ 3]_{24},\\
S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{13} & x'_2=-x_{24}\\ x'_3=-x_{21} & x'_4=x_8\\ x'_5=x_{29} & x'_6=-x_{16}\end{array}\right\}\ldots & [-2\ 4\ -3\ 1]_{26}
\end{array}\right.
$$

$G_3 \ldots G'_3$ vgl. $(72\varkappa_3)$ $(76\,a_3)$

$(76a)$

$$
I_{49-52}A)\left\{\begin{array}{ll}
S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_9 & x'_2=x_{28}\\ x'_3=-x_{17} & x'_4=x_{12}\\ x'_5=-x_{25} & x'_6=x_{20}\end{array}\right\}\ldots & [2\ -4\ -3\ 1]_{35},\\
S^4\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{11} & x'_2=x_{30}\\ x'_3=x_{19} & x'_4=-x_{14}\\ x'_5=-x_{27} & x'_6=-x_{22}\end{array}\right\}\ldots & [-2\ 1\ -4\ 3]_{33};\\
S^2\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{21} & x'_2=-x_{16}\\ x'_3=-x_{29} & x'_4=x_{24}\\ x'_5=x_{13} & x'_6=-x_8\end{array}\right\}\ldots & [-2\ 4\ -3\ 1^*]_{11},\\
S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{15} & x'_2=-x_{18}\\ x'_3=x_{23} & x'_4=-x_{26}\\ x'_5=x_7 & x'_6=x_{10}\end{array}\right\}\ldots & [-2\ -1\ 4\ 3]_{16}
\end{array}\right.
$$

$G_4 \ldots G'_4$ vgl. $(72\varkappa_4)$ $(76\,a_4)$

$$
I_{53-56}A)\left\{\begin{array}{ll}
S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{29} & x'_2=x_8\\ x'_3=-x_{13} & x'_4=x_{16}\\ x'_5=-x_{21} & x'_6=x_{24}\end{array}\right\}\ldots & [2\ -4\ -3\ 1]_{47},\\
S^4\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{27} & x'_2=-x_{14}\\ x'_3=x_{11} & x'_4=-x_{22}\\ x'_5=x_{19} & x'_6=x_{30}\end{array}\right\}\ldots & [2\ -1\ -4\ 3]_{44};
\end{array}\right.
$$

$G_5 \ldots G'_5$ vgl. $(72\varkappa_5)$ $(76\,a_5)$

$$I_{53-56}A)\left\{\begin{array}{l} S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{17} & x'_2 = -x_{20} \\ x'_3 = -x_{25} & x'_4 = x_{28} \\ x'_5 = x_9 & x'_6 = -x_{12} \end{array}\right\} \ldots [2\ 4\ 3\ 1^*]_{11}, \\ S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{15} & x'_2 = x_{18} \\ x'_3 = x_{23} & x'_4 = -x_{26} \\ x'_5 = -x_7 & x'_6 = -x_{10} \end{array}\right\} \ldots [2\ 1^*\ 4\ 3]_{19} \end{array}\right\} \begin{array}{c} G_5 \ldots G'_5 \\ \text{vgl. } (72\varkappa_5) \end{array} \Big\} (76a_5)$$

$$I_{57-60}A)\left\{\begin{array}{l} S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{21} & x'_2 = x_{16} \\ x'_3 = -x_{29} & x'_4 = x_{24} \\ x'_5 = -x_{13} & x'_6 = x_8 \end{array}\right\} \ldots [2\ {-4}\ {-3}\ 1]_9, \\ S^4 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{19} & x'_2 = -x_{22} \\ x'_3 = x_{27} & x'_4 = -x_{30} \\ x'_5 = x_{11} & x'_6 = x_{14} \end{array}\right\} \ldots [2\ {-1}\ {-4}\ 3]_{16}; \\ S^2 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{23} & x'_2 = x_{10} \\ x'_3 = x_7 & x'_4 = -x_{18} \\ x'_5 = -x_{15} & x'_6 = -x_{26} \end{array}\right\} \ldots [2\ 1^*\ 4\ 3]_{37}, \\ S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{25} & x'_2 = -x_{12} \\ x'_3 = -x_9 & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = x_{17} & x'_6 = -x_{28} \end{array}\right\} \ldots [2\ 4\ 3\ 1^*]_{38}. \end{array}\right\} \begin{array}{c} G_6 \ldots G'_6 \\ \text{vgl. } (72\varkappa_6) \end{array} \Big\} (76a_6)$$

$$\Big\} (76a)$$

I_{37-60} B) 24 zehnzählige allgemeine Correlationen.

Die Substitutionen ergeben sich (vgl. § 47 unter 8 B) aus denjenigen in (76a) durch Umkehrung der Vorzeichen $\mathfrak{S}^{(1)}$ oder von $\mathfrak{S}^{(2)}$. Die Elemente des Haupttetraeders sind dieselben, wie für die entsprechenden Substitutionen (76a); die Gleichungen der beiden Complexe Ω''_1, Ω''_2, der beiden Complexe der Wechselstrahlen Ω_{w_1}, Ω_{w_2}, der Gewinde C', C'', der Flächen G_1, G_2 u. s. w. können aus den früher gegebenen Formeln (vergl. § 8 unter III, Formeln (48δ)... (48ϑ)), analog wie in § 47 unter B) leicht erhalten werden.

Beispiel:

$$I_{37-40}B)\left\{\begin{array}{l} S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_7 & x'_2 = -x_{26} \\ x'_3 = -x_{15} & x'_4 = -x_{10} \\ x'_5 = -x_{23} & x'_6 = -x_{18} \end{array}\right\} \ldots [\overline{3\ {-1}\ {-2}\ 4}]_{35}, \\ S^9 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{11} & x'_2 = x_{30} \\ x'_3 = -x_{19} & x'_4 = -x_{14} \\ x'_5 = x_{27} & x'_6 = x_{22} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-3\ 1\ {-2}\ 4}]_{26}; \\ S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{25} & x'_2 = x_{12} \\ x'_3 = x_9 & x'_4 = x_{20} \\ x'_5 = x_{17} & x'_6 = -x_{28} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-4\ {-3}\ 2\ 1}]_{44}, \\ S^7 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{29} & x'_2 = -x_8 \\ x'_3 = x_{13} & x'_4 = x_{16} \\ x'_5 = -x_{21} & x'_6 = x_{24} \end{array}\right\} \ldots [\overline{-4\ 3\ {-2}\ 1^*}]_{37}. \end{array}\right\} (76b_1)$$

Die Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 stellen die fünfzähligen Collineationen in ($76a_1$) und zwar in der Folge S^2, S^4, S, S^3 dar, während S^5 die Polar-Correlation in Beziehung auf $F_1^{(1)}$ (vgl. I_1 B) unter ($73\alpha'$), ($73\beta'$)) bedeutet.

In den beiden nachfolgenden Tabellen (77 A) und (77 B) sind ähnlich, wie in den Tabellen (69 A) und (69 B) des § 48 die sämmtlichen eigentlichen Collineationen und Correlationen übersichtlich zusammengestellt, die je einem der 15 Polartetraeder zugehörigen Substitutionen angegeben und in (77 B) die auf jedes dieser Tetraeder entfallende Zahl von vier Substitutionen aufgeführt.

Collineationen:	Substitutionen:	Correlationen:	Substitutionen:	Tetraeder:	Anzahl
$I_1 A$) Identische Transformation	$J^{(1)} \,..\, J^{(2)}$	$I_1 B$) Polarcorrelation in Bezug auf $F_1^{(1)}$	$\pm J^{(1)} \,..\, \mp J^{(2)}$	T_1	1
$I_{2-16} A$) Hyperbolisch-geschaarte Involutionen mit Axenpaar $l \ldots l'$	$B_1^{(1)} \,..\, B_1^{(2)}$; $B_2^{(1)} \,..\, B_2^{(2)}$	$I_{2-16} B$) Polar-Correlationen mit Kernflächen $F^{(1)}$	$\pm B_1^{(1)} \,..\, \mp B_1^{(2)}$ $\pm B_2^{(1)} \,..\, \mp B_2^{(2)}$	T_1; $T_9 \,..\, T_{47}$	15
$I_{17-36} A$) Dreizählige axiale Collineationen mit Axen $K \ldots K'$	$C_1^{(1)} \,..\, C_1^{(2)}$; $C_2^{(1)} \,..\, C_2^{(2)}$	$I_{17-36} B$) Sechszählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{c}_0$ (Flächen γ_0) des Haupttetraeders	$\pm C_1^{(1)} \,..\, \mp C_1^{(2)}$ $\pm C_2^{(1)} \,..\, \mp C_2^{(2)}$	T_2, T_3; $T_9 \,..\, T_{47}$	20
$I_{37-60} A$) Fünfzählige allgemeine Collineationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ und Ebenen χ_0 des Haupttetraeders	$G_1^{(1)} \,..\, G_2^{(2)}$ $G_2^{(1)} \,..\, G_1^{(2)}$	$I_{37-60} B$) Zehnzählige allgemeine Correlationen. Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$, Ebenen χ_0 des Haupttetraeders. Ein System von Kernflächen	$\pm G_1^{(1)} \,..\, \mp G_2^{(2)}$ $\pm G_2^{(1)} \,..\, \mp G_1^{(2)}$	$T_9 \,..\, T_{47}$	24

(77A)

Collineationen:	Correlationen:	Tetraeder T_1	Je ein Tetraeder T_2, T_3	Je eins der 12 Tetraeder $T_9 \,..\, T_{17}$
$I_1 A$)	$I_1 B$)	1	—	—
$I_2 A) \ldots I_{16} A$)	$I_2 B) \ldots I_{16} B$)	3	—	1
$I_{17} A) \ldots I_{36} A$)	$I_{17} B) \ldots I_{36} B$)	—	4	1
$I_{37} A) \ldots I_{60} A$)	$I_{37} B) \ldots I_{60} B$)	—	—	2

(77B)

2II) Die hierhergehörigen 60 uneigentlichen Collineationen und 60 uneigentlichen Correlationen.

Es treten (vergleiche § 49) nur drei verschiedene Arten von uneigentlichen Collineationen und ebenso von uneigentlichen Correlationen auf, nämlich 10 centrische Involutionen, 30 vierzählige und 20 sechszählige allgemeine uneigentliche Collineationen und entsprechend 10 Polar-Correlationen, 30 vierzählige Axen-Correlationen zweiter Art und 20 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen. Die Beschaffenheit dieser aus den erzeugenden Substitutionen $\mp\mathfrak{S}^{(1')} \ldots \pm\mathfrak{S}^{(2')}$ und $\mathfrak{S}^{(1')} \ldots \mathfrak{S}^{(2')}$ gebildeten Transformationen ist auf die in § 49 angegebene Art zu ermitteln, ebenso die Vertheilung derselben auf die 15 Polartetraeder, welche hierbei in die Unterabtheilungen

$$T_1;\ T_2,\ T_3;\ T_9,\ T_{11},\ T_{16},\ T_{19} \text{ und } T_{35},\ T_{47},\ T_{26},\ T_{38},\ T_{24},\ T_{44},\ T_{33},\ T_{37}$$

(vgl. (72β) und (72γ)) für das gewählte Beispiel zu trennen sind.

Im Nachfolgenden sind diese sämmtlichen uneigentlichen Transformationen angegeben und zum Schluss nochmals übersichtlich zusammengestellt.

II_{1-10} A) 10 centrische Involutionen.

Dieselben haben zum Centrum je einen der 10 Punkte $\mathfrak{r}$, zur Homologie-Ebene je eine der 10 Ebenen ϱ (72δ). (Vgl. (71a) in § 50).

Cen- trum: Homologie-Ebene:

$$II_1\ A)\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{22} & x'_2 = x_{19} \\ x'_3 = x_{30} & x'_4 = x_{27} \\ x'_5 = x_{14} & x'_6 = x_{11} \end{matrix}\right\}\ldots -G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}\,[3\ 1\ {-2}\ 4]_9;\ \mathfrak{r}_1 \ldots\ldots \varrho_1,$$

$$II_2\ A)\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{18} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = x_{26} & x'_2 = x_{23} \\ x'_5 = -x_{10} & x'_4 = -x_7 \end{matrix}\right\}\ldots -G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}\,[3\ {-1^*}\ 2\ 4]_{11};\ \mathfrak{r}_2 \ldots\ldots \varrho_2,$$

$$II_3\ A)\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = -x_{21} \\ x'_3 = -x_{24} & x'_4 = -x_{29} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = x_{13} \end{matrix}\right\}\ldots -G_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)} \,..\, [-4\ 3\ 2\ 1]_{16};\ \mathfrak{r}_3 \ldots\ldots \varrho_3, \quad (78a)$$

$$II_4\ A)\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1 = x_{20} & x'_2 = x_{17} \\ x'_3 = -x_{28} & x'_4 = -x_{25} \\ x'_5 = x_{12} & x'_6 = -x_9 \end{matrix}\right\}\ldots -G_1^{(2)} \,..\, G_1^{(1)} \,..\, [4\ 3\ 2\ {-1^*}]_{19};\ \mathfrak{r}_4 \ldots\ldots \varrho_4;$$

$$II_5\ A)\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1 = -x_2 & x'_2 = x_1 \\ x'_3 = x_4 & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = -x_5 \end{matrix}\right\}\ldots -B_1^{(2)} \,..\, B_1^{(1)} \,..\, [1\ {-2}\ 3\ 4]_1;\ \mathfrak{r}_5 \ldots\ldots \varrho_5,$$

Cen- Homologie-
trum: Ebene:

$$\left.\begin{array}{l}
II_6\ A)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_2 & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = x_4 & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = x_6 & x'_6 = x_5 \end{array}\right\}\ldots -B_1^{(2)}\,..\,B_1^{(1)}\,..\,[1\ 2\ 3\ -4]_1;\ \mathfrak{r}_6\ldots\ldots\rho_6; \\
II_7\ A)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_6 & x'_2 = -x_3 \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = x_4 & x'_6 = x_1 \end{array}\right\}\ldots -C_1^{(2)}\,..\,C_1^{(1)}\,..\,[3\ 4\ 1\ -2]_2;\ \mathfrak{r}_7\ldots\ldots\rho_7, \\
II_8\ A)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_6 & x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -x_2 & x'_4 = x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = x_1 \end{array}\right\}\ldots -C_1^{(2)}\,..\,C_1^{(1)}\,..\,[-1\ 2\ 3\ 4]_2;\ \mathfrak{r}_8\ldots\ldots\rho_8, \\
II_9\ A)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_4 & x'_2 = -x_5 \\ x'_3 = x_6 & x'_4 = x_1 \\ x'_5 = x_2 & x'_6 = -x_3 \end{array}\right\}\ldots -C_1^{(2)}\,..\,C_1^{(1)}\,..\,[-4\ 3\ 2\ 1]_3;\ \mathfrak{r}_9\ldots\ldots\rho_9, \\
II_{10}A)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_4 & x'_2 = -x_5 \\ x'_3 = -x_6 & x'_4 = -x_1 \\ x'_5 = x_2 & x'_6 = x_3 \end{array}\right\}\ldots -C_1^{(2)}\,..\,C_1^{(1)}\,..\,[-2\ 1\ 4\ 3]_3;\ \mathfrak{r}_{10}\ldots\ldots\rho_{10}.
\end{array}\right\}\text{(78a)}$$

II_{1-10}B) 10 uneigentliche Polarcorrelationen.

Die entsprechenden Substitutionen ergeben sich aus denjenigen in (78a), wenn das Minus-Zeichen der ersten erzeugenden Substitution weggelassen wird. Die Basisflächen dieser uneigentlichen Polar-Correlationen sind 10 der in § 45 II betrachteten Flächen $F^{(2)}$. (Vgl. § 50 unter 12 B).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l}
II_1\ B)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{22} & x'_2 = x_{19} \\ x'_3 = -x_{30} & x'_4 = x_{27} \\ x'_5 = -x_{14} & x'_6 = x_{11} \end{array}\right\}\ldots\ G_2^{(2)}\,..\,G_2^{(1)}\,..\,[3\ \overline{1\ -2\ 4}]_9; \\
\text{Basisfläche: } F^{(2)}:\ x_1\,x_{22} - x_3\,x_{30} - x_5\,x_{14} \equiv x_2\,x_{19} + x_4\,x_{27} + x_6\,x_{11} = 0 \\
\quad\text{oder } \left.\begin{array}{l} \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\,z_1^2 + z_2^2 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\,z_3^2 + \frac{1}{2}\,z_4^2 \\ + z_1\,z_3 + \operatorname{tg}\varphi\,z_1\,z_4 - \operatorname{cotg}\varphi\,z_3\,z_4 \end{array}\right\} = 0. \\
II_7\ B)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_6 & x'_2 = -x_3 \\ x'_3 = -x_2 & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = x_1 \end{array}\right\}\ldots\ C_1^{(2)}\,..\,C_1^{(1)}\,..\,[3\ \overline{4\ -1\ 2}]_2; \\
\text{Basisfläche: } F^{(2)}:\ x_1\,x_6 - x_2\,x_3 - x_4\,x_5 = 0 \\
\quad\text{oder: } \left.\begin{array}{l} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 2\,z_1\,z_2 - 2\,z_1\,z_3 + 2\,z_1\,z_4 \\ + 2\,z_3\,z_4 - 2\,z_4\,z_2 + 2\,z_2\,z_3 \end{array}\right\} = 0.
\end{array}\right\}\ldots\text{(78b)}$$

II_{11-40}A) 30 vierzählige uneigentliche Collineationen.

Diese Collineationen sind in den 900 in § 50 unter 13 A) betrachteten vierzähligen uneigentlichen Collineationen enthalten. Von den 30

Substitutionen gehört ein Paar $(-B_1^{(2)} \ldots B_1^{(1)})$ dem Tetraeder T_1, je ein Paar $(-C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)})$ einem der beiden Tetraeder T_2, T_3, sodann je zwei Substitutionen $(-B_2^{(2)} \ldots G_{1,2}^{(1)}$ oder $-G_{1,2}^{(2)} \ldots B_2^{(1)})$ und je eine Substitution $(-G_{1,2}^{(2)} \ldots C_2^{(1)}$ oder $-C_2^{(2)} \ldots G_{1,2}^{(1)})$ jedem der 8 Tetraeder $T_{24} \,.\,.\, T_{47}$ an.

Das reelle Ecken- (Ebenen-) Paar eines Haupttetraeders ist durch je einen Punkt $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ (je eine Ebene λ und τ) eines der 5 Polartetraeder ($72\iota_1 \,.\,.\, 72\iota_5$) gebildet, das imaginäre Ecken- (Ebenen-) Paar sind zwei Punkte $\mathfrak{b}_0 \,.\,.\, \mathfrak{b}'_0$ (Ebenen $\beta_0 \,.\,.\, \beta'_0$) (vergl. (20a), (b) in § 42); das reelle Kantenpaar ist das Geradenpaar $l \,.\,.\, l'$, welches das Axenpaar der geschaart involutorischen Collineation darstellt, welche S^2 entspricht, während S und S^3 zwei zusammengehörige vierzählige uneigentliche Collineationen bedeuten. Im Nachfolgenden sind für jedes S und S^3 das reelle Kantenpaar $l \,.\,.\, l'$ und das reelle Ecken- (Ebenen-) Paar des Haupttetraeders angegeben. Die Ausdrücke für die beiden imaginären Kantenpaare des Tetraeders, für den tetraedralen Complex, das Complexbüschel, das Netz in sich transformirter Flächen u. s. w. ergeben sich aus den früher aufgestellten Formeln (vergl. § 8 (28), (ε), (λ), § 9 unter B 1) und § 50 unter 13 A)).

$$II_{11-12}\,A)\quad S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_4 & x'_2 = x_5 \\ x'_3 = -x_6 & x'_4 = -x_1 \\ x'_5 = -x_2 & x'_6 = -x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [4\ 3\ {-2}\ 1]_3; \\ \ldots -C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)}; \end{array}$$

$$S^3 \,.\,.\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_4 & x'_2 = -x_5 \\ x'_3 = -x_6 & x'_4 = -x_1 \\ x'_5 = x_2 & x'_6 = -x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ 1\ {-4}\ 3]_3 \\ \ldots C_1^{(2)} \ldots -C_1^{(1)} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{Reelles} \\ \text{Kanten-, Ecken-, Flächen-} \\ \text{Paar des Haupttetraeders:} \\ l'_1 \ldots l'_1;\ \mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{T}_0;\ \lambda_1,\ \tau_0, \end{array}\right.$$

$$II_{13-14}\,A)\quad S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = -x_4 & x'_4 = x_3 \\ x'_5 = -x_6 & x'_6 = -x_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [3\ {-4}\ 1\ 2]_1; \\ \ldots -B_1^{(2)} \ldots B_1^{(1)}; \end{array} \qquad (79\,\mathrm{a}_1)$$

$$S^3 \,.\,.\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_2 & x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = x_4 & x'_4 = -x_3 \\ x'_5 = -x_6 & x'_6 = -x_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [3\ 4\ 1\ {-2}]_1 \\ \ldots B_1^{(2)} \ldots -B_1^{(1)} \end{array} \Big\}\ l_2 \ldots l'_2;\ \mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{T}_0;\ \lambda_2,\ \tau_0,$$

$$II_{15-16}\,A)\quad S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_6 & x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = -x_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [1\ 2\ {-3}\ 4]_2; \\ \ldots -C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)}; \end{array}$$

$$S^3 \,.\,.\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_6 & x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_2 & x'_4 = -x_5 \\ x'_5 = -x_4 & x'_6 = x_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots [-3\ 4\ 1\ 2]_2 \\ \ldots C_1^{(2)} \ldots -C_1^{(1)} \end{array} \Big\}\ l_3 \ldots l'_3;\ \mathfrak{L}_3,\ \mathfrak{T}_0;\ \lambda_3,\ \tau_0.$$

$$II_{17-18}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{12} & x'_2=-x_{25}\\ x'_3=-x_{20} & x'_4=-x_9\\ x'_5=-x_{28} & x'_6=x_{17}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[-4\ 3\ 2\ 1]_{24};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots C_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_{24} & x'_2=x_{13}\\ x'_3=-x_8 & x'_4=-x_{21}\\ x'_5=x_{16} & x'_6=-x_{29}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[4\ -3\ 2\ 1^*]_{37}\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots C_2^{(1)}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{Reelles}\\ \text{Kanten-, Ecken-, Flächen-}\\ \text{Paar des Haupttetraeders:}\\ l_4\ldots l'_4;\ \mathfrak{L}_4,\ \mathfrak{T}_1;\ \lambda_4,\ \tau_1,\end{matrix}\right.$$

$$II_{19-20}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_8 & x'_2=-x_{29}\\ x'_3=x_{16} & x'_4=x_{13}\\ x'_5=-x_{24} & x_{,6}=-x_{21}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[2\ -4\ 3\ 1]_{26};\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{26} & x'_2=-x_7\\ x'_3=-x_{10} & x'_4=-x_{15}\\ x'_5=-x_{18} & x'_6=x_{23}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[-2\ 1\ 4\ 3]_{44}\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots B_2^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_5\ldots l'_5;\ \mathfrak{L}_5,\ \mathfrak{T}_1;\ \lambda_5,\ \tau_1,$$

$$II_{21-22}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_{28} & x'_2=x_{23}\\ x'_3=x_{12} & x'_4=x_{17}\\ x'_5=-x_{20} & x'_6=-x_{25}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[2\ 4\ 3\ -1^*]_{38};\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots B_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_{10} & x'_2=x_{23}\\ x'_3=-x_{18} & x'_4=-x_7\\ x'_5=x_{26} & x'_6=-x_{15}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[2\ -1\ 4\ 3]_{33}\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_6\ldots l'_6;\ \mathfrak{L}_6,\ \mathfrak{T}_1;\ \lambda_6,\ \tau_1.$$

(79 a_2)

$$II_{23-24}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{12} & x'_2=x_{25}\\ x'_3=x_{20} & x'_4=x_9\\ x'_5=x_{28} & x'_6=x_{17}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[-2\ 4\ 3\ 1]_{35};\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_{30} & x'_2=x_{11}\\ x'_3=-x_{14} & x'_4=-x_{19}\\ x'_5=x_{22} & x'_6=-x_{27}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[2\ 1^*\ 4\ -3]_{37}\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots B_2^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_7\ldots l'_7;\ \mathfrak{L}_7,\ \mathfrak{T}_2;\ \lambda_7,\ \tau_2,$$

$$II_{25-26}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{24} & x'_2=x_{13}\\ x'_3=x_8 & x'_4=x_{21}\\ x'_5=x_{16} & x'_6=x_{29}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[-2\ 4\ 3\ 1]_{47};\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots B_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{14} & x'_2=-x_{27}\\ x'_3=-x_{22} & x'_4=-x_{11}\\ x'_5=-x_{30} & x'_6=x_{19}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[-2\ 1\ 4\ 3]_{24}\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_8\ldots l'_8;\ \mathfrak{L}_8,\ \mathfrak{T}_2;\ \lambda_8,\ \tau_2,$$

$$II_{27-28}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{28} & x'_2=-x_9\\ x'_3=-x_{12} & x'_4=-x_{17}\\ x_{,5}=-x_{20} & x'_6=x_{25}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[4\ 3\ -2\ 1]_{44};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots C_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_8 & x'_2=x_{29}\\ x'_3=-x_{16} & x'_4=-x_{13}\\ x'_5=x_{24} & x'_6=-x_{21}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[4\ -3\ 2\ 1]_{33}\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_9\ldots l'_9;\ \mathfrak{L}_9,\ \mathfrak{T}_2;\ \lambda_9,\ \tau_2.$$

(79 a_3)

$$II_{29-30}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=-x_{10} & x'_2=x_{23}\\ x'_3=x_{18} & x'_4=x_7\\ x'_5=x_{26} & x'_6=x_{15}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[3\ 1\ -2\ 4]_{35};\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots C_2^{(1)};\end{matrix}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{matrix} x'_1=x_{30} & x'_2=-x_{11}\\ x'_3=x_{14} & x'_4=x_{19}\\ x'_5=-x_{22} & x'_6=-x_{27}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\ldots[3\ 1^*\ 2\ -4]_{38}\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)}\end{matrix}\Big\}\ l_{10}\ldots l'_{10};\ \mathfrak{L}_{10},\mathfrak{T}_3;\ \lambda_{10},\ \tau_3,$$

(79 a_4)

$$II_{31-32}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{28} & x'_2=x_9\\ x'_3=x_{12} & x'_4=x_{17}\\ x'_5=x_{20} & x'_6=x_{25}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 1\ \ 4\ \ -3]_{47};\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)};\end{array}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{14} & x'_2=x_{27}\\ x'_3=-x_{22} & x'_4=-x_{11}\\ x'_5=x_{30} & x'_6=-x_{19}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 1\ \ 4\ \ -3]_{33}\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots B_2^{(1)}\end{array}\right\} l_{11}\ldots l'_{11};\ \mathfrak{L}_{11},\mathfrak{T}_3;\ \lambda_{11},\tau_3,$$

$$II_{33-34}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{12} & x'_2=-x_{25}\\ x'_3=x_{20} & x'_4=x_9\\ x'_5=-x_{28} & x'_6=-x_{17}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 4\ \ 3\ \ -1]_{26};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots B_2^{(1)};\end{array}\qquad (79\,a_4)$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{26} & x'_2=x_7\\ x'_3=-x_{10} & x'_4=-x_{15}\\ x'_5=x_{18} & x'_6=-x_{23}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ldots[2\ \ -1^*\ \ 4\ \ 3]_{37}\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)}\end{array}\right\} l_{12}\ldots l'_{12};\ \mathfrak{L}_{12},\mathfrak{T}_3;\ \lambda_{12},\tau_3.$$

$$II_{35-36}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{24} & x'_2=-x_{13}\\ x'_3=x_8 & x'_4=x_{21}\\ x'_5=-x_{16} & x'_6=-x_{29}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[2\ \ -4\ \ 3\ \ 1^*]_{38};\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)};\end{array}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{10} & x'_2=-x_{13}\\ x'_3=-x_{18} & x'_4=-x_7\\ x'_5=-x_{26} & x'_6=x_{15}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 1\ \ -4\ \ 3]_{24}\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots B_2^{(1)}\end{array}\right\} l_{13}\ldots l'_{13};\ \mathfrak{L}_{13},\mathfrak{T}_4;\ \lambda_{13},\tau_4,$$

$$II_{37-38}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_8 & x'_2=x_{29}\\ x'_3=x_{16} & x'_4=x_{13}\\ x'_5=x_{24} & x'_6=x_{21}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 4\ \ -3\ \ 1]_{35};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots B_2^{(1)};\end{array}\qquad (79\,a_5)$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{30} & x'_2=-x_{11}\\ x'_3=-x_{14} & x'_4=-x_{19}\\ x'_5=-x_{22} & x'_6=x_{27}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ldots[2\ \ 1\ \ -4\ \ 3]_{44}\\ \ldots -B_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)}\end{array}\right\} l_{14}\ldots l'_{14}:\ \mathfrak{L}_{14},\mathfrak{T}_4;\ \lambda_{14},\tau_4,$$

$$II_{39-40}\ A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{26} & x'_2=x_7\\ x'_3=x_{10} & x'_4=x_{15}\\ x'_5=x_{18} & x'_6=x_{23}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[-3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]_{47};\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)};\end{array}$$

$$S^3\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{14} & x'_2=-x_{27}\\ x'_3=x_{22} & x'_4=x_{11}\\ x'_5=-x_{30} & x'_6=-x_{19}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ldots[3\ \ 1\ \ 2\ \ -4]_{26}\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots C_2^{(1)}\end{array}\right\} l_{15}\ldots l'_{15};\ \mathfrak{L}_{15},\mathfrak{T}_4;\ \lambda_{15},\tau_4.$$

II_{11-40} B) 30 vierzählige Axencorrelationen der zweiten Art.

Die zugehörigen Substitutionen stimmen mit denjenigen in $(79a_1)\ldots(79a_5)$ überein, wenn den beiden zusammensetzenden Substitutionen die gleichen Vorzeichen ertheilt werden. Für die diesen Substitutionen, welche in den 900 in § 50 unter 13 B) betrachteten enthalten sind, entsprechenden vierzähligen Axencorrelationen zweiter Art sind die beiden involutorisch sich entsprechenden Axen je ein Geradenpaar $l\ldots l'$, mit dem reellen Kantenpaar des Haupttetraeders für die entsprechende vierzählige Collineation übereinstimmend. Dieses Paar $l'\ldots l'$ ist auch das Axen-

paar der geschaarten Involution, welche S^2 entspricht, während S und S^3 zwei zusammengehörige Axen-Correlationen darstellen. Die Mittelpunkte und Ebenen der festbleibenden Strahlbüschel sind das Punktpaar $\mathfrak{B}$ der einen und das Ebenenpaar B der anderen Axe (vgl. (72ϑ)). Die Gleichungen der beiden in sich transformirten Complexe, der in sich auf die zweite Art transformirten Flächen 2ten Grades u. s. w. ergeben sich leicht aus den in § 9 II A 3)) aufgestellten Formeln (70).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l}
II_{11-12}\,B)\quad S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_4 & x'_2 = x_5 \\ x'_3 = x_6 & x'_4 = -x_1 \\ x'_5 = x_2 & x'_6 = -x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \overline{[4\ 3\ -2\ 1]}_3, \\ \ldots C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)}, \end{array} \\
S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_4 & x'_2 = x_5 \\ x'_3 = -x_6 & x'_4 = x_1 \\ x'_5 = x_2 & x'_6 = x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \overline{[2\ 1\ -4\ 3]}_3 \\ \ldots C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)} \end{array} \left\} \begin{array}{ll} \text{Axen-} & \text{Mittelpunkte} \\ \text{paar} & \text{(Ebenen) der} \\ & \text{Strahlbüschel:} \\ l_1 \ldots l'_1; & \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_7\ (B_5, B_7), \end{array}\right. \\
II_{17-18}\,B)\quad S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{12} & x'_2 = -x_{25} \\ x'_3 = x_{20} & x'_4 = -x_9 \\ x'_5 = x_{28} & x'_6 = x_{17} \end{array}\right. \begin{array}{l} \ldots \overline{[-4\ 3\ 2\ 1]}_{24}, \\ \ldots G_1^{(2)} \ldots C_2^{(1)}, \end{array} \\
S^3 \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{24} & x'_2 = x_{13} \\ x'_3 = x_{20} & x'_4 = -x_9 \\ x'_5 = -x_{16} & x'_6 = x_{29} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \overline{[4\ -3\ 2\ 1^*]}_{37} \\ \ldots G_1^{(2)} \ldots C_2^{(2)} \end{array} \Big\}\ l_4 \ldots l'_4;\ \mathfrak{B}_{26}, \mathfrak{B}_{30}\ (B_{26}, B_{30})
\end{array}\right\} \quad (79\,b)$$

u. s. f.

II$_{41-60}$ A) 20 sechszählige uneigentliche Collineationen.

Diese Collineationen sind in den 1200 in § 50 unter 14 A) behandelten sechszähligen uneigentlichen Collineationen enthalten. Von den 20 Substitutionen gehören je eine $(-G^{(2)}_{1,2} \ldots C^{(1)}_2$ oder $-C^{(2)}_2 \ldots G^{(1)}_{1,2})$ jedem der 8 Tetraeder $T_{24} \ldots T_{47}$, je eine $(-G^{(2)}_{1,2} \ldots G^{(1)}_{1,2})$ und je zwei $(-B^{(2)}_2 \ldots C^{(1)}_2$ oder $-C^{(2)}_2 \ldots B^{(1)}_2)$ jedem der 4 Tetraeder T_9, T_{11}, T_{16}, T_{19} an.

Das reelle Ecken-(Ebenen-)Paar eines Haupttetraeders ist durch je einen der 10 Punkte $\mathfrak{r}$ (eine der Ebenen ϱ) ((72δ)) und je einen der 10 Punkte $\mathfrak{R}$ (Ebenen P) ((72ζ)) gebildet; das imaginäre Ecken- (Ebenen-) Paar sind zwei Punkte $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ (Ebenen γ'_0, γ_0) (vgl. § 42 II); das reelle Kantenpaar ist ein Geradenpaar $K \ldots K'$, welches das Axenpaar der beiden dreizähligen axialen Collineationen (75a) darstellt, welche S^2 und S^4 entsprechen, während S und S^5 zwei zusammengehörige sechszählige uneigentliche Collineationen bedeuten. Die Potenz S^3 bedeutet die centrische Involution (78a), deren Centrum $\mathfrak{r}$ der Kante K, deren Homologie-Ebene ϱ der Kante K' an-

gehört (vergl. (72η)). Im Nachfolgenden sind für jedes S und S^5 das reelle Kantenpaar $K\,..\,K'$ und das reelle Ecken- (Ebenen-) Paar $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{R}$ (ϱ, P) angegeben. Die Ausdrücke für die beiden imaginären Kantenpaare des Haupttetraeders, ferner des in sich transformirten tetraedralen Complexes, des Complexbüschels, und der auf die zweite Art in sich transformirten Flächen sind nach früher gegebenen Regeln (§ 9 I B) unter (2b) und § 50 unter 14 A)) leicht zu erhalten.

$$II_{41-42}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{14} & x'_2=x_{27}\\ x'_3=x_{22} & x'_4=x_{11}\\ x'_5=x_{30} & x'_6=x_{19}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[-3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]_{35};\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)};\end{array}$$

$$S^5\,..\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{30} & x'_2=x_{11}\\ x'_3=x_{14} & x'_4=x_{19}\\ x'_5=x_{22} & x'_6=x_{27}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[3\ \ 1\ \ -2\ \ 4]_{47}\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots C_2^{(1)}\end{array}\left\}\begin{array}{c}\text{Reelles Kanten-,}\\ \text{Ecken-, Flächen-Paar}\\ \text{des Haupttetraeders}\\ K_1\,..\,K'_1;\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{R}_1;\ \varrho_1,\ P_1,\end{array}\right.$$

$$II_{43-44}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{26} & x'_2=-x_{7}\\ x'_3=-x_{10} & x'_4=x_{15}\\ x'_5=-x_{18} & x'_6=-x_{23}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[3\ \ -1^*\ \ 2\ \ 4]_{38};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots C_2^{(1)};\end{array}$$

$$S^5\,..\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{10} & x'_2=-x_{23}\\ x'_3=x_{18} & x'_4=x_{7}\\ x'_5=-x_{26} & x'_6=-x_{15}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[3\ \ -1\ \ 2\ \ 4]_{26}\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_1^{(1)}\end{array}\Big\}\ K_2\,..\,K'_2;\ \mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{R}_2;\ \varrho_2,\ P_2,$$

$$II_{45-46}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{24} & x'_2=-x_{13}\\ x'_3=-x_{8} & x'_4=-x_{21}\\ x'_5=-x_{16} & x'_6=x_{29}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[-4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{44};\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)};\end{array}$$

$$S^5\,..\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{8} & x'_2=-x_{29}\\ x'_3=-x_{16} & x'_4=-x_{13}\\ x'_5=-x_{24} & x'_6=x_{21}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[4\ \ -3\ \ 2\ \ 1]_{24}\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots C_2^{(1)}\end{array}\Big\}\ K_3\,..\,K'_3;\ \mathfrak{r}_3,\ \mathfrak{R}_3;\ \varrho_3,\ P_3,$$

$$II_{47-48}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{12} & x'_2=x_{25}\\ x'_3=-x_{20} & x'_4=-x_{9}\\ x'_5=x_{28} & x'_6=-x_{17}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[4\ \ 3\ \ 2\ \ -1]_{33};\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots C_2^{(1)};\end{array}$$

$$S^5\,..\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{28} & x'_2=x_{9}\\ x'_3=x_{12} & x'_4=-x_{17}\\ x'_5=x_{28} & x'_6=-x_{17}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[4\ \ 3\ \ 2\ \ -1^*]_{37}\\ \ldots -C_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)}\end{array}\Big\}\ K_4\,..\,K'_4;\ \mathfrak{r}_4,\ \mathfrak{R}_4;\ \varrho_4,\ P_4.$$

$(80\,a_1)$

$$II_{49-50}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{18} & x'_2=x_{15}\\ x'_3=x_{26} & x'_4=x_{23}\\ x'_5=x_{10} & x'_6=x_{7}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[-3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]_{9};\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots G_1^{(1)};\end{array}$$

$$S^5\,..\left\{\begin{array}{ll} x'_1=x_{22} & x'_2=-x_{19}\\ x'_3=x_{30} & x'_4=x_{27}\\ x'_5=-x_{14} & x'_6=-x_{11}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[3\ \ 1^*\ \ 2\ \ -4]_{11}\\ \ldots -G_1^{(2)}\ldots G_1^{(1)}\end{array}\Big\}\ K_5\,..\,K'_5;\ \mathfrak{r}_5,\ \mathfrak{R}_5;\ \varrho_5,\ P_5,$$

[1]

$$II_{51-52}\,A)\quad S\ldots\left\{\begin{array}{ll} x'_1=-x_{20} & x'_2=-x_{17}\\ x'_3=-x_{28} & x'_4=-x_{25}\\ x'_5 — -x_{12} & x'_6=x_{9}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\ldots[4\ \ 3\ \ -2\ \ 1]_{16};\\ \ldots -G_2^{(2)}\ldots G_2^{(1)};\end{array}$$

$(80\,a_2)$

1) Dieses Beispiel ist in § 50 unter 14 A) ausführlich behandelt.

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = -x_{24} & x'_4 = -x_{29} \\ x'_5 = x_8 & x'_6 = -x_{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [4\ -3\ 2\ 1^*]_{19} \\ \ldots -G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)} \end{array} \Big\} K_6 \ldots K'_6;\ \mathfrak{r}_6, \mathfrak{R}_6;\ \varrho_6, P_6. \quad (80\,a_2)$$

$$II_{53-54}\ A)\ S \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = x_{29} \\ x'_5 = x_8 & x'_6 = x_{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [-2\ 4\ 3\ 1]_9; \\ \ldots -C_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)}; \end{array}$$

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{22} & x'_2 = -x_{19} \\ x'_3 = -x_{30} & x'_4 = -x_{27} \\ x'_5 = -x_{14} & x'_6 = x_{11} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ 1\ -4\ 3]_{16} \\ \ldots -B_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)} \end{array} \Big\} K_7 \ldots K'_7;\ \mathfrak{r}_7, \mathfrak{R}_7;\ \varrho_7, P_7,$$

$$II_{55-56}\ A)\ S \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{20} & x'_2 = -x_{17} \\ x'_3 = x_{28} & x'_4 = x_{25} \\ x'_5 = -x_{12} & x'_6 = -x_9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ 4\ 3\ -1^*]_{11}; \\ \ldots -C_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)}; \end{array} \quad (80\,a_3)$$

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{18} & x'_2 = x_{15} \\ x'_3 = -x_{26} & x'_4 = -x_{23} \\ x'_5 = x_{10} & x'_6 = -x_7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ -1^*\ 4\ 3]_{19} \\ \ldots -B_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)} \end{array} \Big\} K_8 \ldots K'_8;\ \mathfrak{r}_8, \mathfrak{R}_8;\ \varrho_8, P_8.$$

$$II_{57-58}\ A)\ S \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{20} & x'_2 = x_{17} \\ x'_3 = x_{28} & x'_4 = x_{25} \\ x'_5 = x_{12} & x'_6 = x_9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ 4\ -3\ 1]_9; \\ \ldots -B_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)}; \end{array}$$

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{22} & x'_2 = x_{19} \\ x'_3 = -x_{30} & x'_4 = -x_{27} \\ x'_5 = x_{14} & x'_6 = -x_{11} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ 1^*\ 4\ -3]_{19} \\ \ldots -C_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)} \end{array} \Big\} K_9 \ldots K'_9;\ \mathfrak{r}_9, \mathfrak{R}_9;\ \varrho_9, P_9,$$

$$II_{59-60}\ A)\ S \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = x_{16} & x'_2 = -x_{21} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = x_{29} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = -x_{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [2\ -4\ 3\ 1^*]_{11}; \\ \ldots -B_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)}; \end{array} \quad (80\,a_4)$$

$$S^5 \ldots \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = -x_{18} & x'_2 = -x_{15} \\ x'_3 = -x_{26} & x'_4 = -x_{23} \\ x'_5 = -x_{10} & x'_6 = x_7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ldots [-2\ 1\ 4\ 3]_{16} \\ \ldots -C_2^{(2)} \ldots B_2^{(1)} \end{array} \Big\} K_{10} \ldots K'_{10};\ \mathfrak{r}_{10}, \mathfrak{R}_{10};\ \varrho_{10}, P_{10}.$$

II_{41-60}B) 20 sechszählige uneigentliche Correlationen.

Die zugehörigen Substitutionen ergeben sich aus denjenigen in $(80\,a_1)$... $(80\,a_4)$), wenn den beiden zusammensetzenden Substitutionen die gleichen Vorzeichen ertheilt werden. Dieselben sind in den 1200 in § 50 unter 14 B) betrachteten Substitutionen enthalten. Für die je zweien zusammengehörigen Substitutionen S und S^5 entsprechenden sechszähligen uneigentlichen Correlationen hat das Haupttetraeder die früher angegebene Beschaffenheit; das reelle Ecken- (Ebenen-) Paar ist durch zwei Punkte $\mathfrak{P}$ (Ebenen Π) (vgl. § 43 unter 3b)) gebildet, welche der reellen Kante K angehören, während die beiden imaginären Ecken $\mathfrak{c}_0 \ldots \mathfrak{c}'_0$ (Ebenen $\gamma'_0 \ldots \gamma$), welche der andern reellen Kante K' angehören, dieselben sind, wie für die entsprechenden

sechszähligen uneigentlichen Collineationen II_{41-60} A). Den Potenzen S^2 und S^4 entsprechen die dreizähligen axialen Collineationen I_{17-36}, der Potenz S^3 eine Polar-Correlation II_{1-10}B) mit einer Basisfläche $F^{(2)}$. Die Ausdrücke für die beiden imaginären Kantenpaare $|\,\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{c}_0\,| = |\,\Pi_k\,\gamma'_0\,|$, die Gleichungen für den Complex Ω'', die beiden festbleibenden Gewinde C', C'', die Flächen G_1, G_2 und die Kernflächen K_1, K_2 ergeben sich leicht aus den früher (§ 8 III unter 2) und § 9 II B) unter 1)) aufgestellten Formeln.

Die Anordnung der 2 . 10 = 20 Substitutionen II_{41-60}B) entspricht vollständig derjenigen der Substitutionen II_{41-60}A) in (80a_1) (80a_4); die Coordinaten für die Punktpaare $\mathfrak{P}_i$ (die Ebenenpaare Π_k), welche bezw. den Kanten $K_1 \ldots K_4$ ($K'_1 \ldots K'_4$), K_5 und K_6 (K'_5 und K'_6) und $K_7 \ldots K_{10}$ ($K'_7 \ldots K'_{10}$) angehören, sind aus den in § 41 unter (41f, g), (41k) und (41n) aufgestellten Werthen zu entnehmen.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} II_{51-52}\,B)\; S \ldots \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_{20} & x'_2 = -x_{17} \\ x'_3 = x_{28} & x'_4 = -x_{25} \\ x'_5 = x_{12} & x'_6 = x_9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \overline{[4\;3\;-2\;1]}_{16}; \\ \ldots G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}; \end{array} \\[2ex] \qquad S^5 \,.\,.\, \left\{\begin{array}{ll} x'_1 = -x_{16} & x'_2 = x_{21} \\ x'_3 = x_{24} & x'_4 = -x_{29} \\ x'_5 = -x_8 & x'_6 = -x_{13} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \overline{[4\;-3\;2\;1^*]}_{19} \\ \ldots G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}. \end{array} \end{array}\right\} \text{(80b)}$$

Dieses Beispiel ist ausführlich in § 50 unter 14 B) 2) behandelt worden.

In den beiden nachfolgenden Tabellen (81A) und (81B) sind ähnlich, wie in den Tabellen (70A) und (70B) des § 49 die sämmtlichen uneigentlichen Collineationen und Correlationen übersichtlich zusammengestellt unter Angabe der Substitutionen, welche auf jedes der 15 Polartetraeder entfallen.

Substitutionen:	T_1	T_2, T_3	T_9, T_{11}, T_{16}, T_{19}	T_{35} T_{26} T_{24} T_{33} T_{47} T_{38} T_{44} T_{37}	Nummer der Collineationen und Correlationen:	Summe:
$-B_1^{(2)} \ldots B_1^{(1)}$	2centr.(P.C.) 2 4-zähl.	—	—	—	$II_{5,\,6}$, $II_{13,\,14}$	4
$-C_1^{(2)} \ldots C_1^{(1)}$ (S, S^2 bez. mit S^2, S)	—	2centr.(P.C.) 2 4-zähl.	—	—	II_{7-10}, $II_{11,\,12;\;15,\,16}$	8
$-G_1^{(2)} \ldots G_1^{(1)}$ $-G_2^{(2)} \ldots G_2^{(1)}$	—	—	1centr.(P.C.) 1 6-zähl.	—	II_{1-4}, II_{49-52}	8
$-C_2^{(2)} \ldots G_{1,2}^{(1)}$ oder $-G_{1,2}^{(2)} \ldots C_1^{(1)}$	—	—	—	1 4-zähl. 1 6-zähl.	$II_{17,\,18;\;27-30;\;39,\,40}$ II_{41-48}	16
$-B_2^{(2)} \ldots G_{1,2}^{(1)}$ oder: $-G_{1,2}^{(2)} \,.\,.\, B_2^{(1)}$	—	—	—	2 4-zähl.	$II_{19-26;\;31-38}$	16
$-B_2^{(2)} \ldots C_2^{(1)}$ oder: $-C_2^{(2)} \,.\,.\, B_2^{(1)}$	—	—	2 6-zähl.	—	II_{53-60}	8

(81A)

Auf je ein Tetraeder T_i entfallen:	Centrische Involutionen (Polar-Correlationen):	Vierzählige Collineationen (Correlationen)	Sechszählige Collineationen (Correlationen)
T_1	2	2	—
T_2, T_3	2	2	—
T_9, T_{11}, T_{16}, T_{19}	1	—	$1+2=3$
T_{35}, T_{26}, T_{24}, T_{33} / T_{47}, T_{38}, T_{44}, T_{37}	—	$1+2=3$	1 .

(81B)

3) Bezieht man die im Vorstehenden betrachtete Raumfigur auf das Tetraeder $T^{(0)}$ (vergl. ($72\iota_1$)) als Coordinatentetraeder unter Anwendung der Transformationsformeln:[1])

$$\left.\begin{aligned} z_1^{(0)} &= z_2+z_4 \\ z_2^{(0)} &= z_1+z_3 \\ z_3^{(0)} &= z_2-z_4 \\ z_4^{(0)} &= z_1-z_3 \end{aligned}\right\} (82\alpha), \qquad \left.\begin{aligned} z_1 &= z_2^{(0)}+z_4^{(0)} \\ z_2 &= z_1^{(0)}+z_3^{(0)} \\ z_3 &= z_2^{(0)}-z_4^{(0)} \\ z_4 &= z_1^{(0)}-z_3^{(0)} \end{aligned}\right\} (82\alpha'),$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)} &= -x_1 & x_2^{(0)} &= -x_6 \\ x_3^{(0)} &= x_3 & x_4^{(0)} &= x_4 \\ x_5^{(0)} &= -x_5 & x_6^{(0)} &= -x_2 \end{aligned}\right\} (82\beta), \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= -x_1^{(0)} & x_2 &= -x_6^{(0)} \\ x_3 &= x_3^{(0)} & x_4 &= x_4^{(0)} \\ x_5 &= -x_5^{(0)} & x_6 &= -x_2^{(0)} \end{aligned}\right\} (82\beta'),$$

so ergeben sich folgende Werthe für die Coordinaten der Eckpunkte und Ebenen der 5 Polartetraeder $T^{(0)} \ldots T^{(4)}$:

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{L}_1 \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \lambda_1 \\ \mathfrak{L}_2 \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \lambda_2 \\ \mathfrak{L}_3 \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \lambda_3 \\ \mathfrak{T}_0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \tau_0 \end{array}\right\} \ldots T^{(0)} \qquad \left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{L}_4 \ldots & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_4 \\ \mathfrak{L}_5 \ldots & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_5 \\ \mathfrak{L}_6 \ldots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_6 \\ \mathfrak{T}_1 \ldots & \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{4} & \ldots \tau_1 \end{array}\right\} \ldots T^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{L}_7 \ldots & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_7 \\ \mathfrak{L}_8 \ldots & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_8 \\ \mathfrak{L}_9 \ldots & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_9 \\ \mathfrak{T}_2 \ldots & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{4} & \ldots \tau_2 \end{array}\right\} \ldots T^{(2)} \qquad \left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{L}_{10} \ldots & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{10} \\ \mathfrak{L}_{11} \ldots & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{11} \\ \mathfrak{L}_{12} \ldots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{12} \\ \mathfrak{T}_3 \ldots & -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{4} & \ldots \tau_3 \end{array}\right\} \ldots T^{(3)}$$

(83α)

[1]) Als Collineation aufgefasst bedeutet diese Transformation eine hyperbolisch-geschaarte Involution mit dem Axenpaar d_0: $0 \quad 1 \quad \pm i\sqrt{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1$ (vergl. § 17 unter A 1)).

$$\left.\begin{array}{lccccl} \mathfrak{L}_{13} \ldots & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{13} \\ \mathfrak{L}_{14} \ldots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{14} \\ \mathfrak{L}_{15} \ldots & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \ldots \lambda_{15} \\ \mathfrak{T}_4 \ldots & \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{4} & \ldots \tau_4 \end{array}\right| \ldots T^{(4)} \ldots (83\alpha)$$

Die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{R}$, der Ebenen ϱ, P, der Geraden K, l u. s. w. für dies neue System ergeben sich leicht; so z. B. erhält man für die Punkte $\mathfrak{r}$ (Ebenen ϱ) (vgl. (72δ))

$$\begin{array}{lccccl} \mathfrak{r}_1 \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \varrho_1 \\ \mathfrak{r}_2 \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \varrho_2 \\ \mathfrak{r}_3 \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \varrho_3 \\ \mathfrak{r}_4 \ldots & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \ldots \varrho_4 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{lccccl} \mathfrak{r}_5 \ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \varrho_5 \\ \mathfrak{r}_6 \ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \varrho_6 \\ \mathfrak{r}_7 \ldots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ldots \varrho_7 \\ \mathfrak{r}_8 \ldots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ldots \varrho_8 \\ \mathfrak{r}_9 \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \varrho_9 \\ \mathfrak{r}_{10} \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \varrho_{10} \end{array}\right| \ldots (83\beta)$$

u. s. f.

Stellt man die 120 Substitutionen $\mathrm{I}_{1-60}\mathrm{A}$) und $\mathrm{II}_{1-60}\mathrm{A}$) (und ebenso die den eigentlichen und uneigentlichen Correlationen entsprechenden Substitutionen $\mathrm{I}_{1-60}\mathrm{B}$) und $\mathrm{II}_{1-60}\mathrm{B}$)) in diesen neuen Coordinaten dar, so ergiebt sich das interessante und für weitere Anwendungen wichtige Resultat, dass auf jedes der 5 Polartetraeder $T^{(0)} \ldots T^{(4)}$ 12 Substitutionen, welche eigentlichen Collineationen (Correlationen) entsprechen und 12 Substitutionen, welche uneigentlichen Collineationen (Correlationen) entsprechen, entfallen.

In der folgenden Tabelle (82a_1) ... (82a_5) sind die den Collineationen entsprechenden Substitutionen für das alte und neue System mit Benutzung der vorher gegebenen Nummern vollständig aufgeführt. Bei den Substitutionen für die Tetraeder $T^{(0)} \ldots T^{(4)}$ bleibt das vierte Element $\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_4$ fest, die drei positiven Permutationen der drei ersten Elemente, versehen mit den 4 positiven Vorzeichen-Combinationen liefern die eigentlichen,

die drei negativen Permutationen mit den 4 positiven V. Z. Combinationen die **uneigentlichen** Collineationen. Analoges gilt für die den Correlationen entsprechenden Substitutionen.

Substitutionen für T_i:	Substitutionen für $T^{(k)}$:	Nummer der eigentlichen Collineation:	Substitutionen für T_i:	Substitutionen für $T^{(k)}$:	Nummer der uneigentlichen Collineation:	
$[1\ 2\ 3\ 4]_{1}$	$[1\ 2\ 3\ 4]^{(0)}$	I_1 A) Identität	$[1\ -2\ 3\ 4]_{1}$	$[-3\ 2\ -1\ 4]^{(0)}$	II_5 A) Centr. Inv.	
$[-3\ 4\ -1\ 2]_{1}$	$[1\ -2\ -3\ 4]^{(0)}$	I_2 A) gesch. Inv.	$[1\ 2\ 3\ -4]_{1}$	$[3\ 2\ 1\ 4]^{(0)}$	II_6 A) „ „	
$[1\ -2\ 3\ -4]_{1}$	$[-1\ 2\ -3\ 4]^{(0)}$	I_3 A) „ „	$[3\ -4\ 1\ 2]_{1}$	$[3\ -2\ -1\ 4]^{(0)}$	II_{13} A) 4-zähl. Coll.	
$[-3\ -4\ -1\ -2]_{1}$	$[-1\ -2\ 3\ 4]^{(0)}$	I_4 A) „ „	$[3\ 4\ 1\ -2]_{1}$	$[-3\ -2\ 1\ 4]^{(0)}$	II_{14} A) „ „	
$[3\ -4\ -1\ 2]_{2}$	$[-3\ 1\ -2\ 4]^{(0)}$	I_{17} A) 3-zähl. ax.	$[3\ 4\ -1\ 2]_{2}$	$[2\ 1\ 3\ 4]^{(0)}$	II_7 A) Centr. Inv.	
$[-1\ -2\ 3\ 4]_{2}$	$[-3\ -1\ 2\ 4]^{(0)}$	I_{19} A) „ „	$[-1\ 2\ 3\ 4]_{2}$	$[-2\ -1\ 3\ 4]^{(0)}$	II_8 A) „ „	(82 a_1)
$[3\ 4\ -1\ -2]_{2}$	$[3\ 1\ 2\ 4]^{(0)}$	I_{21} A) „ „	$[1\ 2\ -3\ 4]_{2}$	$[2\ -1\ -3\ 4]^{(0)}$	II_{15} A) 4-zähl. Coll.	
$[1\ -2\ -3\ 4]_{2}$	$[3\ -1\ -2\ 4]^{(0)}$	I_{23} A) „ „	$[-3\ 4\ 1\ 2]_{2}$	$[-2\ 1\ -3\ 4]^{(0)}$	II_{16} A) „ „	
$[-4\ -3\ 2\ 1]_{3}$	$[2\ -3\ -1\ 4]^{(0)}$	I_{18} A) „ „	$[-4\ 3\ 2\ 1]_{3}$	$[1\ -3\ -2\ 4]^{(0)}$	II_9 A) Centr. Inv.	
$[-2\ -1\ 4\ 3]_{3}$	$[-2\ 3\ -1\ 4]^{(0)}$	I_{20} A) „ „	$[-2\ 1\ 4\ 3]_{3}$	$[1\ 3\ 2\ 4]^{(0)}$	II_{10} A) „ „	
$[2\ -1\ -4\ 3]_{3}$	$[2\ 3\ 1\ 4]^{(0)}$	I_{22} A) „ „	$[4\ 3\ -2\ 1]_{3}$	$[-1\ -3\ 2\ 4]^{(0)}$	II_{11} A) 4-zähl. Coll.	
$[4\ -3\ -2\ 1]_{3}$	$[-2\ -3\ 1\ 4]^{(0)}$	I_{24} A) „ „	$[2\ 1\ -4\ 3]_{3}$	$[-1\ 3\ -2\ 4]^{(0)}$	II_{12} A) „ „	
$[3\ -1\ -2\ 4]_{9}$	$[-3\ -1\ 2\ 4]^{(1)}$	I_5 A) gesch. Inv.	$[3\ 1\ -2\ 4]_{9}$	$[-2\ -1\ 3\ 4]^{(1)}$	II_1 A) Centr. Inv.	
$[-3\ -1\ 2\ 4]_{9}$	$[3\ -1\ -2\ 4]^{(1)}$	I_{25} A) 3-zähl. ax.	$[-3\ 1\ 2\ 4]_{9}$	$[2\ -1\ -3\ 4]^{(1)}$	II_{49} A) 6-zähl. Coll.	
$[2\ 4\ -3\ -1]_{9}$	$[-3\ 1\ -2\ 4]^{(1)}$	I_{45} A) 5-z. allgem.	$[-2\ 4\ 3\ 1]_{9}$	$[2\ 1\ 3\ 4]^{(1)}$	II_{53} A) „ „	
$[2\ -4\ -3\ 1]_{9}$	$[3\ 1\ 2\ 4]^{(1)}$	I_{57} A) „ „	$[2\ 4\ -3\ 1]_{9}$	$[-2\ 1\ -3\ 4]^{(1)}$	II_{57} A) „ „	
$[3\ -1\ -2\ 4]_{35}$	$[-1\ -2\ 3\ 4]^{(1)}$	I_6 A) gesch. Inv.	$[-2\ 4\ 3\ 1]_{35}$	$[-3\ 2\ -1\ 4]^{(1)}$	II_{23} A) 4-zähl. Coll.	
$[-2\ -4\ 3\ 1]_{35}$	$[1\ 2\ 3\ 4]^{(1)}$	I_{30} A) 3-zähl. ax.	$[3\ 1\ -2\ 4]_{35}$	$[3\ -2\ -1\ 4]^{(1)}$	II_{29} A) „ „	(82 a_2)
$[3\ -1\ -2\ 4]_{35}$	$[-1\ 2\ -3\ 4]^{(1)}$	I_{37} A) 5-zähl. allg.	$[2\ 4\ -3\ 1]_{35}$	$[3\ 2\ 1\ 4]^{(1)}$	II_{37} A) „ „	
$[2\ -4\ -3\ 1]_{35}$	$[1\ -2\ -3\ 4]^{(1)}$	I_{43} A) „ „	$[-3\ 1\ 2\ 4]_{35}$	$[-3\ -2\ 1\ 4]^{(1)}$	II_{41} A) 6-zähl. Coll.	
$[3\ -1\ -2\ 4]_{47}$	$[-2\ -3\ 1\ 4]^{(1)}$	I_7 A) gesch. Inv.	$[-2\ 4\ 3\ 1]_{47}$	$[1\ 3\ 2\ 4]^{(1)}$	II_{25} A) 4-zähl. Coll.	
$[-2\ -4\ 3\ 1]_{47}$	$[-2\ 3\ -1\ 4]^{(1)}$	I_{33} A) 3-zähl. ax.	$[2\ 4\ -3\ 1]_{47}$	$[-1\ 3\ -2\ 4]^{(1)}$	II_{31} A) „ „	
$[-3\ -1\ 2\ 4]_{47}$	$[2\ -3\ -1\ 4]^{(1)}$	I_{41} A) 5-zähl. allg.	$[-3\ 1\ 2\ 4]_{47}$	$[1\ -3\ -2\ 4]^{(1)}$	II_{39} A) „ „	
$[2\ -4\ -3\ 1]_{47}$	$[2\ 3\ 1\ 4]^{(1)}$	I_{53} A) „ „	$[3\ 1\ -2\ 4]_{47}$	$[-1\ -3\ 2\ 4]^{(1)}$	II_{42} A) 6-zähl. Coll.	
$[3\ 1^*\ 2\ 4]_{11}$	$[2\ -3\ -1\ 4]^{(2)}$	I_8 A) gesch. Inv.	$[3\ -1^*\ 2\ 4]_{11}$	$[1\ -3\ -2\ 4]^{(2)}$	II_2 A) Centr. Inv.	
$[-3\ 1^*\ -2\ 4]_{11}$	$[-2\ -3\ 1\ 4]^{(2)}$	I_{26} A) 3-zähl. ax.	$[3\ 1^*\ 2\ -4]_{11}$	$[-1\ -3\ 2\ 4]^{(2)}$	II_{50} A) 6-zähl. Coll.	
$[-2\ 4\ -3\ 1^*]_{11}$	$[2\ 3\ 1\ 4]^{(2)}$	I_{50} A) 5-zähl. allg.	$[2\ 4\ -3\ 1^*]_{11}$	$[-1\ 3\ -2\ 4]^{(2)}$	II_{55} A) „ „	
$[2\ 4\ 3\ 1^*]_{11}$	$[-2\ 3\ -1\ 4]^{(2)}$	I_{54} A) „ „	$[2\ -4\ 3\ 1^*]_{11}$	$[1\ 3\ 2\ 4]^{(2)}$	II_{59} A) „ „	
$[3\ 1\ 2\ 4]_{26}$	$[3\ -1\ -2\ 4]^{(2)}$	I_9 A) gesch. Inv.	$[2\ -4\ 3\ 1]_{26}$	$[2\ 1\ 3\ 4]^{(2)}$	II_{19} A) 4-zähl. Coll.	
$[2\ 4\ 3\ 1]_{26}$	$[-3\ 1\ -2\ 4]^{(2)}$	I_{31} A) 3-zähl. ax.	$[2\ 4\ 3\ -1]_{26}$	$[-2\ 1\ -3\ 4]^{(2)}$	II_{33} A) „ „	(82 a_3)
$[-3\ 1\ -2\ 4]_{26}$	$[-3\ -1\ 2\ 4]^{(2)}$	I_{40} A) 5-zähl. allg.	$[3\ 1\ 2\ -4]_{26}$	$[-2\ -1\ 3\ 4]^{(2)}$	II_{40} A) „ „	
$[-2\ 4\ -3\ 1]_{26}$	$[3\ 1\ 2\ 4]^{(2)}$	I_{47} A) „ „	$[3\ -1\ 2\ 4]_{26}$	$[2\ -1\ -3\ 4]^{(2)}$	II_{44} A) 6-zähl. Coll.	
$[3\ 1^*\ 2\ 4]_{38}$	$[1\ -2\ -3\ 4]^{(2)}$	I_{10} A) gesch. Inv.	$[2\ 4\ 3\ -1^*]_{38}$	$[-3\ 2\ -1\ 4]^{(2)}$	II_{21} A) 4-zähl. Coll.	
$[2\ -4\ 3\ -1^*]_{38}$	$[1\ 2\ 3\ 4]^{(2)}$	I_{35} A) 3-zähl. ax.	$[3\ 1^*\ 2\ -4]_{38}$	$[-3\ -2\ 1\ 4]^{(2)}$	II_{30} A) „ „	
$[-3\ 1^*\ -2\ 4]_{38}$	$[-1\ -2\ 3\ 4]^{(2)}$	I_{44} A) 5-zähl. allg.	$[2\ -4\ 3\ 1^*]_{38}$	$[3\ 2\ 1\ 4]^{(2)}$	II_{35} A) „ „	
$[2\ 4\ 3\ 1]_{38}$	$[-1\ 2\ -3\ 4]^{(2)}$	I_{59} A) „ „	$[3\ -1^*\ 2\ 4]_{38}$	$[3\ -2\ -1\ 4]^{(2)}$	II_{43} A) 6-zähl. Coll.	

Substitutionen für T_i:	Substitutionen für $T^{(k)}$:	Nummer der eigentlichen Collineation:	Substitutionen für T_i:	Substitutionen für $T^{(k)}$:	Nummer der uneigentlichen Collineation:	
$[4\;-3\;-2\;1]_{16}$	$[3\;1\;2\;4]^{(3)}$	$I_{11}A)$ gesch. Inv.	$[-4\;3\;2\;1]_{16}$	$[2\;1\;3\;4]^{(3)}$	$II_{3}A)$ Centr. Inv.	
$[-4\;-3\;2\;1]_{16}$	$[-3\;1\;-2\;4]^{(3)}$	$I_{27}A)$ 3-zähl. ax.	$[4\;3\;-2\;1]_{16}$	$[-2\;1\;-3\;4]^{(3)}$	$II_{51}A)$ 6-zähl. Coll.	
$[-2\;-1\;4\;3]_{16}$	$[3\;-1\;-2\;4]^{(3)}$	$I_{51}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;1\;-4\;3]_{16}$	$[-2\;-1\;3\;4]^{(3)}$	$II_{54}A)$ „ „	
$[2\;-1\;-4\;3]_{16}$	$[-3\;-1\;2\;4]^{(3)}$	$I_{60}A)$ „ „	$[-2\;1\;4\;3]_{16}$	$[2\;-1\;-3\;4]^{(3)}$	$II_{60}A)$ „ „	
$[-4\;-3\;2\;1]_{24}$	$[1\;2\;3\;4]^{(3)}$	$I_{12}A)$ gesch. Inv.	$[-4\;3\;2\;1]_{24}$	$[-3\;2\;-1\;4]^{(3)}$	$II_{17}A)$ 4-zähl. Coll.	
$[-2\;-1\;4\;3]_{24}$	$[-1\;-2\;3\;4]^{(3)}$	$I_{29}A)$ 3-zähl. ax	$[-2\;1\;4\;3]_{24}$	$[-3\;-2\;1\;4]^{(3)}$	$II_{26}A)$ „ „	(82a₄)
$[4\;-3\;-2\;1]_{24}$	$[-1\;2\;-3\;4]^{(3)}$	$I_{42}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;1\;-4\;3]_{24}$	$[3\;-2\;-1\;4]^{(3)}$	$II_{36}A)$ „ „	
$[2\;-1\;-4\;3]_{24}$	$[1\;-2\;-3\;4]^{(3)}$	$I_{46}A)$ „ „	$[4\;-3\;2\;1]_{24}$	$[3\;2\;1\;4]^{(3)}$	$II_{46}A)$ 6-zähl. Coll.	
$[4\;-3\;-2\;1]_{44}$	$[2\;3\;1\;4]^{(3)}$	$I_{13}A)$ gesch. Inv.	$[-2\;1\;4\;3]_{44}$	$[1\;-3\;-2\;4]^{(3)}$	$II_{20}A)$ 4-zähl. Coll.	
$[-2\;-1\;4\;3]_{44}$	$[2\;-3\;-1\;4]^{(3)}$	$I_{36}A)$ 3-zähl. ax.	$[4\;3\;-2\;1]_{44}$	$[-1\;3\;-2\cdot 4]^{(3)}$	$II_{27}A)$ „ „	
$[-4\;-3\;2\;1]_{44}$	$[-2\;3\;-1\;4]^{(3)}$	$I_{39}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;1\;-4\;3]_{44}$	$[-1\;-3\;2\;4]^{(3)}$	$II_{38}A)$ „ „	
$[2\;-1\;-4\;3]_{44}$	$[-2\;-3\;1\;4]^{(3)}$	$I_{56}A)$ „ „	$[-4\;3\;2\;1]_{44}$	$[1\;3\;2\;4]^{(3)}$	$II_{45}A)$ 6-zähl. Coll.	
$[4\;3\;2\;1^*]_{19}$	$[-2\;3\;-1\;4]^{(4)}$	$I_{14}A)$ gesch. Inv.	$[4\;3\;2\;-1^*]_{19}$	$[-1\;3\;-2\;4]^{(4)}$	$II_{4}A)$ Centr. Inv.	
$[-4\;3\;-2\;1^*]_{19}$	$[2\;3\;1\;4]^{(4)}$	$I_{28}A)$ 3-zähl. ax.	$[4\;-3\;2\;1^*]_{19}$	$[1\;3\;2\;4]^{(4)}$	$II_{52}A)$ 6-zähl. Coll.	
$[-2\;1^*\;-4\;3]_{19}$	$[-2\;-3\;1\;4]^{(4)}$	$I_{48}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;-1^*\;4\;3]_{19}$	$[1\;-3\;-2\;4]^{(4)}$	$II_{56}A)$ „ „	
$[2\;1^*\;4\;3]_{19}$	$[2\;-3\;-1\;4]^{(4)}$	$I_{55}A)$ „ „	$[2\;1^*\;4\;-3]_{19}$	$[-1\;-3\;2\;4]^{(4)}$	$II_{58}A)$ „ „	
$[4\;3\;2\;1]_{33}$	$[-3\;1\;-2\;4]^{(4)}$	$I_{15}A)$ gesch. Inv.	$[2\;-1\;4\;3]_{33}$	$[2\;-1\;-3\;4]^{(4)}$	$II_{22}A)$ 4-zähl. Coll.	
$[2\;1\;4\;3]_{33}$	$[3\;-1\;-2\;4]^{(4)}$	$I_{32}A)$ 3-zähl. ax.	$[4\;-3\;2\;1]_{33}$	$[2\;1\;3\;4]^{(4)}$	$II_{28}A)$ „ „	
$[-4\;3\;-2\;1]_{33}$	$[3\;1\;2\;4]^{(4)}$	$I_{43}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;1\;4\;-3]_{33}$	$[-2\;-1\;3\;4]^{(4)}$	$II_{32}A)$ „ „	(82a₅)
$[-2\;1\;-4\;3]_{33}$	$[-3\;-1\;2\;4]^{(4)}$	$I_{52}A)$ „ „	$[4\;3\;2\;-1]_{33}$	$[-2\;1\;-3\;4]^{(4)}$	$II_{47}A)$ 6-zähl. Coll.	
$[4\;3\;2\;1^*]_{37}$	$[-1\;2\;-3\;4]^{(4)}$	$I_{16}A)$ gesch. Inv.	$[4\;-3\;2\;1^*]_{37}$	$[3\;2\;1\;4]^{(4)}$	$II_{18}A)$ 4-zähl. Coll.	
$[-2\;1^*\;-4\;3]_{37}$	$[-1\;-2\;3\;4]^{(4)}$	$I_{34}A)$ 3-zähl. ax.	$[2\;1^*\;4\;-3]_{37}$	$[-3\;-2\;1\;4]^{(4)}$	$II_{24}A)$ „ „	
$[-4\;3\;-2\;1^*]_{37}$	$[1\;2\;3\;4]^{(4)}$	$I_{38}A)$ 5-zähl. allg.	$[2\;-1^*\;4\;3]_{37}$	$[3\;-2\;-1\;4]^{(4)}$	$II_{34}A)$ „ „	
$[2\;1^*\;4\;3]_{37}$	$[1\;-2\;-3\;4]^{(4)}$	$I_{58}A)$ „ „	$[4\;3\;2\;-1^*]_{37}$	$[-3\;2\;-1\;4]^{(4)}$	$II_{48}A)$ 6-zähl. Coll.	

Die auf das Tetraeder $T^{(0)}$ entfallenden Substitutionen $(82a_1)$ sind die 24 Tetraeder-Substitutionen, nämlich von eigentlichen Collineationen die Identität, drei geschaart-involutorische und acht dreizählig-axiale, von uneigentlichen Collineationen sechs centrisch-involutorische und sechs vierzählige Collineationen. Auf jedes der vier Polartetraeder $T^{(1)} \,..\, T^{(4)}$ entfallen $((82a_2) \,..\, (82a_5))$ von eigentlichen je drei geschaart-involutorische, je drei dreizählig-axiale und je sechs fünfzählig-allgemeine, von uneigentlichen Collineationen je eine centrisch-involutorische, je sechs vierzählige und je fünf sechszählige Collineationen. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Gruppe $G_{60}^{(c_1)}$ der eigentlichen Collineationen nicht, wie Maschke[1]) angiebt,

[1]) H. Maschke: The representation of finite groups American Journal of Mathemat. XVIII p. 156—188.

mit der Rotationsgruppe des Ikosaeders identisch ist, da die 24 fünfzähligen Collineationen für dieses axiale, für die hier betrachtete Raumfigur aber allgemeine fünfzählige Collineationen sind. Für die uneigentlichen Collineationen tritt der Unterschied noch deutlicher hervor.

§ 52.

Uebertragung der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ auf einen dreidimensionalen sphärischen Raum.

Die in den §§ 41—43 genauer untersuchte Cf. $(60_{15}, 72_5)$ lässt sich unter Anwendung des in den §§ 24—26 besprochenen Verfahrens der Centralprojection auf einen concentrischen dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 übertragen, analog wie die in jeder der 60 Ebenen B auftretende Figur eines sg. zehnfach Brianchon'schen Sechsecks durch Centralprojection auf eine concentrische Kugel übertragen werden kann. Aus den 60 Collineationen und 60 Correlationen, durch welche die ebene Figur eines solchen zehnfach Brianchon'schen Sechsecks in sich oder in die reciproke Figur übergeht, ergeben sich alsdann die 120 Collineationen und 120 Correlationen, durch welche die entsprechenden sphärischen (speciell regulären) Netze, welchen die Polyeder der (speciell regulären) Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe bez. ein- oder umgeschrieben sind, in sich übergeführt werden.[1]) Analog können nun (vgl. § 27—34) auch die sämmtlichen Collineationen und Correlationen, durch welche die durch die angegebene Centralprojection der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ auf S_3 entstehenden sphärischen Gewebe und die denselben ein- und umgeschriebenen Polytope (insbesondere für den Fall der Regelmässigkeit das reguläre Sechshundert-Zell und das reguläre Hundertundzwanzig-Zell) in sich übergehen, aus den in den §§ 46—49 aufgestellten Transformationen der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ unmittelbar erhalten werden. Für die specielle in § 51 betrachtete Gruppe erhält man dann die Transformationen für die Gruppe des regulären Fünfzells.

1) Bei der Centralprojection der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ auf einen concentrischen sphärischen Raum S_3 entsprechen den 60 Ebenen $B_1 \,..\, B_{60}$ 60 Hauptkugeln $\beta_1 \,..\, \beta_{60}$, welche sich (vgl. § 41 unter (4α) und (4β))

[1]) Vgl. E. Hess: Math. Ann. 28. S. 202 ff. und Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. der ges. Naturw. (Dezember 1894, S. 27—30).

zu je 15 in 60 Punkten 𝔟	und deren Gegenpunkten 𝔟′,		
„ 6 „ 360 (60+300) Punkten 𝔦 (𝔤+𝔣)	„ „ „	𝔦′ (𝔤′+𝔣′),	(83α)
„ 4 „ 600 (150+450) „ 𝔨 (𝔠+𝔢)	„ „ „	𝔨′ (𝔠′+𝔢′),	
„ 6 „ 300 „ 𝔡	„ „ „	𝔡′ ,	

nämlich den Projectionen der Punkte 𝔅, ℑ (𝔊+𝔉), 𝔎 (ℭ+𝔈), 𝔇 (§ 41 (4a)) schneiden und welche

zu je zweien durch 450 Hauptkreise b		
„ dreien „ 200 „ c		(83β)
„ fünfen „ 72 „ g,		

nämlich durch die Projectionen der Geraden B, C, G (§ 47 (4β)) hindurchgehen.

Auf jeder der 60 Hauptkugeln β entsteht die vollständige Figur eines sphärischen zehnfach Brianchon'schen Sechsecks, welche durch 15 Hauptkreise b, durch 10 Hauptkreise c und 6 Hauptkreise g gebildet wird; dieselben schneiden sich (vgl. § 41 unter (3))

zu je sechsen (2 Hauptkreise b, 2 Hauptkreise c, 2 Hauptkreise g)
in den 15 Punkten 𝔟 und deren Gegenpunkten 𝔟′,
zu je fünfen (5 Hauptkreise b)
in den 6 Punkten 𝔤 und deren Gegenpunkten 𝔤′,
zu je dreien (3 Hauptkreise b)
in den 10 Punkten 𝔠 und deren Gegenpunkten 𝔠′,
zu je dreien (1 Hauptkreis b, 2 Hauptkreise c) (83γ)
in den 30 Punkten 𝔡 und deren Gegenpunkten 𝔡′,
zu je zweien (1 Hauptkreis b, 1 Hauptkreis c)
in den 30 Punkten 𝔢 und deren Gegenpunkten 𝔢′,
zu je zweien (1 Hauptkreis b, 1 Hauptkreis g)
in den 30 Punkten 𝔣 und deren Gegenpunkten 𝔣′.

(Man vergleiche die stereographische Projection dieser sphärischen Figur in **Fig.** 8, welche dem gleich zu erwähnenden und hier vorzugsweise in Betracht kommenden Falle der Regelmässigkeit entspricht; die Schnittpunkte sind hier, wie in der ebenen Figur, durch grosse lateinische Buchstaben B, G, C, D, E, F bezeichnet, wobei dieselben nach einer anderen als der in (1α) . . (1(ϑ), (5), (6), (7) in § 41 benutzten Reihenfolge nummerirt sind;

die Hauptkreise b sind schwach, die Hauptkreise c stark ausgezogen und die Hauptkreise g gestrichelt.)[1])

2) Der specielle Fall der Regelmässigkeit, in welchem alle 75 sphärischen Polartetraeder (vgl. § 41 unter T_I und T_{II}) orthogonal werden (d. h. solche, deren Seitenflächen Kugeloktanten sind) und die sphärische Figur jeder Hauptkugel in ein vollständiges reguläres zehnfach Brianchon'sches Sechseck übergeht, tritt ein, sobald die drei sphärischen Polartetraeder T_1, T_2, T_3 orthogonal sind und in jeder der 12 Hauptkugeln $\beta_1 \ldots \beta_{12}$ auf den vier Hauptkreisen c, welche ein sphärisches Quadrat mit den Eckpunkten $\mathfrak{d}$ von der Seite 60° bilden, die 60° betragenden Bogen durch Punkte $\mathfrak{b}$ (alle in demselben Sinne) nach dem goldenen Schnitte getheilt werden, so dass der Quotient der Sinus der beiden Theilbogen

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \operatorname{cotg} \varphi$$

wird; (vgl. Fig. 8, in welcher z. B. die Punkte B_6, B_4, B_{14}, bezw. die 60° betragenden Bogen D_{17} D_{15}, D_{15} D_6, D_6 D'_{29} nach dem angegebenen Verhältniss theilen).

Die 15 Hauptkreise b jeder Hauptkugel β theilen in diesem Falle dieselbe in abwechselnd congruente und symmetrisch gleiche rechtwinklige sphärische Dreiecke $\mathfrak{b}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{c}$, welche das Diakishexekontaeder-Netz[2]) bilden, dessen 6 Punkte $\mathfrak{g}$ nebst Gegenpunkten die Eckpunkte eines der Hauptkugel eingeschriebenen regulären Ikosaeders sind, während die 10 Punkte $\mathfrak{c}$ nebst Gegenpunkten die Eckpunkte eines eingeschriebenen regulären Pentagondodekaeders darstellen. Die Seiten und Winkel eines solchen Dreiecks $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{c}_1$ (vgl. Fig. 9)[3]) sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_1 = \psi & \mathfrak{b}_1\,\widehat{\mathfrak{g}_1}\,\mathfrak{c}_1 = 36^0 \\ \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{g}_1 = \varphi & \mathfrak{g}_1\,\widehat{\mathfrak{c}_1}\,\mathfrak{b}_1 = 60^0 \\ \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{c}_1 = \chi = 90^0-(\varphi+\chi) & \mathfrak{c}_1\,\widehat{\mathfrak{b}_1}\,\mathfrak{g}_1 = 90^0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (83\delta)$$

Jedes dieser 120 Dreiecke wird durch je zwei Hauptkreise c und je einen Hauptkreis g in vier rechtwinklige Dreiecke

1) Diese Figur ist mit der **Fig. 29** in des Verf. „Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung" übereinstimmend.

2) Vgl. E. Hess: Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. § 28.

3) Die kleinen und grossen lateinischen Buchstaben in den Fig. **9** bis Fig. **13** entsprechen wiederum bez. den kleinen und grossen deutschen Buchstaben des Textes.

$$\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{f}_1;\quad \mathfrak{f}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{d}_1;\quad \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{e}_1 \text{ und } \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{e}_1\ \mathfrak{g}_1$$

(Fig. **9**) zerlegt, welche als Seitenflächen des hier in Betracht kommenden Elementartetraeders auftreten und deren Elemente die folgenden sind:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{b}_1 = \psi & \mathfrak{b}_1\ \widehat{\mathfrak{f}_1}\ \mathfrak{c}_1 = 90^0 \\
\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{f}_1 = 18^0 & \mathfrak{f}_1\ \widehat{\mathfrak{c}_1}\ \mathfrak{b}_1 = 60^0 \\
\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{c}_1 = \varphi - \psi & \mathfrak{c}_1\ \widehat{\mathfrak{b}_1}\ \mathfrak{f}_1 = \varphi
\end{array}\right\};
\quad
\left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{b}_1 = 18^0 & \mathfrak{b}_1\ \widehat{\mathfrak{d}_1}\ \mathfrak{f}_1 = \eta \\
\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{d}_1 = \zeta - 30^0 & \mathfrak{d}_1\ \widehat{\mathfrak{f}_1}\ \mathfrak{b}_1 = 90^0 \\
\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{f}_1 = 45^0 - \varphi & \mathfrak{f}_1\ \widehat{\mathfrak{b}_1}\ \mathfrak{d}_1 = \chi
\end{array}\right\} \\
\left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{b}_1 = \zeta - 30^0 & \mathfrak{b}_1\ \widehat{\mathfrak{e}_1}\ \mathfrak{d} = 90^0 \\
\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{e}_1 = \psi & \mathfrak{e}_1\ \widehat{\mathfrak{d}_1}\ \mathfrak{b}_1 = 180^0 - 2\eta \\
\mathfrak{e}_1\ \mathfrak{d}_1 = 60^0 - \zeta & \mathfrak{d}_1\ \widehat{\mathfrak{b}_1}\ \mathfrak{e}_1 = \psi
\end{array}\right\};
\quad
\left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{e}_1 = 60^0 - \zeta & \mathfrak{e}_1\ \widehat{\mathfrak{g}_1}\ \mathfrak{d}_1 = 36^0 \\
\mathfrak{e}_1\ \mathfrak{g}_1 = \varphi - \psi & \mathfrak{g}_1\ \widehat{\mathfrak{d}_1}\ \mathfrak{e}_1 = \eta \\
\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{d}_1 = 45^0 - \varphi & \mathfrak{d}_1\ \widehat{\mathfrak{e}_1}\ \mathfrak{g}_1 = 90^0.
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \quad (83\,\varepsilon)$$

Die auch schon früher aufgetretenen Winkel η und ζ sind durch die Relationen

$$\cos 2\eta = -\frac{1}{3},\quad \cos 2\zeta = -\frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83\zeta)$$

bestimmt.

3) Durch die 60 Hauptkugeln β wird der sphärische Raum S_3 in 14400 sphärische Elementartetraeder (einschliesslich der Gegenfiguren) getheilt mit je einem Eckpunkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{d}$, so dass um jeden der

120	Punkte	$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$	je	120	dieser	Elementartetraeder,	(83η)
720	„	$\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$	„	20	„	„ ,	
1200	„	$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$	„	12	„	„ ,	
600	„	$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$	„	24	„	„	

herumliegen.

Für den Fall der Regelmässigkeit sind die Elemente eines solchen Elementartetraeders unmittelbar aus denjenigen der vier rechtwinkligen Theildreiecke (Fig. **9**) zu entnehmen, wenn man noch berücksichtigt, dass in jedem der Hauptkreise g, c, b sich bezw. 5, 3, 2 Hauptkugeln β unter gleichen Winkeln 36°, 60°, 90° schneiden. Die Fig. **10** stellt eine schematische Zeichnung eines solchen Elementartetraeders $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}_0$ dar, in welcher die aufeinanderfallenden Eckpunkte der Fig. **9**, welche gleichsam das Netz eines solchen Tetraeders darstellt, angegeben sind. Die rechtwinkligen Coordinaten der Eckpunkte und der Seitenflächen (Hauptkugeln) β sind die in (83ϑ) aufgeführten; in (83ι) sind die Coordinaten der drei, der Ebene (Hauptkugel) β_4 angehörigen Punkte $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_1$ der Fig. **9** angegeben, welche bez. mit $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_0$ der Fig. **10** zusammenfallen.

$$\left.\begin{array}{llllll}
\mathfrak{b}_1 = (\beta_{16}\ \beta_3\ \beta_4) \ldots & 1 & 0 & 0 & 0\,, & \beta_{60} = [\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{f}_1\ \mathfrak{d}_0] \ldots \ -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \\
\mathfrak{c}_1 = (\beta_3\ \beta_4\ \beta_{60}) \ldots & \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0\,, & \\
\mathfrak{f}_1 = (\beta_4\ \beta_{60}\ \beta_{16}) \ldots & \frac{1}{2\sin\varphi} & \frac{\sin\varphi}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}{2} & 0\,, & \beta_{16} = [\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{d}_0\ \mathfrak{b}_1] \ldots \ 0 \quad -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \\
\mathfrak{d}_0 = (\beta_{60}\ \beta_{16}\ \beta_3) \ldots & \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}\,, & \begin{array}{l} \beta_3 \ldots [\mathfrak{d}_0\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1] \ldots \ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \beta_4 \ldots [\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{f}_1] \ldots \ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}
\end{array}\right\} \quad (83\vartheta)$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
\mathfrak{g}_1 \ldots & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\
\mathfrak{e}_1 \ldots & \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\
\mathfrak{d}_1 \ldots & \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0\,.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83\iota)$$

Die Elemente des sphärischen Elementartetraeders sind in übersichtlicher Zusammenstellung die folgenden (vgl. (83ε)):

Centriwinkel einer sphärischen Kante:	Hauptkreis:	Neigungswinkel der Hauptkugeln an dieser Kante:	
$\overline{\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1} = \psi$	b	$\beta_3 \widehat{\ } \beta_4 = 90^0$	(83ϰ)
$\overline{\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{d}_0} = 45^0 - \varphi$	b	$\beta_{60} \widehat{\ } \beta_{16} = 90^0$	
$\overline{\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{f}_1} = 18^0$	g	$\beta_4 \widehat{\ } \beta_{16} = 36^0$	
$\overline{\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_0} = 60^0 - \zeta$	c	$\beta_{60} \widehat{\ } \beta_3 = 60^0$	
$\overline{\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{d}_0} = \zeta - 30^0$	c	$\beta_{16} \widehat{\ } \beta_3 = 60^0$	
$\overline{\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{f}_1} = \varphi - \psi$	b	$\beta_{60} \widehat{\ } \beta_4 = 90^0.$	

Die Werthe für die Neigungswinkel der Hauptkreise sind unmittelbar aus (83ε) zu entnehmen.

Die Summe der vier Grenzflächen eines Elementartetraeders ist die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{g}_1$ in Fig. 9, d. h. sie beträgt den 120ten Theil einer Hauptkugel; für die Summe der Umfänge der 4 Grenzdreiecke ergiebt sich 186°. Die Excesse der vier sphärischen Ecken betragen

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{für die Ecken mit Scheitel } \mathfrak{b} & 90^0+60^0+36^0-180^0 = \ 6^0 = \frac{1}{120} & \text{Kugel,} \\
\text{,, ,, ,, ,, ,, } \mathfrak{c} & 90^0+90^0+60^0-180^0 = 60^0 = \frac{1}{12} & \text{,,}\ , \\
\text{,, ,, ,, ,, ,, } \mathfrak{f} & 90^0+90^0+36^0-180^0 = 36^0 = \frac{1}{20} & \text{,,}\ ; \\
\text{,, ,, ,, ,, ,, } \mathfrak{d} & 90^0+60^0+60^0-180^0 = 30^0 = \frac{1}{24} & \text{,,}\ ,
\end{array}\right\} \quad (83\lambda)$$

so dass als Summe der 4 Excesse 132° oder $\frac{11}{60}$ einer Hauptkugel resultirt. Auch hier (vgl. § 34 unter 4)) besteht keine einfache Relation, aus welcher sich das Volumen des sphärischen Tetraeders, welches hier $\frac{\pi^2}{7200}$ beträgt,

mittelst dieser Excesse bestimmen liesse. Für die (vergl. § 35 unter 2)) als Modulus des sphärischen Tetraeders bezeichnete Grösse ergiebt sich hier der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{d} &= \frac{\operatorname{tg}^2\varphi \sin\varphi}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sin 18^0}{2\sqrt{6}\cos^2 18^0}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83\mu)$$

4) Wenn die 24 um jeden der 600 Punkte b, b′ herumliegenden Elementartetraeder vereinigt werden, so resultirt ein durch 600 reguläre sphärische Tetraeder gebildetes sphärisches Zellgewebe, welches als reguläres Gewebe G_4 bezeichnet werden soll. Die Eckpunkte, Kanten-, Flächen- und Polyeder-Mittelpunkte sind bezw. die Punkte b, f, c, d nebst Gegenpunkten. Die sphärische Kante a_4, der Winkel A_4 zweier Hauptkreise und der Neigungswinkel $\mathfrak{A}_4$ des regulären Tetraeders betragen:

$$a_4 = 36^0,\ A_4 = 2\varphi,\ \mathfrak{A}_4 = 72^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84\alpha)$$

In der Fig. 8 stellt z. B. das sphärische Dreieck $B_1\ B_2\ B_3$ die Grenzfläche eines solchen regulären Tetraeders dar; die Kante wird durch den zehnten Theil eines Hauptkreises g gebildet.

Das diesem regulären Gewebe G_4 eingeschriebene Polytop ist das reguläre Sechshundertzell $\boldsymbol{P}_4$ (Hexakosiotop), dessen 120 Eckpunkte mit denjenigen des Gewebes G_4 übereinstimmen, während die Kanten, die regulären dreieckigen Flächen und die regulären tetraedrischen Grenzräume in einfachen Beziehungen zu den entsprechenden sphärischen Gebilden stehen.

Die Abstände r_k der Kanten, r_f der Seitenflächen, r_p der Grenzräume vom Mittelpunkte werden für den Eckradius $r_e = 1$

$$r_k = \frac{1}{2\sin\varphi},\quad r_f = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\varphi,\quad r_p = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{cotg}^2\varphi, \quad \ldots \quad (84\beta)$$

während für die Länge $\mathfrak{K}_4$ einer der 720 Kanten, für den Inhalt $\mathfrak{F}_4$ einer der 1200 Seitenflächen, für den Inhalt $\mathfrak{P}_4$ eines der 600 Tetraeder, sowie für den Inhalt $\mathfrak{R}_4$ eines der 600 Pentatope, welche durch Verbindung eines Tetraeders mit dem Mittelpunkte O entstehen, in den bezüglichen Maasseinheiten die Werthe resultiren:

$$\mathfrak{K}_4 = \operatorname{tg}\varphi,\ \mathfrak{F}_4 = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{4}\sqrt{3},\ \mathfrak{P}_4 = \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{6\sqrt{2}},\ \mathfrak{R}_4 = \frac{1}{96}\operatorname{tg}\varphi, \quad \ldots \quad (84\gamma)$$

sodass der „Umfang" (die Grenze) des Sechshundertzells $50\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^3\varphi$, der Inhalt desselben $\frac{25}{4}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ beträgt.[1])

5) Wenn in den 120 Eckpunkten des sphärischen Gewebes G_4 die den Raum S_3 berührenden Euklid'schen Räume construirt werden, so entsteht das dem Gewebe G_4 umgeschriebene reguläre Einhundertundzwanzig-Zell (Hekatonikosatop) P'_4. Die 600 Schnittpunkte, welche sich zu je zweien als Gegenpunkte entsprechen, dieser 120 Räume zu je vieren sind die Pole der tetraedrischen Grenzräume des eingeschriebenen Sechshundertzells in Beziehung auf S_3: die 1200 Kanten, in welchen sich je drei Räume unter gleichen Winkeln schneiden, entsprechen polar den regulär-dreieckigen Grenzflächen, die 720 regulär-fünfeckigen Grenzflächen den 720 Kanten des eingeschriebenen Sechshundertzells, die 120 Grenzräume endlich sind reguläre Pentagondodekaeder. Für die Abstände r'_e der Eckpunkte, r'_k der Kanten, r'_f der Seitenflächen und r'_p der Grenzräume vom Mittelpunkte erhält man (vgl. (84β)):

$$r'_e = \frac{1}{r_p} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi,\quad r'_k = \frac{1}{r_f} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi,\quad r'_f = \frac{1}{r_k} = 2\sin\varphi,\quad r'_p = \frac{1}{r_e} = 1;\quad \ldots (84\delta)$$

für die Grössen $\mathfrak{K}'_4$, $\mathfrak{F}'_4$, $\mathfrak{P}'_4$, $\mathfrak{R}'_4$ ergeben sich in den bezüglichen Maasseinheiten die Werthe:

$$\mathfrak{K}'_4 = 2\,\mathrm{tg}^4\varphi,\quad \mathfrak{F}'_4 = 5\,\mathrm{tg}^6\varphi\sin\varphi,\quad \mathfrak{P}'_4 = 4\sqrt{5}\,\mathrm{tg}^8\varphi,\quad \mathfrak{R}'_4 = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}^8\varphi,\quad \ldots\ldots (84\varepsilon)$$

so dass der Umfang des Einhundertundzwanzig-Zells $480\sqrt{5}\,\mathrm{tg}^8\varphi$, der Inhalt desselben $120\sqrt{5}\,\mathrm{tg}^8\varphi$ beträgt.[2]).

6) Aehnliche Betrachtungen, wie sie in § 34 unter 3) angestellt wurden, ergeben nun, dass durch die 600 Eckpunkte des regulären Einhundertundzwanzig-Zells P'_4 auf dem concentrischen Raume S'_3 mit dem Radius $r'_e = 2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi$ ein zugehöriges reguläres Gewebe G''_4 bestimmt ist, welchem P'_4 eingeschrieben ist. Dies Gewebe G''_4 ist durch 60 Hauptkugeln β' gebildet, von denen jede sechsmal 5 Eckpunkte eines Fünfecks von P'_4 und deren Gegenpunkte enthält, und setzt sich aus 120 regulären sphärischen Pentagondodekaedern zusammen. Die 60 Euklid'schen Räume durch O, welche den sphärischen Raum S'_3 in den 60 Hauptkugeln β' schneiden,

[1]) Vgl. R. Hoppe: Regelmässig linear begrenzte Räume von 4 Dimensionen. Archiv f. Math. und Phys. Bd. 67. S. 29—43 und E. Hess: Ueber reguläre Polytope höherer Art. A. a. O. [2]) Ibidem.

bestimmen auf dem concentrischen sphärischen Raume S_3 (vom Radius = 1), welcher das zuerst betrachtete Gewebe G_4 enthält, wiederum die 60 Hauptkugeln β. Dadurch wird auf S_3 ein zu G''_4 concentrisches reguläres Gewebe G'_4 bestimmt, welches das zu G_4 conjugirte Gewebe ist. Die Eckpunkte $\mathfrak{d}$ dieses conjugirten Gewebes G'_4 sind die Mittelpunkte der Polyeder des Gewebes G_4, die Kantenmittelpunkte $\mathfrak{k}$ von G'_4 die Flächenmittelpunkte von G_4, indem die Hauptkugeln des conjugirten Gewebes durch die Mittelpunkte der sich in einer Kante schneidenden Polyeder des ersten Gewebes senkrecht zu diesen Kanten hindurchgehen. Die Beziehung der beiden Gewebe G_4 und G'_4 ist wiederum eine gegenseitige: G_4 ist auch das conjugirte Gewebe zu G'_4, die Eckpunkte $\mathfrak{b}$ von G_4 sind also auch die Polyedermittelpunkte von G'_4 und die Kantenmittelpunkte $\mathfrak{i}$ von G_4 die Flächenmittelpunkte von G'_4. Dem Gewebe G_4 ist ein reguläres Polytop P_4 ein- (ein reguläres Polytop P'_4 um-) geschrieben, dem conjugirten G'_4 ist ein dem ersteren concentrisches Polytop P_4 um- (ein dem ersteren concentrisches Polytop P'_4 ein-) geschrieben.

Das reguläre Gewebe G'_4 resultirt hiernach einfach, wenn von den 14400 Elementartetraedern je 120 um einen Punkt $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) herumliegende vereinigt werden. Die sphärische Grenzfläche eines der 120 Pentagondodekaeder ist eins der in Fig. 8 auftretenden regulären Fünfecke (z. B. $D_1\ D_7\ D_{15}\ D_8\ D_2$ mit Kantenmittelpunkten E_3, E_7, E_8, E_4, E_1 und dem Mittelpunkte G_1) mit der sphärischen Kante $\alpha'_4 = 120^0 - 2\,\zeta$ und dem Hauptkreiswinkel $A'_4 = 2\,\eta$, während $\mathfrak{A}'_4 = 120^0$ ist.

Bedeutet für das dem Gewebe G'_4 umgeschriebene reguläre Polytop P_4 W_{p_4} den Neigungswinkel zweier in einer Fläche sich schneidenden Grenzpolyeder,
W_{f_4} „ „ „ benachbarten Seitenflächen,
W_{k_4} „ „ „ anstossenden Kanten einer Seitenfläche,
so ist

$$\left.\begin{aligned} W_{p_4} = 180^0 - \alpha'_4 = 60^0 + 2\,\zeta, \quad W_{f_4} = 180^0 - A'_4 = 180^0 - 2\,\eta, \\ W_{k_4} = 180^0 - 120^0 = 60^0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (84\zeta)$$

Analog folgt, wenn W'_{p_4}, W'_{f_4}, W'_{k_4} die entsprechenden Winkel für das dem Gewebe G_4 umgeschriebene reguläre Polytop P'_4 bedeuten, aus

(84α)[1])

$$\left.\begin{array}{c} W'_{p_4} = 180^0 - \alpha_4 = 144^0, \quad W'_{f_4} = 180^0 - A_4 = 180^0 - 2\,\varphi, \\ W'_{k_4} = 180^0 - 72^0 = 108^0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (84\eta)$$

7) Werden je 20 um einen der 720 Punkte i (i') herumliegende sphärische Elementartetraeder zusammengefasst, so entsteht ein *gleichzelliges* Gewebe, welches sich aus 720 congruenten fünfseitigen sphärischen Doppelpyramiden zusammensetzt und dessen Eckpunkte die 120 Punkte 𝔟 (𝔟') und die 600 Punkte 𝔡 (𝔡') sind. Die Basisfläche einer Doppelpyramide ist das reguläre sphärische Fünfeck, welches die Grenzfläche der regulären Pentagondodekaeder des Gewebes G'_4 bildet und dessen Kantenmittelpunkte die Punkte 𝔡 (𝔡') sind; die Spitzen sind durch zwei Punkte 𝔟 (𝔟') gebildet. Die Seitenfläche der Pyramide ist also ein gleichschenkliges Dreieck (z. B. $D_1\ D_2\ B_1$ in Fig. 8), dessen Basis $= 120^0 - 2\,\zeta$, dessen Schenkel $= \zeta - 30^0$ ist, während der Winkel an der Basis $180^0 - 2\,\eta$, der Winkel an der Spitze $2\,\psi$ beträgt. In jeder Basis-, wie in jeder Seitenkante, welche den Hauptkreisen c angehören, stossen drei Pyramiden aneinander, so dass in jedem Eckpunkt 𝔟 (𝔟') sich 12, in jedem Eckpunkt 𝔡 (𝔡') sich 6 Doppelpyramiden vereinigen. Man kann dies Gewebe als

$$\text{festes } (120_{12} + 600_6)\text{-eckiges } 720_{2+5}\text{-Zell} \quad \ldots\ldots \quad (84\vartheta)$$

bezeichnen, wobei die den Eckenzahlen beigefügten Indices die Zahl der in dem Eckpunkte sich vereinigenden Grenzpolyeder, die der Zellenzahl angehängten Indices die Anzahl der Eckpunkte des Grenzpolyeders angeben.

Diesem festen gleichzelligen Gewebe entspricht das feste *zugeordnete gleicheckige Gewebe*, dessen Eckpunkte die 720 Punkte i (i') sind, welches von 120 *regulären Ikosaedern* (mit den Mittelpunkten 𝔟 (𝔟')) und von 600 *regulären Oktaedern* (mit den Mittelpunkten 𝔡 (𝔡')) begrenzt wird und bei welchem in jeder Ecke sich zwei Ikosaeder und fünf Oktaeder vereinigen. Dies Gewebe ist als

$$\text{festes } (120_{12} + 600_6)\text{-zelliges } 720_{2+5}\text{-Eck} \quad \ldots\ldots \quad (84\vartheta')$$

zu bezeichnen. Diesem letzteren Gewebe ist ein festes gleicheckiges 720-Eck *ein-* und ein festes gleichzelliges 720-Zell *um*-geschrieben, deren Beschaffenheit sich aus den entsprechenden Zellgeweben (84ϑ') und (84ϑ)

[1]) Vgl. E. Hess a. a. O.

ergiebt. Dagegen lässt sich dem Gewebe (84ϑ) kein Polytop einschreiben, da die Eckpunkte des sphärischen Grenzpolyeders nicht auf einem Euklidschen Raume liegen, und ebensowenig lässt sich diesem Gewebe ein Polytop umschreiben.

8) Wenn endlich je 12 um einen der 1200 Punkte $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}'$) herumliegende sphärische Elementartetraeder zusammengefasst werden, so entsteht ein zweites gleichzelliges Gewebe, welches sich aus 1200 congruenten dreiseitigen sphärischen Doppel-Pyramiden zusammensetzt und dessen Eckpunkte wiederum die 600 Punkte $\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{d}'$) und die 120 Punkte $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) sind. Die Basisfläche einer Doppelpyramide ist das reguläre sphärische Dreieck, welches die Grenzfläche der regulären Tetraeder des Gewebes G_4 bildet (z. B. $B_1\ B_2\ B_3$ in Fig. 8) und dessen Kantenmittelpunkte die Punkte $\mathfrak{i}$ ($\mathfrak{i}'$) sind; die Spitzen sind durch zwei Punkte $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) gebildet. Die Seitenfläche der Pyramide ist also ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck (z. B. $B_1\ B_2\ D_1$ in Fig. 8), dessen Basis $= 36^0$, dessen Schenkel $= \zeta - 30^0$ ist, während der Winkel an der Basis 2φ, derjenige an der Spitze 2η beträgt. In jeder Basiskante stossen fünf, in jeder Seitenkante drei Pyramiden aneinander, so dass in jedem Eckpunkte $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) sich 30, in jedem Eckpunkte $\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{d}'$) sich 4 Doppelpyramiden vereinigen. Dies Gewebe ist als

festes $(120_{30} + 600_4)$-eckiges 1200_{3+2}-Zell (84ι)

zu bezeichnen; ihm entspricht das feste zugeordnete gleicheckige Gewebe, dessen Eckpunkte die 1200 Punkte $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}'$) sind, welches von 120 $(12+20)$-flächigen 30-Ecken (Pentagondodeka-Ikosaedern) mit den Mittelpunkten $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) und von 600 regulären Tetraedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{d}'$) begrenzt wird und bei welchem in jeder Ecke sich drei Dodeka-Ikosaeder und zwei reguläre Tetraeder vereinigen. Dies Gewebe ist als

festes $(120_{30} + 600_4)$-zelliges 1200_{3+2}-Eck . . . (84ι')

zu bezeichnen. Ihm ist ein festes gleicheckiges 1200-Eck ein-, ein festes gleichzelliges 1200-Zell um-geschrieben, deren Beschaffenheit aus den entsprechenden Zellgeweben (84ι') und (84ι) sich ergiebt.

9) Dem allgemeinen, durch die 60 Hauptkugeln β bestimmten Gewebe, welches als gleichzelliges

$(120_{2.60} + 720_{2.10} + 1200_{2.6} + 600_{2.12})$-eckiges $2.7200_{1+1+1+1}$-Zell . . . (85α)

bezeichnet werden kann, ist ein gleicheckiges Gewebe, welches als gleicheckiges

$(120_{2.60}+720_{2.10}+1200_{2.6}+600_{2.12})$-zelliges $2.7200_{1+1+1+1}$-Eck . . . (85α')

zu bezeichnen ist, zugeordnet. Dasselbe wird erhalten, wenn im Inneren eines der 14400 Elementartetraeder ein beliebiger Punkt 𝔓 angenommen wird und die diesem homologen Punkte für alle Tetraeder des gleichzelligen Gewebes construirt werden. Dies geschieht, indem von dem Punkte 𝔓 sphärische Perpendikel auf die Seitenflächen des einschliessenden Tetraeders gefällt und um sich selbst verlängert werden und alsdann die m derartigen Perpendikel, welche auf die m sich in einer Kante des gleichzelligen Gewebes schneidenden Hauptkugeln gefällt sind, durch eine Hauptkugel verbunden werden. Die Beschaffenheit des so erhaltenen gleicheckigen Gewebes (85α'), die Beziehungen seiner Elemente zu denjenigen des gleichzelligen (85α) ergeben sich hieraus ohne Schwierigkeit,[1]) ebenso die Eigenschaften des gleicheckigen Polytops, welches dem Gewebe (85α') ein- und des gleichzelligen Polytops, welches diesem Gewebe umgeschrieben ist. Diese gleicheckigen Gewebe und die ihnen zugehörigen Polytope sind im Allgemeinen dreifach veränderlich, sie gehen in zweifach veränderliche über, wenn der Punkt 𝔓 in einer der vier Seitenflächen des Elementartetraeders liegt, in einfach veränderliche, wenn 𝔓 auf einer der 6 Kanten liegt und endlich in feste (speciell reguläre), wenn 𝔓 mit einem der 4 Eckpunkte des Tetraeders zusammenfällt.[2]) Die Gesammtzahl der möglichen Fälle beträgt 15.

10) Bei der durch die 60 Hauptkugeln β bestimmten sphärischen Figur sind für die folgenden Betrachtungen noch einige weitere Punkte, Hauptkreise und Hauptkugeln zu berücksichtigen, welche Projectionen von Punkten, Geraden und Ebenen sind, die bereits bei der dreidimensionalen Cf. $(60_{15}, 72_5)$ bestimmt wurden.

Die Durchstossungspunkte der reellen Geraden (vgl. § 42 unter IV), V), VI)) $g^{(c)} = c^{(g)}$, $g^{(b)} = b^{(g)}$ und $c^{(b)} = b^{(c)}$ mit den 60 Ebenen B projiciren sich als die Schnittpunkte der entsprechenden Hauptkreise mit den

[1]) Vergl. E. Hess: Ueber regelmässige Eintheilungen u. s. w. Marburger Berichte 1895. S. 37 ffg.

[2]) Vgl. a. a. O. sowie die in Kürze erscheinende Fortsetzung dieser Betrachtungen.

60 Hauptkugeln β. Und zwar sind diese auf den 450 Hauptkreisen b liegenden Schnittpunkte

für die Hauptkreise $g^{(c)} = c^{(g)}$ die Halbirungspunkte $\mathfrak{b}_m$ der Bogen $\mathfrak{g}\,\mathfrak{c}$ oder ihrer Supplemente,

" " " $g^{(b)} = b^{(g)}$ " " $\mathfrak{c}_m$ der Bogen $\mathfrak{g}\,\mathfrak{b}$ oder ihrer Supplemente,

" " " $c^{(b)} = b^{(c)}$ " " $\mathfrak{g}_m$ der Bogen $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$ oder ihrer Supplemente

(vgl. Fig. **9** a) und Fig. **10**);

sie gruppiren sich also auf jeder Hauptkugel β (vgl. Fig. **8**) als die Eckpunkte bestimmter besonderer gleicheckiger Polyeder der Pentagon-Ikosaeder-Gruppe.[1])

Die Projectionen der Punkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{P}$ (vgl. § 43 unter 3)) sind bez. die Halbirungspunkte der Bogen $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{f}_1$ der Hauptkreise g und der Bogen $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{e}_3$ der Hauptkreise c; die Bogen-Abstände zweier aufeinander folgenden Punkte $\mathfrak{l}_i\,\mathfrak{l}_k$ und $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k$ betragen bez. 9° und 15° (vgl. Fig. **9** a)) und Fig. **10**).

Ausserdem übertragen sich alle der imaginären Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ angehörigen Elemente (imaginäre Punkte, Erzeugungslinien, Berührungs-Ebenen) in entsprechende imaginäre Gebilde (Punkte, Hauptkreise, Hauptkugeln) der unendlich fernen imaginären Kugel $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 26).

§ 53.

Transformationen der beiden regulären Gewebe G_4 und G'_4 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst.

Durch Anwendung der in den §§ 27—33 entwickelten Beziehungen erhält man nun (analog wie in den § 36, § 39, § 40), die Gesammtheit der Transformationen, durch welche die beiden regulären sphärischen Gewebe G_4 und G'_4 und die ihnen zugehörigen regelmässigen (und zum Theil regelmässigen) Polytope in sich übergehen, aus den in § 47—§ 50 aufgestellten Substitutionen der Gruppe G_{14400} (bez. $G^{(c)}_{7200}$), wenn der erläuterte Process der Uebertragung aus dem Raum R_3 in den sphärischen Raum S_3 vorgenommen wird. Die Zahl der Collineationen und der Correlationen wird dann

[1]) Vgl. E. Hess: Kugeltheilung S. 76.

wiederum die doppelte sowohl der in Tabelle (69 A) (§ 48) zusammengestellten eigentlichen, wie der in Tabelle (70 A) aufgeführten uneigentlichen Substitutionen.

Aus den angegebenen Punkten, Hauptkreisen, Hauptkugeln u. s. w., welche die einzelnen Bewegungen, Spiegelungen und dualistischen Umformungen charakterisiren, lassen sich wiederum die entsprechenden Geraden, Ebenen, Euklid'schen Räume u. s. w. des R_4 für die ein- oder umgeschriebenen Polytope gemäss den in § 33 aufgestellten Regeln leicht entnehmen.

Die bezüglichen Substitutionen in orthogonalen Coordinaten sind auch hier im Anschluss an die früheren Bezeichnungen und Nummern durch ein oder mehrere Beispiele erläutert.

$A^{(1)}$) Bewegungen (zwei- oder vier-fache Spiegelungen), den eigentlichen orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 28 I A).

$1\alpha_1$) Identische Transformation: $S = [1\ 2\ 3\ 4]_1$ (vgl. § 28 (96σ)),
$1\alpha_2$) Inversion (Spiegelung am Mittelpunkte O):
$S = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (vgl. § 28 (96a)).
(vgl. § 47 I A)).

$2\alpha_1$) 225 Umwendungen um je einen der 225 Hauptkreise b,
$2\alpha_2$) 225 „ „ „ „ „ 225 „ b'
(vgl. § 28 (96 c), (96 a) und § 47 2 A).

Beispiele zu $2\alpha_1$):	$S = [1\ 2\ -3\ -4]_1$:	Umwendung	um	1	$-i$	0	0	0	0
	$S = [1\ 2\ 3\ 4]_4$:	„	„	$\operatorname{cotg}\varphi$	$-i\operatorname{cotg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-i\operatorname{tg}\varphi$	1	$-i$
	$S = [2\ 1^*\ 4\ 3]_{74}$:	„	„	$\operatorname{tg}\varphi$	$2i$	-1	0	$\operatorname{cotg}\varphi$	0
„ zu $2\alpha_2$):	$S = [-1\ -2\ 3\ 4]_1$:	„	„	1	i	0	0	0	0
	$S = [-1\ -2\ -3\ -4]_4$:	„	„	$\operatorname{cotg}\varphi$	$i\operatorname{cotg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$i\operatorname{tg}\varphi$	1	i
	$S = [-2\ -1^*\ -4\ -3]_{74}$:	„	„	$\operatorname{tg}\varphi$	$-2i$	-1	0	$\operatorname{cotg}\varphi$	0.

$3\alpha_1$) und $3\alpha_2$) $2 . 30 = 60$ 4-zählige Doppeldrehungen, bei welchen die Gesammtheit der reellen Schraubenaxen eine lineare Congruenz bildet, deren Leithauptkreise zwei der 2 . 30 imaginären, sich selbst conjugirten Hauptkreise b_0 (vergl. § 42 III)) sind (vgl. § 28 unter d) und § 47 3 A)).

Beispiele

1) $S = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = b_{(\pm 90^0)}\ b'_{(\pm 90^0)} = b^{(g)}_{(90^0)}\ b^{(g)'}_{(-90^0)} = b^{(c)}_{(90^0)}\ b^{(c)'}_{(90^0)} = \dots$
$S^3 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = b_{(\mp 90^0)}\ b'_{(\mp 90^0)} = b^{(g)}_{(-90^0)}\ b^{(g)'}_{(90^0)} = b^{(c)}_{(-90^0)}\ b^{(c)'}_{(-90^0)} = \dots$

Imaginäre Leithauptkreise haben $\mathfrak{x}_i$-Coordinaten: 0 0 0 1 0 $\pm i$,

$S^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (Inversion). Vgl. die Beispiele zu 3 A), 10 A_2), 11 A_3) in § 47).

2) $S = [-1^*\ 2\ 3\ -4]_{66}$
$S^3 = [1^*\ -2\ -3\ 4]_{66}$ Imaginäre Leithauptkreise: $-\mathrm{tg}\,\varphi \pm 2\,i\,\mathrm{cotg}\,\varphi$ 0 $1 \pm 2\,i$ 0 $\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$ 0

(vgl. Beispiel zu 11 A_2) in § 47),

$S^2 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (Inversion).

$4\alpha_1$) 2 . 200 = 400 dreizählige einfache Drehungen um je einen der 200 Hauptkreise c (alle Punkte von c — der Büschelaxe — und die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{c}_0$ der reciproken Polaren c' — der Reihenaxe — bleiben fest) (vgl. § 28 unter $c\alpha$) Formeln (96π), (96ϱ) und § 47 unter 4 A)).

z. B. $S = [-4\ -3\ 2\ 1]_{16} = c_{(120^0)}$; $S^2 = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{19} = c_{(-120^0)}$,

wobei c . . . $\mathrm{cotg}\,\varphi$ $i\,\mathrm{cotg}\,\varphi$ 0 0 $\mathrm{tg}\,\varphi$ $-i\,\mathrm{tg}\,\varphi$ (Beispiel zu 4 A_3) in § 47).

$4\alpha_2$) 2 . 200 = 400 besondere sechszählige Doppeldrehungen (Drehung nebst Umwendung), nämlich Drehung von 60° oder −60° um c (c') und Umwendung um c' (c) (vgl. § 28 unter $c\beta$) Formeln (96χ)).

z. B. $S = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{19} = c_{(60^0)}\ c'_{(180^0)}$; $S^5 = [4\ 3\ -2\ -1]_{16} = c_{(-60^0)}\ c'_{(180^0)}$;

c wie in $4\alpha_1$); S^2 und S^4 sind die dreizähligen einfachen Drehungen, S^3 ist die Inversion.

$5\alpha_1$) 2 . 20 = 40 dreizählige, $5\alpha_2$) 2 . 20 = 40 sechszählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem der 20 imaginären Hauptkreispaare c_0 als Leithauptkreisen bilden und wobei die geraden Potenzen von S die dreizähligen Doppeldrehungen darstellen (vgl. § 28 unter dβ) (96h), (96l) und § 47 unter 5 A).

$$S = c_{(\pm 60^0)}\ c'_{(\pm 60^0)} = c^{(b)}_{(\pm 60^0)}\ c^{(b)'}_{(\pm 60^0)} = c^{(g)}_{(\pm 60^0)}\ c^{(g)'}_{(\pm 60^0)} = \dots$$

Beispiele:

1) $S = [-3\ 4\ -1^*\ 2]_{64} = c_{(60^0)}\ c'_{(60^0)} = \dots$, $S^2 = [-3\ -4\ 1^*\ 2]_{69} = c_{(120^0)}\ c'_{(120^0)} = \dots$
$S^5 = [3\ 4\ -1^*\ -2]_{69} = c_{(-60^0)}\ c'_{(-60^0)} = \dots$, $S^4 = [3\ -4\ 1^*\ -2]_{64} = c_{(-120^0)}\ c'_{(-120^0)} = \dots$
$S^3 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$; c_0 . . . $\sin\psi$ 0 $\pm i$ 0 $-\cos\psi$ 0 (vgl. § 47, 5 A_2)).

2) $S = [3\ 4\ -1^*\ -2]_{52} = c_{(60^0)}\ c'_{(-60^0)} = \dots$, $S^2 = [-3\ -4\ -1^*\ -2]_{58} = c_{(120^0)}\ c'_{(-120^0)} = \dots$
$S^5 = [3\ 4\ 1^*\ 2]_{58} = c_{(-60^0)}\ c'_{(60^0)} = \dots$, $S^4 = [-3\ -4\ 1^*\ 2]_{52} = c_{(-120^0)}\ c'_{(120^0)} = \dots$
$S^3 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$; c_0 . . . 0 $\sin\psi$ 0 $\pm i$ $\cos\psi$ 0 ,

wobei für beide Beispiele

$$\left\{\begin{matrix} c & \ldots & \operatorname{cotg}\varphi & i\operatorname{cotg}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{tg}\varphi & -i\operatorname{tg}\varphi \\ c' & \ldots & \operatorname{cotg}\varphi & -i\operatorname{cotg}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{tg}\varphi & i\operatorname{tg}\varphi \end{matrix}\right\}.$$

$6\alpha_1$) 4 . 72 = 288 fünfzählige einfache Drehungen um je einen der 288 Hauptkreise g (alle Punkte von g — der Büschelaxe — und die unendlich fernen imaginären Punkte $\mathfrak{g}_0$ der reciproken Polare g' — der Reihenaxe — bleiben fest) (vergl. § 26 unter cα) Formeln (96π), (96ϱ) und § 47 unter 6 A).

Beispiele:

$$\left.\begin{matrix} 1)\ S = [4\ 3\ 2\ 1]_{17} = g_{(72^0)}, & S^2 = [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19} = g_{(144^0)} \\ S^4 = [4\ 3\ 2\ 1]_{16} = g_{(-72^0)}, & S^3 = [-3\ -2\ 4\ 1]_{18} = g_{(-144^0)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} g\ ..\ 1\ i\ -\operatorname{tg}\varphi\ -i\operatorname{tg}\varphi\ 0\ 0 \\ \text{(vgl. § 47 6A) Erstes Beisp.).} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2)\ S = [1\ -4\ -2\ 3]_5 = g'_{(72^0)}, & S^2 = [1\ -3\ -4\ 2]_6 = g'_{(144^0)} \\ S^4 = [-1^*\ 4\ 2\ -3]_7 = g'_{(-72^0)}, & S^3 = [1\ 3\ -4\ -2]_4 = g'_{(-144^0)} \end{matrix}\right\} g'\ ..\ 1\ -i\ -\operatorname{tg}\varphi\ i\operatorname{tg}\varphi\ 0\ 0.$$

$6\alpha_2$) 4 . 72 = 288 besondere zehnzählige Doppeldrehungen (Drehung nebst Umwendung); nämlich Drehung von $\pm 36^0$, $\pm 108^0$ um g (g') und Umwendung um g' (g) (vgl. § 28 unter cβ) (90χ)).

S^2, S^4, S^6, S^8 sind die fünfzähligen einfachen Drehungen $6\alpha_1$), S^5 ist die Inversion.

Beispiele:

$$\left.\begin{matrix} 1)\ S = [3\ 2\ -4\ -1]_{18} = g_{(36^0)}\ g'_{(180^0)}, & S^3 = [-4\ -3\ -2\ -1]_{16} = g_{(108^0)}\ g'_{(180^0)} \\ S^9 = [3\ -2\ -4\ 1^*]_{19} = g_{(-36^0)}\ g'_{(180^0)}, & S^7 = [-4\ -3\ -2\ -1]_{17} = g_{(-108^0)}\ g'_{(180^0)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{vgl. } (6\alpha_1) \\ \text{Beispiel 1).} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2)\ S = [-1\ -3\ 4\ 2]_4 = g'_{(36^0)}\ g_{(180^0)}, & S^3 = [1^*\ -4\ -2\ 3]_7 = g'_{(108^0)}\ g_{(180^0)} \\ S^9 = [-1\ 3\ 4\ -2]_6 = g'_{(-36^0)}\ g_{(180^0)}, & S^7 = [-1\ 4\ 2\ -3]_5 = g'_{(-108^0)}\ g_{(180^0)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{vgl. } (6\alpha_1) \\ \text{Beispiel 2).} \end{matrix}$$

$7\alpha_1$) 4 . 12 = 48 fünfzählige, $7\alpha_2$) 4 . 12 = 48 zehnzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem der 12 imaginären Hauptkreispaare g_0 als Leithauptkreisen bilden und wobei die geraden Potenzen von S die fünfzähligen Doppeldrehungen darstellen (vgl. § 28 unter dβ) (96h), (96l) in § 47 unter 7 A)).

$$S = g_{(\pm 36^0)}\ g'_{(\pm 36^0)} = \overset{(c)}{g}_{(\pm 36^0)}\ \overset{(c)'}{g}_{(\pm 36^0)} = \overset{(b)}{g}_{(\pm 36^0)}\ \overset{(b)'}{g}_{(\pm 36^0)} = \ldots$$

Beispiele:

$$\left.\begin{matrix} 1)\ S = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{70} = g_{(36^0)}\ g'_{(36^0)}, & S^2 = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{67} = g_{(72^0)}\ g'_{(72^0)} \\ S^3 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{73} = g_{(108^0)}\ g'_{(108^0)}, & S^4 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{64} = g_{(144^0)}\ g'_{(144^0)} \\ S^7 = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{67} = g_{(-108^0)}\ g'_{(-108^0)}, & S^6 = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{70} = g_{(-144^0)}\ g'_{(-144^0)} \\ S^9 = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64} = g_{(-36^0)}\ g'_{(-36^0)}, & S^8 = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73} = g_{(-72^0)}\ g'_{(-72^0)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{vgl. Beispiel} \\ \text{zu 7 A) in} \\ \text{§ 47} \end{matrix}$$

$S^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$. g und g' wie in den Beispielen zu $6\alpha_1$), $6\alpha_2$); g_0 .. $\sin\varphi$ 0 $\cos\varphi$ 0 $\pm i$ 0.

2) $S = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{55} = g_{(36^0)}\quad g'_{(-36^0)}$, $\quad S^2 = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{54} = g_{(72^0)}\quad g'_{(-72^0)}$

$S^3 = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{53} = g_{(108^0)}\ g'_{(-108^0)}$, $\quad S^4 = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{52} = g_{(144^0)}\ g'_{(-144^0)}$

$S^7 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{54} = g_{(-108^0)}\ g'_{(108^0)}$, $\quad S^6 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{55} = g_{(-144^0)}\ g'_{(144^0)}$

$S^9 = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{52} = g_{(-36^0)}\ g'_{(36^0)}$, $\quad S^8 = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{53} = g_{(-72^0)}\ g'_{(72^0)}$

$$S^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

g und g' wie im vorhergehenden Beispiel. g_0 . . . $0\quad \sin\varphi\quad 0\quad \cos\varphi\quad 0\quad \pm i$.

$8\alpha_1$) und $8\alpha_2$) $8 \,.\, 72 = 576$ zehnzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreis g und dessen reciproke Polare g' sind (vergl. § 28 b), e) und § 47 8 A)). $S = g_{(\pm 36^0)}\ g'_{(\pm 108^0)}$. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{g}_0$, 4 Hauptkugeln χ_0, dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen g, g' zwei imaginäre Hauptkreispaare g_0 sind, entsprechen den früher (§ 47 8 A) angegebenen.

Beispiele:

1) $S = [-4\ 1\ -3\ 2]_{47} = g_{(36^0)}\quad g'_{(108^0)}$, $\quad S^2 = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{22} = g_{(72^0)}\quad g'_{(-144^0)}$

$S^3 = [3\ 4\ -1\ -2]_{32} = g_{(108^0)}\quad g'_{(-36^0)}$, $\quad S^4 = [4\ -1^*\ -3\ 2]_{11} = g_{(144^0)}\quad g'_{(72^0)}$

$S^7 = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{22} = g_{(-108^0)}\ g'_{(36^0)}$, $\quad S^6 = [4\ -1\ 3\ -2]_{47} = g_{(-144^0)}\ g'_{(-72^0)}$

$S^9 = [-4\ 1^*\ 3\ -2]_{41} = g_{(-36^0)}\ g'_{(-108^0)}$, $\quad S^8 = [-3\ -4\ 1\ 2]_{32} = g_{(-72^0)}\ g'_{(144^0)}$

$$S^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

(Vgl. Beispiel zu 8 A) in § 47).

2) $S = [-4\ 1\ 3\ -2]_{26} = g_{(36^0)}\quad g'_{(-108^0)}$, $\quad S^2 = [-3\ 4\ -1\ 2]_{49} = g_{(72^0)}\quad g'_{(144^0)}$

$S^3 = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{39} = g_{(108^0)}\quad g'_{(36^0)}$, $\quad S^4 = [4\ 1\ -3\ -2]_{28} = g_{(144^0)}\quad g'_{(-72^0)}$

$S^7 = [3\ -4\ 1\ -2]_{49} = g_{(-108^0)}\ g'_{(-36^0)}$, $\quad S^6 = [4\ -1\ -3\ 2]_{26} = g_{(-144^0)}\ g'_{(72^0)}$

$S^9 = [-4\ -1\ 3\ 2]_{28} = g_{(-36^0)}\ g'_{(108^0)}$, $\quad S^8 = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{39} = g_{(-72^0)}\ g'_{(-144^0)}$

$$S^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

Für beide Beispiele ist das Haupttetraeder mit allen Elementen dasselbe; (vgl. § 47 unter 6 B) Beispiel 1); das Hauptkreispaar g, g' und die beiden Hauptkreispaare g_0 sind dieselben, wie in den Beispielen zu $6\alpha_1$), $6\alpha_2$), $7\alpha_1$), $7\alpha_2$).

$9\alpha_1$) und $9\alpha_2$) $16 \,.\, 120 = 1920$ dreissigzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreispaar $g^{(c)} = c^{(g)}$ und $g^{(c)'} = c^{(g)'}$ sind (vergl. § 28 b), e) und § 47 9 A). $S = g^{(c)}_{(12^0)}\ g^{(c)'}_{(\pm 132)}$. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders mit vier Eckpunkten $\mathfrak{g}_0^{(c)} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$, 4 Hauptkugeln $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$, dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen $g^{(c)}$, $g^{(c)'}$ je ein imaginäres Hauptkreispaar g_0, c_0 sind, entsprechen den in § 47 9 A) angegebenen.

Diejenigen Potenzen von S, deren Exponenten prim zu 30 sind (den Potenzen von $\tau = -\varepsilon\,\alpha,\ -\varepsilon^4\,\alpha,\ -\varepsilon\,\alpha^2,\ -\varepsilon^4\,\alpha^2$ entsprechend), sowie diejenigen, deren Exponenten das Doppelte der Zahlen prim zu 15 betragen (den Potenzen von von $\tau = \varepsilon\,\alpha,\ \varepsilon^4\,\alpha,\ \varepsilon\,\alpha^2,\ \varepsilon^4\,\alpha^2$ entsprechend) bedeuten 30-zählige Doppeldrehungen, während die Potenzen, deren Exponenten Vielfache von 3 und von 5 sind, bez. zehn- und sechszählige Doppeldrehungen darstellen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar g_0 bezw. c_0 bilden (vergl. $7\alpha_1)\ \alpha_2)$ und $5\alpha_1)\ \alpha_2)$); S^{15} bedeutet die Inversion. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll}
S = [1\ -3\ 4\ -2]_{29} = g^{(c)}_{(12^0)}\ g^{(c)'}_{(132^0)}, & S^2 = [2\ 1\ -4\ -3]_{48} = g^{(c)}_{(24^0)}\ g^{(c)'}_{(-96^0)} \\
S^7 = [-4\ -2\ 1\ 3]_{40} = g^{(c)}_{(84^0)}\ g^{(c)'}_{(-156^0)}, & S^4 = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{23} = g^{(c)}_{(48^0)}\ g^{(c)'}_{(168^0)} \\
S^{11} = [4\ -3\ -2\ 1]_{33} = g^{(c)}_{(132^0)}\ g^{(c)'}_{(12^0)}, & S^8 = [4\ -2\ -1^*\ 3]_{46} = g^{(c)}_{(96^0)}\ g^{(c)'}_{(-24^0)} \\
S^{13} = [-2\ 1^*\ 4\ -3]_{38} = g^{(c)}_{(156^0)}\ g^{(c)'}_{(-84^0)}, & S^{14} = [-1\ 3\ 4\ -2]_{27} = g^{(c)}_{(168^0)}\ g^{(c)'}_{(48^0)} \\
S^{17} = [-2\ -1\ 4\ 3]_{48} = g^{(c)}_{(-156^0)}\ g^{(c)'}_{(84^0)}, & S^{16} = [-1\ 3\ -4\ 2]_{29} = g^{(c)}_{(-168^0)}\ g^{(c)'}_{(-48^0)} \\
S^{19} = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{23} = g^{(c)}_{(-132^0)}\ g^{(c)'}_{(-12^0)}, & S^{22} = [4\ 2\ -1\ -3]_{40} = g^{(c)}_{(-96^0)}\ g^{(c)'}_{(24^0)} \\
S^{23} = [-4\ 2\ 1^*\ -3]_{46} = g^{(c)}_{(-84^0)}\ g^{(c)'}_{(156^0)}, & S^{26} = [-4\ 3\ 2\ -1]_{33} = g^{(c)}_{(-48^0)}\ g^{(c)'}_{(-168^0)} \\
S^{29} = [1\ -3\ -4\ 2]_{27} = g^{(c)}_{(-12^0)}\ g^{(c)'}_{(-132^0)}, & S^{28} = [2\ -1^*\ -4\ 3]_{38} = g^{(c)}_{(-24^0)}\ g^{(c)'}_{(96^0)}
\end{array}\right\}\ \text{(vgl. Beispiel 1 zu 9 A) in § 47).}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
S^3 = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{70} = g^{(c)}_{(36^0)}\ g^{(c)'}_{(36^0)}, & S^6 = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{67} = g^{(c)}_{(72^0)}\ g^{(c)'}_{(72^0)} \\
S^9 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{73} = g^{(c)}_{(108^0)}\ g^{(c)'}_{(108^0)}, & S^{12} = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{64} = g^{(c)}_{(144^0)}\ g^{(c)'}_{(144^0)} \\
S^{21} = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{67} = g^{(c)}_{(-108^0)}\ g^{(c)'}_{(-108^0)}, & S^{18} = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{70} = g^{(c)}_{(-144^0)}\ g^{(c)'}_{(-144^0)} \\
S^{27} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64} = g^{(c)}_{(-36^0)}\ g^{(c)'}_{(-36^0)}, & S^{24} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73} = g^{(c)}_{(-72^0)}\ g^{(c)'}_{(-72^0)}
\end{array}\right\}\ \text{(vgl. Beispiel 1 zu } 7\alpha_1),\ 7\alpha_2)\text{).}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
S^5 = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{62} = g^{(c)}_{(60^0)}\ g^{(c)'}_{(-60^0)}, & S^{10} = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{61} = g^{(c)}_{(120^0)}\ g^{(c)'}_{(-120^0)} \\
S^{25} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{61} = g^{(c)}_{(-60^0)}\ g^{(c)'}_{(60^0)}, & S^{20} = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{62} = g^{(c)}_{(-120^0)}\ g^{(c)'}_{(120^0)}
\end{array}\right\}\ \text{(vgl. Beispiel 1 zu 9A) in § 47).}$$

$$S^{15} = [-1\ -2\ -3\ -4]_1. \qquad \begin{array}{l} g^{(c)} \\ g^{(c)'} \end{array} \Big\{ \cos\varphi \quad \pm i \sin\psi \quad -\sin\varphi \quad \mp i \cos\psi \quad 0 \quad 0 \Big\}$$

$$\begin{array}{lcccccc}
g_0 \ldots & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & \pm i & 0 \\
c_0 \ldots & 0 & \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 & \pm i.
\end{array}$$

$10\alpha_1)$ und $10\alpha_2)$ $8 \,.\, 180 = 1440$ zwanzigzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreispaar $g^{(b)} = b^{(g)}$ und $g^{(b)'} = b^{(g)'}$ sind (vgl. § 28b), e) und § 47 10 A)).

$$S = g^{(b)}_{(+18^0)}\ g^{(b)'}_{(+162^0)}.$$

Die Elemente des Haupttetraeders mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}_0^{(\mathfrak{g})}$, 4 Haupt-

kugeln $\chi_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\chi)}$, dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen $g^{(b)}$, $g^{(b)\prime}$ je ein imaginäres Hauptkreispaar g_0, b_0 sind, können sofort aus den in § 47 10 A) angegebenen entnommen werden.

Diejenigen Potenzen von S, deren Exponenten prim zu 20 sind (den Potenzen von $\tau = -i\,\varepsilon,\ i\,\varepsilon,\ -i\,\varepsilon^4,\ i\,\varepsilon^4$ entsprechend) bedeuten 20-zählige Doppeldrehungen, während die Potenzen mit geraden Exponenten und diejenigen mit Exponenten, welche Vielfache von 5 sind, bezw. zehn- und vierzählige Doppeldrehungen darstellen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem Hauptkreispaar g_0 bez. b_0 bilden (vergl. $7\alpha_1)\ \alpha_2)$, $3\alpha_1)\ \alpha_2)$); S^{10} bedeutet die Inversion. Z. B.:

$$\left\{\begin{array}{ll} S = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{73} = g^{(b)}_{(18^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-162^0)}, & S^{11} = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{73} = g^{(b)}_{(-162^0)}\ g^{(b)\prime}_{(18^0)} \\ S^3 = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{64} = g^{(b)}_{(54^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-126^0)}, & S^{13} = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{64} = g^{(b)}_{(-126^0)}\ g^{(b)\prime}_{(54^0)} \\ S^7 = [3\ -4\ 1^*\ -2]_{70} = g^{(b)}_{(126^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-54^0)}, & S^{17} = [-3\ 4\ -1^*\ 2]_{70} = g^{(b)}_{(-54^0)}\ g^{(b)\prime}_{(126^0)} \\ S^9 = [3\ -4\ 1^*\ -2]_{67} = g^{(b)}_{(162^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-18^0)}, & S^{19} = [-3\ 4\ -1^*\ 2]_{67} = g^{(b)}_{(-18^0)}\ g^{(b)\prime}_{(162^0)} \end{array}\right\}$$

(vgl. Beispiel zu 10 A_2) in § 47).

$$\left\{\begin{array}{ll} S^2 = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{70} = g^{(b)}_{(36^0)}\ g^{(b)\prime}_{(36^0)}, & S^{12} = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{70} = g^{(b)}_{(-144^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-144^0)} \\ S^4 = [4\ 3\ -2\ -1^*]_{67} = g^{(b)}_{(72^0)}\ g^{(b)\prime}_{(72^0)}, & S^{14} = [-4\ -3\ 2\ 1^*]_{67} = g^{(b)}_{(-108^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-108^0)} \\ S^6 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{73} = g^{(b)}_{(108^0)}\ g^{(b)\prime}_{(108^0)}, & S^{16} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{73} = g^{(b)}_{(-72^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-72^0)} \\ S^8 = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{64} = g^{(b)}_{(144^0)}\ g^{(b)\prime}_{(144^0)}, & S^{18} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{64} = g^{(b)}_{(-36^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-36^0)} \end{array}\right\}$$

Diese 10-zähligen Doppeldrehungen stimmen mit denjenigen des Beispiels zu $9\alpha_1)\ \alpha_2)$ überein.

$$\left\{ S^5 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = g^{(b)}_{(90^0)}\ g^{(b)\prime}_{(-90^0)},\quad S^{15} = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = g^{(b)}_{(-90^0)}\ g^{(b)\prime}_{(90^0)} \right\}$$

(vgl. Beispiel 1) zu $3\alpha_1)\ \alpha_2)$)

$$S^{10} = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

$$\begin{array}{l|cccccc} g^{(b)},\ g^{(b)\prime} & \cos\varphi & \pm i & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ g_0 \ldots & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & \pm i & 0 \\ b_0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm i. \end{array}$$

$11\alpha_1)$ und $11\alpha_2)$ $4 \cdot 300 = 1200$ zwölfzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreispaar $c^{(b)} = b^{(c)}$ und $c^{(b)\prime} = b^{(c)\prime}$ sind (vgl. § 28 b), e) und § 47 11 A). $S = c^{(b)}_{(\pm 30^0)}\ c^{(b)\prime}_{(\pm 150^0)}$. Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{c}_0^{(b)} = \mathfrak{b}_0^{(c)}$, 4 Hauptkugeln $\gamma_0^{(\beta)} = \beta_0^{(\gamma)}$, dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen $c^{(b)}$, $c^{(b)\prime}$ je ein imaginäres Hauptkreispaar c_0, b_0 sind, entsprechen den in § 47 11 A) angegebenen.

Die Potenzen S, S^5, S^7, S^{11} (deren Exponenten prim zu 12 sind, entsprechend den Potenzen von $\tau = -i\,\alpha,\ i\,\alpha,\ -i\,\alpha^2,\ i\,\alpha^2$) bedeuten zwölfzählige

Doppeldrehungen, während die Potenzen S^2, S^4, S^8, S^{10} und S^3, S^9 bez. sechs- und vierzählige Doppeldrehungen darstellen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar c_0 bez. b_0 bilden (vgl. $5\alpha_1)$ $\alpha_2)$, $3\alpha_1)$ $\alpha_2)$); S^6 bedeutet die Inversion. (Vergl. auch § 39 unter $4\beta_1)$, $4\beta_2)$). Z. B.:

$$\left\{\begin{array}{ll} S = [4\ -3\ -2\ \ 1^*]_{74} = c^{(b)}_{(30^0)}\ c^{(b)'}_{(150^0)}, & S^7 = [-4\ 3\ 2\ -1^*]_{74} = c^{(b)}_{(-150^0)}\ c^{(b)'}_{(-30^0)} \\ S^5 = [-4 -3 -2 -1^*]_{70} = c^{(b)}_{(150^0)}\ c^{(b)'}_{(30^0)}, & S^{11} = [4\ 3\ 2\ 1^*]_{70} = c^{(b)}_{(-30^0)}\ c^{(b)'}_{(-150^0)} \end{array}\right\} \text{(vgl. Beispiel zu } 11A_3) \text{ in § 47).}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} S^2 = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{70} = c^{(b)}_{(60^0)}\ c^{(b)'}_{(-60^0)}, & S^8 = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{70} = c^{(b)}_{(-120^0)}\ c^{(b)'}_{(120^0)} \\ S^4 = [-3 -4 -1^* -2]_{74} = c^{(b)}_{(120^0)}\ c^{(b)'}_{(-120^0)}, & S^{10} = [3\ 4\ 1^*\ 2]_{74} = c^{(b)}_{(-60^0)}\ c^{(b)'}_{(60^0)} \end{array}\right\}$$

$$S^3 = [2\ -1\ -4\ 3]_1 = c^{(b)}_{(90^0)}\ c^{(b)'}_{(90^0)},\quad S^9 = [-2\ 1\ 4\ -3]_1 = c^{(b)}_{(-90^0)}\ c^{(b)'}_{(-90^0)} \quad \text{(vgl. Beispiel 1) zu } 3\alpha_1),\ \alpha_2)).$$

$$S^6 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

$$\begin{array}{l|cccccc} \left.\begin{array}{l} c^{(b)} \\ c^{(b)'} \end{array}\right\} & \cos\psi & \mp i & 0 & 0 & -\sin\psi & 0 \\ c_0 \ldots & \sin\psi & 0 & \pm i & 0 & \cos\psi & 0 \\ b_0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \pm & i. \end{array}$$

Damit sind die 7200 Bewegungen, welche die Gewebe G_4 und G'_4 in sich überführen, vollständig aufgestellt.[1])

$A^{(2)}$) Ein- oder dreifache Spiegelungen, den uneigentlichen orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 29 und § 50 12A)...15A).

$12\alpha_1$) 60 einfache Spiegelungen an je einer der 60 Hauptkugeln $\beta_1 \ldots \beta_{60}$ (vgl. § 29aα) und § 50 unter 12A)).

Beispiele:

$S = [1\ -4\ -2\ -3]_5$: Spiegelung an Hauptkugel $\beta_{13} \ldots\ 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$

$S = [2\ -1\ 4\ 3]_2$: " " " $\beta_{10} \ldots\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

$S = [-2\ 1\ -4\ -3]_9$: " " " $\beta_{25} \ldots\ \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$

$S = [-4\ -2\ 1\ -3]_{13}$: " " " $\beta_{37} \ldots\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$

(Vgl. die Beispiele zu $12A_3$), $12A_4$), $12A_5$), $12A_6$) in § 50).

[1]) Diese 7200 Bewegungen finden sich auch schon (ohne Herleitung) kurz bei S. L. van Oss: „Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen (Diss. Giessen 1894)" angegeben, während die 7200 Spiegelungen, sowie die 7200 eigentlichen und 7200 uneigentlichen Correlationen nicht berücksichtigt sind.

$12\alpha_2$) 60 Inversionsspiegelungen (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch je einen der 60 Punkte (und Gegenpunkte) $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_{60}$ (und $\mathfrak{b}'_1 \dots \mathfrak{b}'_{60}$). (Vgl. § 29 α) β)).

Beispiele:

$S = [-1\ \ 4\ \ 2\ \ 3]_5$:	Inversions-spiegelung:	drei auf einander senkrechte Hauptkugeln	durch	$\mathfrak{b}_{13} \dots$	0	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$
$S = [-2\ 1\ -4\ -3]_2$:	„	„	„	$\mathfrak{b}_{10} \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$S = [2\ -1\ \ 4\ \ 3]_9$:	„	„	„	$\mathfrak{b}_{25} \dots$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$
$S = [4\ \ 2\ -1\ \ 3]_{13}$:	„	„	„	$\mathfrak{b}_{37} \dots$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi$

(vgl. die Beispiele zu 12 A_3), 12 A_4), 12 A_5), 12 A_6) in § 50).

$13\alpha_1$) 2 . 450 = 900 vierzählige Drehspiegelungen (dreifache Spiegelungen) (vgl. § 29 b) und § 50 unter 13 A)).

Von den beiden Punkten $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{d}_k$, welche auf einem Hauptkreise b, der Axe der $\pm 90^0$ betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{d}_i$ fest, $\mathfrak{d}_k$ geht in den Gegenpunkt $\mathfrak{d}'_k$ über; die durch die reciproke Polare b', deren imaginäre unendlich ferne Punkte fest bleiben, gehende Hauptkugel δ_k (die Spiegelhauptkugel) bleibt fest, während δ_i die Innen- mit der Aussenseite vertauscht. Die Elemente des entsprechenden sphärischen Tetraeders mit den Eckpunkten $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{d}_k$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}'_0$, den Hauptkugeln δ'_i, δ_k, β'_0, β_0 u. s. f. sind aus den in § 50 unter 13A) aufgestellten zu entnehmen. S^2 bedeutet die Umwendung um die Axe b.

Beispiele:

1) $S = [2\ 1\ -4\ 3]_4 = b_{(90^0)}\ |\ \delta_k\ |$,
$S^3 = [1\ 4\ -2\ 3]_9 = b_{(-90^0)}\ |\ \delta_k\ |$;

$$S^2 = [2\ -1^*\ -4\ \ 3]_{70} = b_{(180^0)}$$

$$\left.\begin{cases} \mathfrak{d}_i \dots \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ -\dfrac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} \dots \delta_i \\ \mathfrak{d}_k \dots -\dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{2}} \dots \delta_k \\ b = |\ \mathfrak{d}_i\ \mathfrak{d}_k\ | \dots \operatorname{tg}\varphi\ \ -2i\ \ 1\ \ 0\ \ \operatorname{cotg}\varphi\ \ 0 \end{cases}\right\} \text{(vgl. das Beispiel 2) zu § 50 13 A)).}$$

2) $S = [1^*-2-3-4]_{72} = b_{(90^0)}\ |\ \delta_k\ |$,
$S^3 = [1^*-2-3-4]_{59} = b_{(-90^0)}\ |\ \delta_k\ |$;

$$S^2 = [2\ \ 4\ \ 3\ \ 1]_{17} = b_{(180^0)}$$

$$\left.\begin{cases} \mathfrak{d}_i \dots \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dots \delta_i \\ \mathfrak{d}_k \dots \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dots \delta_k \\ b = |\ \mathfrak{d}_i\ \mathfrak{d}_k\ | \dots \operatorname{cotg}\varphi\ \ i\operatorname{cotg}\varphi\ \ -\operatorname{tg}\varphi\ \ -i\operatorname{tg}\varphi\ \ 1\ \ -i \end{cases}\right\} \text{(vgl. das Beispiel 3) zu § 50 13 A)).}$$

$13\alpha_2$) $2 \,.\, 450 = 900$ vierzählige Drehspiegelungen.
Die beiden Punkte $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{d}_k$ und die beiden Hauptkugeln δ_k, δ_i in $13\,\alpha_1$) vertauschen sich, so dass $\mathfrak{d}_k$ fest bleibt, $\mathfrak{d}_i$ in den Gegenpunkt $\mathfrak{d}'_i$ übergeht, δ_i die spiegelnde Hauptkugel ist, während die Drehaxe b dieselbe ist und S^2 ebenfalls, wie in $13\,\alpha_1$) die Umwendung um diese Axe bedeutet.

Beispiele: 1) $S = [-2 \ -1 \ 4 \ -3]_4 = b_{(-90^0)} \ | \delta_i |$
$S^3 = [-1 \ -4 \ 2 \ -3]_9 = b_{(90^0)} \ | \delta_i |$ } vgl. Beispiel 1) unter $13\alpha_1$).

2) $S = [-1^* \ 2 \ 3 \ 4]_{72} = b_{(-90^0)} \ | \delta_i |$
$S^3 = [-1^* \ 2 \ 3 \ 4]_{59} = b_{(90^0)} \ | \delta_i |$ } vgl. Beispiel 2) unter $13\alpha_1$).

$14\alpha_1$) $2 \,.\, 600 = 1200$ sechszählige Drehspiegelungen (vergl. § 29 b) und § 50 unter 14 A).

Von den beiden Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$, welche auf einem Hauptkreise c, der Axe der $\pm 120^0$ betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{k}_l$ fest, $\mathfrak{b}_i$ geht in den Gegenpunkt $\mathfrak{b}'_i$ über, die Spiegelhauptkugel β_i bleibt fest, während bei $\varkappa_l$ die Innen- mit der Aussenseite vertauscht wird. Die Elemente des entsprechenden sphärischen Tetraeders mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$ und den Hauptkugeln β_i, $\varkappa_l$, γ'_0, γ_0, dem reellen Gegenkantenpaar c, c' u. s. f. sind aus den in § 50 unter 14 A) aufgestellten zu entnehmen. Die Potenzen S^2 und S^4 bedeuten die dreizähligen einfachen Drehungen um die Axe c (vgl. $4\alpha_4$)), S^3 bedeutet die Spiegelung an β_i.

Beispiele:

1) $S = [-4 \ -3 \ 2 \ -1]_{16} = c_{(120^0)} \ | \beta_i |$, $S^5 = [3 \ -4 \ 1^* \ 2]_{52} = c_{(-120^0)} \, | \beta_i |$;
$S^2 = [4 \ -3 \ 2 \ -1^*]_{19} = c_{(-120^0)}$
$S^4 = [-4 \ -3 \ 2 \ 1^*]_{16} = c_{(120^0)}$;
$S^3 = [1 \ 2 \ 3 \ -4]_1 = | \beta_i |$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{b}_i \ldots \ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \ \ldots \beta_i \\ \mathfrak{k}_l \ \ldots \ \sin\psi \quad 0 \quad \cos\psi \quad 0 \ \ldots \varkappa_l \\ c \ldots \cos\psi \ \ i\cos\psi \ \ 0 \ \ 0 \ \ \sin\psi \ \ -i\sin\psi \end{array}\right.$$

(vgl. Beispiel 2) zu § 50 14 A)).

2) $S = [3 \ -4 \ -1^* \ -2]_{74} = c_{(120^0)} \ | \beta_i |$, $S^5 = [3 \ -4 \ 1^* \ 2]_{52} = c_{(-120^0)} \, | \beta_i |$;
$S^2 = [1 \ 4 \ -2 \ -3]_4 = c_{(-120^0)}$
$S^4 = [1 \ -4 \ 2 \ -3]_5 = c_{(120^0)}$;
$S^3 = [3 \ -4 \ 1 \ 2]_{12} = | \beta_i |$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{b}_i \ldots \ \frac{1}{2} \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \quad 0 \quad -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \ldots \beta_i \\ \mathfrak{k}_l \ldots -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\cos\psi}{2} \quad 0 \quad -\frac{\sin\psi}{2} \ldots \varkappa_l \\ c \ldots -\cos\psi \ \ i\cos\psi \ \ 0 \ \ 0 \ \ \sin\psi \ \ -i\sin\psi \end{array}\right.$$

(vgl. Beispiel 3) zu § 50 14 A)).

$14\alpha_2$) $2 \,.\, 600 = 1200$ sechszählige Drehspiegelungen. Die beiden Punkte $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$ und die beiden Hauptkugeln $\varkappa_l$, β_i in $14\alpha_1$) vertauschen

sich, so dass $\mathfrak{b}_i$ fest bleibt, $\mathfrak{k}_l$ in den Gegenpunkt $\mathfrak{k}'_l$ übergeht, $\varkappa_l$ die spiegelnde Hauptkugel ist, während die Drehaxe c für die $\pm 60^0$ betragenden Drehungen dieselbe ist, S^2 und S^4 ebenfalls die einfachen dreizähligen Umdrehungen um diese Axe bedeuten, S^3 dagegen die Inversionsspiegelung (vgl. $12\alpha_2$)) $c_{(180^0)} \mid \varkappa_l \mid$ an drei aufeinander senkrechten, durch $\mathfrak{b}_i$ gehenden Hauptkugeln darstellt.

Beispiele:

1) $S = [4\ \ 3\ \ -2\ \ 1]_{16} = c_{(-60^0)} \mid \varkappa_l \mid$, $S^5 = [-3\ 4\ -1^*\ -2]_{52} = c_{(60^0)} \mid \varkappa_l \mid$ — $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$, β_i, $\varkappa_l$ und c, S^2, S^4 wie im Beispiel 1) zu $14\alpha_1$), $S^3 = [-1\ \ -2\ \ -3\ \ 4]_1 = c_{(180^0)} \mid \varkappa_l \mid$

(vgl. § $14\alpha_1$) Beispiel 1).

2) $S = [-3\ \ 4\ \ 1^*\ \ 2]_{74} = c_{(-60^0)} \mid \varkappa_l \mid$, $S^5 = [-3\ 4\ -1^*\ -2]_{52} = c_{(60^0)} \mid \varkappa_l \mid$ — $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$, β_i, $\varkappa_l$ und c, S^2, S^4 wie im Beispiel 2) zu $14\alpha_1$), $S^3 = [-3\ \ 4\ \ -1\ \ -2]_{12} = c_{(180^0)} \mid \varkappa_l \mid$

(vgl. § $14\alpha_1$) Beispiel 2).

$15\alpha_1$) 4 . 360 = 1440 zehnzählige Drehspiegelungen (vergl. § 29 b) und § 50 unter 15 A). Von den beiden Punkten $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{i}_l$, welche auf einem Hauptkreise g, der Axe der $\pm 72^0$, $\pm 144^0$ betragenden Drehungen liegen, bleibt $\mathfrak{i}_l$ fest, $\mathfrak{b}_k$ geht in den Gegenpunkt $\mathfrak{b}'_k$ über, die Spiegelhauptkugel β_k bleibt fest, während bei ι_l die Innen- und Aussenseite sich vertauscht. Die Elemente des entsprechenden sphärischen Tetraeders mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{i}_l$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}'_0$ und den Hauptkugeln β_k, ι_l, χ'_0, χ_0, dem reellen Gegenkantenpaar g, g' u. s. f. sind aus den in § 50 unter 15 A) angegebenen zu entnehmen.

Die Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 bedeuten die fünfzähligen einfachen Drehungen um die Axe g (vgl. $6\alpha_1$), während S^5 die Spiegelung an β_k darstellt.

Beispiel:

(vgl. Beispiel 1) zu 15 A) in § 50)

$$\left.\begin{array}{ll} S = [-3\ -2\ 4\ -1]_{18} = g_{(-144^0)} \mid \beta_k \mid, & S^2 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{17} = g_{(72^0)} \\ S^3 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ -1]_{16} = g_{(-72^0)} \mid \beta_k \mid, & S^4 = [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19} = g_{(144^0)} \\ S^7 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ -1]_{17} = g_{(72^0)} \mid \beta_k \mid, & S^6 = [-3\ \ -2\ \ 4\ \ 1]_{18} = g_{(-144^0)} \\ S^9 = [-3\ \ 2\ \ 4\ \ 1^*]_{19} = g_{(144^0)} \mid \beta_k \mid, & S^8 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{16} = g_{(-72^0)} \\ & S^5 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ -4]_1 = \mid \beta_k \mid \end{array}\right\}$$

(vgl. Beispiel 1) zu $6\alpha_1$).

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \mathfrak{b}_k \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \beta_k & \\ \mathfrak{i}_l \ldots & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \ldots \iota_l & \\ g \ldots & \cos\varphi & i\cos\varphi & -\sin\varphi & -i\sin\varphi & 0 & 0 \end{array}\right\}$$

vgl. Beispiel 1) zu § 50 15 A).

$15\alpha_2$) $4 \cdot 360 = 1440$ zehnzählige Drehspiegelungen. Die beiden Punkte $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{i}_l$ in $15\alpha_1$) vertauschen sich, so dass $\mathfrak{b}_k$ fest bleibt, $\mathfrak{i}_l$ in den Gegenpunkt $\mathfrak{i}'_l$ übergeht, ι_l die spiegelnde Hauptkugel ist, während die Drehaxe für die $\pm 36^0$, $\pm 108^0$ betragenden Drehungen dieselbe ist. S^2, S^4, S^6, S^8 bedeuten wiederum die fünfzähligen einfachen Drehungen um diese Axe, während S^5 die Inversionsspiegelung (vergl. $12\alpha_2$)) $g_{(180^0)} \mid \iota_l \mid$ an drei auf einander senkrechten, durch $\mathfrak{b}_k$ gehenden Hauptkugeln darstellt.

Beispiel (vgl. das Beispiel zu $15\alpha_1$)):

$S = [3\ \ 2\ -4\ \ 1]_{18} = g_{(36^0)} \mid \iota_l \mid$	S^2, S^4, S^6, S^8 stimmen mit denen des
$S^3 = [-4\ -3\ -2\ \ 1]_{16} = g_{(108^0)} \mid \iota_l \mid$	Beispiels zu $15\alpha_1$) überein, ebenso $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{i}_l$,
$S^7 = [-4\ -3\ -2\ \ 1]_{17} = g_{(-108^0)} \mid \iota_l \mid$	β_k, ι_l, sowie g u. s. w.
$S^9 = [3\ -2\ -4\ \ 1^*]_{19} = g_{(-36^0)} \mid \iota_l \mid$	$S^5 = [-1\ -2\ -3\ \ 4]_1 = g_{(180^0)} \mid \iota_l \mid$.

Damit sind auch die 7200 uneigentlichen Bewegungen (ein- und dreifachen Spiegelungen), welche die regulären Gewebe G_4 und G'_4 in sich überführen, vollständig aufgestellt. Ueber die Darstellung der Drehspiegelungen durch Spiegelungen an drei bestimmten, durch den festbleibenden Punkt gehenden Hauptkugeln ist das unter § 29 b) Gesagte zu vergleichen.

$B^{(1)}$) Correlationen, den **eigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend. (vgl. § 31 und § 47 1 B) . . 11 B).

$1\beta_1$) Die Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 30 (98α), (98β) und § 31 1)):

$$S' = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1 \text{ (oder } S' = [\underline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1\text{) (vgl. § 47 1 B)).}$$

$1\beta_2$) Die inverse Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$:

$$S' = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1 \text{ (vgl. § 47 1 B) [1]).}$$

$2\beta_1$) 225 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die Projectionen $\mathfrak{F}_2^{(1)} \ldots \mathfrak{F}_{226}^{(1)}$ der reellen Kernflächen $F_2^{(1)} \ldots F_{226}^{(1)}$ auf S_3 (vgl. § 31 2) und § 47 2 B)).

[1]) Auch hier möge es genügen, eine Correlation durch eine der beiden Darstellungen zu charakterisiren.

Beispiele:

1) $S' = \overline{[1\ 2\ -3\ -4]}_1$: Polar-Correlation in Bezug auf Kernfläche $\mathfrak{F}_2^{(1)}$:

$$\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2-\mathfrak{z}_3^2-\mathfrak{z}_4^2=0$$

2) $S' = \overline{[1\ 2\ 3\ 4]}_4$: Polar-Correlation in Bezug auf Kernfläche $\mathfrak{F}_i^{(1)}$:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{z}_1^2+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\mathfrak{z}_2^2-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\mathfrak{z}_3^2-\frac{1}{2}\mathfrak{z}_4^2\\ +\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3+\operatorname{cotg}\varphi\cdot\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_2+\operatorname{tg}\varphi\cdot\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_4\end{matrix}\right\}=0$$

3) $S' = \overline{[2\ 1^*\ 4\ 3]}_{74}$: Polar-Correlation in Bezug auf Kernfläche $\mathfrak{F}_k^{(1)}$:

$$\left.\begin{matrix}[-\mathfrak{z}_1^2-\mathfrak{z}_2^2+\mathfrak{z}_3^2+\mathfrak{z}_4^2]\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\\ +[\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_3-\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_2]\operatorname{cotg}\varphi+[\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_4+\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3]\end{matrix}\right\}=0$$

(vgl. § 47 die Beispiele zu $2B_1$), $2B_2$), $2B_3$)).

$2\beta_2$) 225 **inverse** eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf dieselben sphärischen Flächen, wie unter $2\beta_1$).

Beispiele:

1) $S' = \overline{[-1\ -2\ 3\ 4]}_1$: Inverse Polar-Correlation in Bezug auf $\mathfrak{F}_2^{(1)}$
2) $S' = \overline{[-1\ -2\ -3\ -4]}_4$: " " " " " " $\mathfrak{F}_i^{(1)}$
3) $S' = \overline{[-2\ -1^*\ -4\ -3]}_{74}$: " " " " " " $\mathfrak{F}_k^{(1)}$

(vgl. § 47 die Beispiele zu $2B_1$), $2B_2$), $2B_3$)).

$3\beta_1$) und $3\beta_2$) $2.30=60$ vierzählige Null-Correlationen, deren zugehöriger sphärischer (mit seinem polaren zusammenfallender) Complex je einer der 30 sphärischen Complexe $\mathfrak{C}_{(1)}: \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{30}$ (der Projectionen der 30 linearen Complexe $C_{(1)}$ (vergl. (42) in § 44)) ist (vergl. § 31 3) und § 47 3B)). S'^2 bedeutet die Inversion.

Beispiele:

1) $\left\{\begin{matrix}S' = \overline{[2\ -1\ -4\ 3]}_1\\ S'^3 = \overline{[-2\ 1\ 4\ -3]}_4\end{matrix}\right\}$ Complex: $\mathfrak{x}_2=0$ $S'^2=[-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (vgl. § 47 Beispiel zu $3B_1$).

2) $\left\{\begin{matrix}S' = \overline{[1^*\ -2\ -3\ 4]}_{74}\\ S'^3 = \overline{[-1^*\ 2\ 3\ -4]}_{74}\end{matrix}\right\}$ Complex: $\mathfrak{x}_{23} \ldots -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\cdot\mathfrak{x}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{x}_3-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi\cdot\mathfrak{x}_5=0$ $S'^2=[-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (vgl. § 47 Beispiel zu $3B_2$).

$4\vartheta_1$) $2.200=400$ sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{c}_0$, vier Hauptkugeln γ_0, ein reelles Hauptkreispaar c, c' und zwei imaginäre Hauptkreispaare c_0 zu Kanten hat. (Vgl. § 31 4a) und § 47 4B)). Die geraden Potenzen von S' bedeuten die einfachen dreizähligen Drehungen um einen Hauptkreis c (vgl. unter $4\alpha_1$) dieses §), S'^3 bedeutet die Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ ($1\beta_1$). Die Elemente des Haupttetraeders u. s. w. können aus den in § 47 unter 4B) angegebenen entnommen werden.

Beispiele (vgl. § 47 Beispiel 1) zu $4B_3$)):

$$1)\; \begin{array}{l} S' = [\overline{-4\;-3\;\;2\;\;1}]_{16}, \\ S'^5 = [\overline{4\;-3\;\;2\;-1^*}]_{19}, \end{array} \left\{ \begin{array}{l} S'^2 = [4\;-3\;\;2\;-1^*]_{19} = c_{(-120^0)} \\ S'^4 = [-4\;-3\;\;2\;\;1]_{16} = c_{(120^0)} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{vgl.} \\ 4\alpha_1) \end{array} \Big\} \begin{array}{c} S'^3 = [\overline{1\;\;2\;\;3\;\;4}]_1 \\ (\text{vgl. } 1\beta_2), \end{array}$$

2) (Vgl. § 47 Beispiel 3) zu $4B_4$):

$$\begin{array}{l} S' = [\overline{1^*\;-3\;-4\;\;2}]_{74}, \\ S'^5 = [\overline{1^*\;-4\;\;2\;-3}]_{67}, \end{array} \left\{ \begin{array}{l} S'^2 = [1^*\;-4\;\;2\;-3]_{67} = c_{(-120^0)} \\ S'^4 = [1^*\;-3\;-4\;\;2]_{74} = c_{(120^0)} \end{array} \right\} S'^3 = [\overline{1\;\;2\;\;3\;\;4}]_1 .$$

$4\beta_2$) 2.200 = 400 sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bez. dasselbe wie unter $4\beta_1$) ist. S'^2 und S'^4 bedeuten wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um c, S'^3 dagegen bedeutet die inverse Polarreciprocität $1\beta_2$).

Beispiele:

$$1)\; \begin{array}{l} S' = [\overline{4\;\;3\;-2\;-1}]_{16}, \\ S'^5 = [\overline{-4\;\;3\;-2\;\;1^*}]_{19}, \end{array} \Big\} \begin{array}{c} S'^2,\, S'^4 \text{ wie im Beispiel 1)} \\ \text{zu } 4\beta_1) \end{array} \Big\} S'^3 = [\overline{-1\;-2\;-3\;-4}]_1 ,$$

$$2)\; \begin{array}{l} S' = [\overline{-1^*\;\;3\;\;4\;-2}]_{74}, \\ S'^5 = [\overline{-1^*\;\;4\;-2\;\;3}]_{67}, \end{array} \Big\} \begin{array}{c} S'^2,\, S'^4 \text{ wie im Beispiel 2)} \\ \text{zu } 4\beta_1) \end{array} \Big\} S'^3 = [\overline{-1\;-2\;-3\;-4}]_1 .$$

$5\beta_1$) und $5\beta_2$) 4.20 = 80 zwölfzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 31 5a) und § 47 5 B)). S'^4 und S'^8 bedeuten die dreizähligen, S'^2 und S'^{10} die sechszähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar c_0 bilden (vergl. $5\alpha_1$) und $5\alpha_2$)) und welche für die Correlationen die Leithauptkreise der beiden festbleibenden speciellen Complexe darstellen. S'^9 bedeutet die Polarreciprocität $1\beta_1$), S'^3 die inverse Polarreciprocität $1\beta_2$) in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$, während S'^6 die Inversion darstellt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{l} S' = [\overline{-3\;\;4\;-1^*\;\;2}]_{64}, \quad S'^5 = [\overline{-3\;-4\;\;1^*\;\;2}]_{69} \\ S'^{11} = [\overline{3\;\;4\;-1^*\;-2}]_{19}, \quad S'^7 = [\overline{3\;-4\;\;1^*\;-2}]_{64} \end{array} \Big\} \begin{array}{l} S'^3 = [\overline{-1\;-2\;-3\;-4}]_1 \\ S'^9 = [\overline{1\;\;2\;\;3\;\;4}]_1 \end{array} \\ S'^2 = [3\;4\;-1^*\;-2]_{69} = c_{(-60^0)}\; c'_{(-60^0)}, \quad S'^4 = [3\;-4\;1^*\;-2]_{64} = c_{(-120^0)}\; c'_{(-120^0)} \\ S'^{10} = [-3\;4\;-1^*\;2]_{64} = c_{(60^0)}\; c'_{(60^0)}\;, \quad S'^8 = [-3\;-4\;1\;2^*]_{69} = c_{(120^0)}\; c'_{(120^0)} \\ \qquad\qquad S'^6 = [-1\;-2\;-3\;-4]_1 . \end{array}\right\} \text{vgl. das Beispiel 1) zu } 5\alpha_1),\, 5\alpha_2).$$

$6\beta_1$) 4.72 = 288 zehnzählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder vier Punkte $\mathfrak{g}_0$, vier Hauptkugeln χ_0, ein reelles Hauptkreispaar g, g' und zwei imaginäre Hauptkreispaare g_0 zu Kanten hat (vgl. § 31 4 a) und § 47 6 B)). Die geraden Potenzen von S' bedeuten die einfachen fünfzähligen Drehungen um einen Hauptkreis g (vergl. unter $6\alpha_1$)

dieses §), S'^5 bedeutet die Polarreciprocität $1\beta_1$). Die Elemente des Haupttetraeders entsprechen den in § 47 unter 6 B) angegeben.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll} S' = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ \ 1}]_{17}, & S'^3 = [\overline{-3\ \ 2\ \ 4\ \ -1^*}]_{19} \\ S'^9 = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ \ 1}]_{16}, & S'^7 = [\overline{-3\ \ -2\ \ 4\ \ 1}]_{18} \end{array}\right\} S'^5 = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1, \\ \left.\begin{array}{ll} S'^2 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{16} = g_{(-72^0)}, & S'^4 = [-3\ -2\ 4\ 1]_{18} = g_{(-144^0)} \\ S'^8 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{17} = g_{(72^0)}, & S'^6 = [-3\ 2\ 4\ -1^*]_{19} = g_{(144^0)} \end{array}\right\} \text{vgl. Beispiel 1) zu } 6\alpha_1) \end{array}\right\} \text{(vgl. § 47 Beispiel 1) zu } 6B).$$

$6\beta_2$) 4 . 72 = 288 zehnzählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bezw. dasselbe wie unter $6\beta_1$) ist. Die geraden Potenzen von S' bedeuten wiederum die einfachen fünfzähligen Drehungen um g, S'^5 dagegen bedeutet die inverse Polarreciprocität $1\beta_2$).

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} S' = [\overline{-4\ -3\ -2\ -1}]_{17}, & S'^3 = [\overline{3\ \ -2\ \ -4\ \ 1^*}]_{19} \\ S'^9 = [\overline{-4\ -3\ -2\ -1}]_{16}, & S'^7 = [\overline{3\ \ 2\ \ -4\ \ -1}]_{18} \end{array}\right\} S'^5 = [\overline{-1\ \ -2\ \ -3\ \ -4}]_1$$

S'^2, S'^8; S'^4, S'^6 wie im Beispiel zu $6\beta_1$).

$7\beta_1$) und $7\beta_2$) 8 . 12 = 96 zwanzigzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{K}_\infty$ (vgl. § 31 5 a) und § 47 7 B)). S'^4, S'^8, S'^{12}, S'^{16} bedeuten die fünfzähligen, S'^2, S'^6, S'^{14}, S'^{18} die zehnzähligen Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar g_0 bilden (vgl. $7\alpha_1$) und $7\alpha_2$)) und welche für die Correlationen die Leithauptkreise der beiden festbleibenden speciellen Complexe darstellen. S'^{15} bedeutet die Polarreciprocität $1\beta_1$), S'^5 die inverse Polarreciprocität $1\beta_2$) in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$, während S'^{10} die Inversion darstellt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\left|\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} S' = [\overline{4\ \ 3\ \ -2\ \ -1^*}]_{70}, & S'^3 = [\overline{4\ \ 3\ \ -2\ \ -1^*}]_{67} \\ S'^{19} = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*}]_{64}, & S'^{17} = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*}]_{73} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} S'^7 = [\overline{-4\ -3\ -2\ -1^*}]_{73}, & S'^9 = [\overline{-4\ -3\ -2\ -1^*}]_{64} \\ S'^{13} = [\overline{-4\ -3\ \ 2\ \ 1^*}]_{67}, & S'^{11} = [\overline{-4\ -3\ \ 2\ \ 1^*}]_{70} \end{array}\right. \end{array}\right|\ \begin{array}{l} S'^5 = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1 \\ S'^{15} = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1; \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \begin{array}{ll} S'^2 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*]_{64} = g_{(-36^0)}\, g'_{(-36^0)}, & S'^4 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*]_{73} = g_{(-72^0)}\, g'_{(-72^0)} \\ S'^{18} = [4\ \ 3\ \ -2\ \ -1^*]_{70} = g_{(36^0)}\, g'_{(36^0)}, & S'^{16} = [4\ \ 3\ \ -2\ \ -1^*]_{67} = g_{(72^0)}\, g'_{(72^0)} \\ S'^6 = [-4\ -3\ \ 2\ \ 1^*]_{67} = g_{(-108^0)}\, g'_{(-108^0)}, & S'^8 = [-4\ -3\ \ 2\ \ 1^*]_{70} = g_{(-144^0)}\, g'_{(-144^0)} \\ S'^{14} = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{73} = g_{(108^0)}\, g'_{(108^0)}, & S'^{12} = [-4\ -3\ -2\ -1^*]_{64} = g_{(144^0)}\, g'_{(144^0)} \end{array} \\ \qquad\qquad S'^{10} = [-1\ -2\ -3\ --4]_1 . \end{array}\right\} \text{vgl. das Beispiel zu } 7\alpha_1),\ 7\alpha_2). \end{array}\right\} \text{Vgl. das Beispiel zu § 47 } 7B).$$

$8\beta_1$) und $8\beta_2$) $8.72 = 576$ zwanzigzählige allgemeine Correlationen (vergl. § 31 6β) und § 47 8 B)), deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$, vier Hauptkugeln χ_0, ein reelles Hauptkreispaar g, g' und zwei imaginäre Hauptkreispaare g_0 zu Kanten hat. Dieses Haupttetraeder ist dasselbe, wie für die zehnzähligen Doppeldrehungen $8\alpha_1$), $8\alpha_2$), deren Schraubenaxen g, g' sind und welche durch die Potenzen

$$S'^2,\ S'^{18};\ S'^4,\ S'^{16};\ S'^6,\ S'^{14};\ S'^8,\ S'^{12}$$

dargestellt sind. S'^{15} bedeutet die Polarreciprocität $1\beta_1$), S'^5 die inverse Polarreciprocität $1\beta_2$) in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$, während S'^{10} die Inversion darstellt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} \begin{cases} S' = [\overline{-4\ 1\ -3\ 2}]_{47}, \\ S'^{19} = [\overline{-4\ 1^*\ 3\ -2}]_{41}, \end{cases} \begin{cases} S'^3 = [\overline{-3\ 4\ 1^*\ -2}]_{22} \\ S'^{17} = [\overline{-3\ -4\ 1\ 2}]_{32} \end{cases} \\ \begin{cases} S'^7 = [\overline{3\ 4\ -1\ -2}]_{32}, \\ S'^{13} = [\overline{3\ -4\ -1^*\ 2}]_{22}, \end{cases} \begin{cases} S'^9 = [\overline{4\ -1^*\ -3\ 2}]_{41} \\ S'^{11} = [\overline{4\ -1\ 3\ -2}]_{47} \end{cases} \end{array}\right| \begin{array}{l} S'^5 = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1 \\ S'^{15} = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1; \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} \begin{cases} S'^2 = [-4\ 1^*\ 3\ -2]_{41} = g_{(-36^0)}\ g'_{(-108^0)}, \\ S'^{18} = [-4\ 1\ -3\ 2]_{47} = g_{(36^0)}\ g'_{(108^0)}, \end{cases} \begin{cases} S'^4 = [-3\ -4\ 1\ 2]_{32} = g_{(72^0)}\ g'_{(144^0)} \\ S'^{16} = [-3\ 4\ 1^*\ -2]_{22} = g_{(72^0)}\ g'_{(-144^0)} \end{cases} \\ \begin{cases} S'^6 = [3\ -4\ -1^*\ 2]_{22} = g_{(-108^0)}\ g'_{(36^0)}; \\ S'^{14} = [3\ 4\ -1\ -2]_{32} = g_{(108^0)}\ g'_{(-36^0)}, \end{cases} \begin{cases} S'^8 = [4\ -1\ 3\ -2]_{47} = g_{(-144^0)}\ g'_{(-72^0)} \\ S'^{12} = [4\ -1^*\ -3\ 2]_{41} = g_{(144^0)}\ g'_{(72^0)} \end{cases} \\ \qquad\qquad S'^{10} = [-1\ -2\ -3\ -4]_1. \end{array}\right\} \text{vgl. das Beispiel zu } 8\alpha_1),\ 8\alpha_2) \end{array}\right\} \text{(vgl. das Beispiel zu § 47 } 8B).$$

$9\beta_1$) und $9\beta_2$) $16.120 = 1920$ sechzigzählige allgemeine Correlationen (vgl. § 31 6 bβ) und § 47 8 B)), deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{g}_0^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}_0^{(\mathfrak{g})}$, vier Hauptkugeln $\chi_0^{(\gamma)} = \gamma_0^{(\chi)}$, ein reelles Hauptkreispaar $g^{(c)} = c^{(g)}$ und je ein imaginäres Hauptkreispaar g_0 und c_0 zu Kanten hat und mit demjenigen der dreissigzähligen Doppeldrehungen $9\alpha_1$) und $9\alpha_2$) übereinstimmt. Diese dreissigzähligen Doppeldrehungen sind durch diejenigen Potenzen von S' dargestellt, deren Exponenten das Doppelte der Zahlen prim zu 30 und das Vierfache der Zahlen prim zu 15 betragen, und zwar entsprechen je zweien Potenzen $S'^{2\lambda}$, $S'^{2(30-\lambda)}$ die Potenzen $S^{(30-\lambda)}$, S^λ in $9\alpha_1$), $9\alpha_2$), wobei $\lambda = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ ist. Diejenigen Potenzen von S', deren Exponenten Vielfache von 6 resp. von 10 sind, stellen die zehn- resp. sechszähligen Doppeldrehungen $7\alpha_1$), α_2) resp. $5\alpha_1$), α_2) dar, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit dem imaginären Hauptkreispaar g_0 bilden, und zwar entsprechen auch hier je zweien Potenzen $S'^{2\lambda}$, $S'^{2(30-\lambda)}$ die Potenzen $S^{30-\lambda}$, S^λ in $9\alpha_1$), α_2) für $\lambda = 3, 6, 9, 12$ und $\lambda = 5, 10$. S'^{30} stellt die Inversion dar.

Die sechzigzähligen Correlationen sind durch die Potenzen von S', deren Exponenten prim zu 60 sind, dargestellt, während diejenigen Potenzen von S', deren Exponenten ungerade Vielfache von 3 resp. von 5 sind, die 20-zähligen resp. die 12-zähligen Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{K}_\infty$ 7β_1), β_2) resp. 5β_1), β_2) bedeuten; S'^{15} stellt die inverse, S'^{45} die directe Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$ dar.

Beispiel:

$S' = [\overline{1\ -3\ 4\ -2}]_{29}$,	$S'^7 = [\overline{2\ 1\ -4\ -3}]_{48}$		
$S'^{59} = [\overline{1\ -3\ -4\ 2}]_{27}$,	$S'^{53} = [\overline{2\ -1^*\ -4\ 3}]_{38}$		
$S'^{13} = [\overline{-4\ -2\ 1\ 3}]_{40}$,	$S'^{11} = [\overline{-4\ 3\ -2\ 1^*}]_{23}$		
$S'^{47} = [\overline{-4\ 2\ 1^*\ -3}]_{46}$,	$S'^{49} = [\overline{-4\ 3\ 2\ -1}]_{33}$	vgl. das Beispiel zu 9α_1), α_2)	
$S'^{19} = [\overline{4\ -3\ -2\ 1}]_{33}$,	$S'^{17} = [\overline{4\ -2\ -1^*\ 3}]_{46}$		
$S'^{41} = [\overline{4\ -3\ 2\ -1^*}]_{23}$,	$S'^{43} = [\overline{4\ 2\ -1\ -3}]_{46}$		
$S'^{23} = [\overline{-2\ 1^*\ 4\ -3}]_{38}$,	$S'^{29} = [\overline{-1\ 3\ 4\ -2}]_{27}$		
$S'^{37} = [\overline{-2\ -1\ 4\ 3}]_{48}$,	$S'^{31} = [\overline{-1\ 3\ -4\ 2}]_{29}$		(Vgl. Beispiel 1) zu 9A) in § 47).
$S'^3 = [\overline{4\ 3\ -2\ -1^*}]_{70}$,	$S'^9 = [\overline{4\ 3\ -2\ -1^*}]_{67}$		
$S'^{57} = [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{64}$,	$S'^{51} = [\overline{4\ 3\ 2\ 1}]_{73}$	vgl. das Beispiel zu 7β_1), β_2)	
$S'^{21} = [\overline{-4-3-2-1^*}]_{73}$,	$S'^{27} = [\overline{-4-3-2-1^*}]_{64}$		
$S'^{39} = [\overline{-4\ -3\ 2\ 1^*}]_{67}$,	$S'^{33} = [\overline{-4\ -3\ 2\ 1^*}]_{70}$		
$S'^5 = [\overline{-4\ 3\ -2\ 1^*}]_{62}$,	$S'^{25} = [\overline{-4-3-2-1^*}]_{61}$	vgl. das Beispiel zu 9α_1), α_2) und 5β_1), β_2)	
$S'^{55} = [\overline{4\ 3\ 2\ 1^*}]_{61}$,	$S'^{35} = [\overline{4\ -3\ 2\ -1^*}]_{62}$		
$S'^{15} = [\overline{-1-2-3-4}]_1$	. . . (1β_2)		
$S'^{45} = [\overline{1\ 2\ 3\ 4}]_1$	. . . (1β_1)		

Die den Potenzen von S' mit geraden Exponenten entsprechenden eigentlichen Bewegungen sind die in dem Beispiel zu 9α_1), α_2) aufgeführten, wobei die oben angegebenen Beziehungen zwischen den Potenzen von S' und S gelten.

10β_1) und 10β_2) 8 . 180 = 1440 zwanzigzählige Correlationen mit zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{F}^{(b)}$ (vgl. § 31 6a) und § 47 10B)); diese Kernfläche ist die Projection je einer Fläche $F^{(b)}$ (vgl. (55b) in § 45). Diejenigen Potenzen von S', deren Exponenten prim zu 20 sind, bedeuten zwanzigzählige Correlationen, die Potenzen mit den Exponenten 5 und 15 bedeuten zwei zusammengehörige vierzählige Null-Correlationen, deren Complex einer der 30 sphärischen Complexe $\mathfrak{C}_{(1)}$ ist (vergl. 3β_1), β_2)), während die geraden Potenzen von S', ebenso wie in 10α_1), α_2) die geraden

Potenzen von $S = g^{(b)}_{(18^0)}\, g^{(b)'}_{(\pm 162^0)}$ zehnzählige Doppeldrehungen darstellen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar g_0 bilden (vgl. $7\alpha_1$), α_2)); S'^{10} bedeutet die Inversion.

Beispiel (vgl. das Beispiel zu $10\alpha_1$), α_2):

$$\left|\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} S' = [\overline{3\ -4\ -1^*\ 2}]_{73}, \\ S'^{19} = [\overline{-3\ 4\ -1^*\ 2}]_{67}, \end{matrix}\right\} \begin{matrix} S'^{11} = [\overline{-3\ 4\ 1^*\ -2}]_{73} \\ S'^{9} = [\overline{3\ -4\ 1^*\ -2}]_{67} \end{matrix} \\ \left\{\begin{matrix} S'^{3} = [\overline{3\ -4\ -1^*\ 2}]_{64}, \\ S'^{17} = [\overline{-3\ 4\ -1^*\ 2}]_{70}, \end{matrix}\right\} \begin{matrix} S'^{13} = [\overline{-3\ 4\ 1^*\ -2}]_{64} \\ S'^{7} = [\overline{3\ -4\ 1^*\ -2}]_{70} \end{matrix} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathfrak{F}^{(b)} \ldots (\mathfrak{x}_1 \cos\varphi - \mathfrak{x}_3 \sin\varphi)^2 + \mathfrak{x}_4^2 + {}_6^2 \equiv \\ \equiv (\mathfrak{x}_1 \sin\varphi + \mathfrak{x}_3 \cos\varphi)^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_5^2 = 0 \\ (\text{vgl. } \S\ 47\ \ 10\,B)). \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} S'^{5} = [\overline{2\ -1\ -4\ 3}]_1 \\ S'^{15} = [\overline{-2\ 1\ 4\ -3}]_1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{vierzählige Null-Correlationen} \\ \text{mit Complex } \mathfrak{x}_2 = 0, \end{matrix}$$

S'^{2p} wie im Beispiel $10\alpha_1$), α_2) S^{2p}.

$11\beta_1$) und $11\beta_2$) $4 \cdot 300 = 1200$ zwölfzählige Correlationen zusammenfallender Kernfläche $\mathfrak{F}^{(c)}$ (vergl. § 31 6a) und § 47 11B)) diese Kernfläche ist die Projection je einer Fläche $F^{(c)}$ (vgl. (55c) in § 45).;

Die Potenzen von S' mit Exponenten prim zu 12 bedeuten zwölfzählige Correlationen, S'^3 und S'^9 bedeuten zwei zusammengehörige vierzählige Nullcorrelationen mit Complex $\mathfrak{C}_{(1)}$ (vergl. $3\beta_1$), β_2)), während die geraden Potenzen von S' ebenso wie in $11\alpha_1$), α_2) die geraden Potenzen von $S = c^{(b)}_{(30^0)}\, c^{(b)'}_{(\pm 150^0)}$ sechszähhlige Doppeldrehungen darstellen, deren Schraubenaxen eine lineare Congruenz mit einem imaginären Hauptkreispaar c_0 bilden (vgl. $5\alpha_1$), α_2)); S'^6 bedeutet die Inversion.

Beispiel (vgl. das Beispiel zu $11\alpha_1$), α_2):

$$\left\{\begin{matrix} S' = [\overline{4\ -3\ -2\ 1^*}]_{74}, \\ S'^{11} = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ \ 1^*}]_{70}, \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} S'^{7} = [\overline{-4\ 3\ 2\ -1^*}]_{74} \\ S'^{5} = [\overline{-4 -3 -2 -1^*}]_{70} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \mathfrak{F}^{(c)} \ldots (\mathfrak{x}_1 \sin\psi + \mathfrak{x}_5 \cos\psi)^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 \equiv \\ \equiv (\mathfrak{x}_1 \cos\psi - \mathfrak{x}_5 \sin\psi)^2 + \mathfrak{x}_4^2 + \mathfrak{x}_6^2 = 0 \\ (\text{vgl. } \S\ 47\ \ 11\,B_3), \end{matrix}$$

S'^{2p} wie im Beispiel $11\alpha_1$), α_2) S^{2p}.

Damit sind die 7200 eigentlichen Correlationen, welche die regulären Gewebe $\boldsymbol{G}_4$ und $\boldsymbol{G}'_4$ in sich überführen, vollständig aufgestellt.

$B^{(2)}$) Correlationen, den **uneigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 32 und § 50 12B) . . 15B).

$12\beta_1$) 60 uneigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die 60 reellen Flächen $\mathfrak{F}^{(2)}$, die Projectionen der Flächen $F^{(2)}$

(vgl. § 45 II); dieselben sind Kleinkugeln (nebst Gegenkugeln) (vgl. § 32 1) und § 50 12 B)).

Beispiele:

$S' = [\overline{-1\ 4\ 2\ 3}]_5$ (Vgl. Beispiel zu $12 B_3$) in § 50).

$$\mathfrak{F}^{(2)} \ldots \left.\begin{matrix} (\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_{16})^2+(\mathfrak{x}_3-\mathfrak{x}_{24})^2+(\mathfrak{x}_5+\mathfrak{x}_8)^2 \\ \equiv (\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_{15})^2+(\mathfrak{x}_4-\mathfrak{x}_{23})^2+(\mathfrak{x}_6+\mathfrak{x}_7)^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

$S' = [\overline{2\ -1\ 4\ 3}]_2$ (Vgl. Beispiel zu $12 B_4$) in § 50).

$$\mathfrak{F}^{(2)} \ldots \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_6+\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3-\mathfrak{x}_4\,\mathfrak{x}_5=0.$$

u. s. f.

$12\beta_2$) 60 inverse uneigentliche Polar-Correlationen. Flächen wie unter $12\beta_1$).

Beispiele: $S' = [\overline{1\ -4\ -2\ -3}]_5$,
$S' = [\overline{-2\ 1\ -4\ -3}]_2$

u. s. f.

$13\beta_1$) 2 . 450 = 900 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art (vgl. § 32 2a) und § 50 13 B)) mit reellem Axenpaar b, b'. Die Mittelpunkte und Hauptkugeln der festbleibenden sphärischen Strahlbüschel sind ein Punktpaar $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche von den Punkten $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{d}_k$ (vergl. $13\alpha_1$) um einen Achtelskreis abstehen, und ein Hauptkugelpaar β_i, β_k, die bez. unter 45° gegen die beiden auf einander senkrechten Hauptkugeln δ_i, δ_k geneigt sind. S' und S'^3 sind zwei zusammengehörige vierzählige Axencorrelationen; S'^2 bedeutet die Umwendung um $b = |\,\mathfrak{b}_i\ \mathfrak{b}_k\,|$.

Beispiel:

$$\left|\begin{matrix} S' = [\overline{2\ 1\ -4\ 3}]_4, & \mathfrak{b}_i \ldots\ 0 \quad \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad \frac{1}{2} \ldots \beta_i \\ S'^3 = [\overline{1\ 4\ -2\ 3}]_9, & \mathfrak{b}_k \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \ldots \beta_k \end{matrix}\right\} b \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad -2i \quad 1 \quad 0 \quad \operatorname{cotg}\varphi \quad 0$$

(vgl. Beispiel 2) zu 13 B) in § 50).

$$S'^2 = [2\ -1^*\ -4\ 3]_{70} = b_{(180^0)}.$$

$13\beta_2$) 2 . 450 = 900 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art, welche die inversen der unter $13\beta_1$) sind, insofern die Gegenpunkte $\mathfrak{b}'_i$, $\mathfrak{b}'_k$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln β_i, β_k auftreten.

Beispiel: $\left|\begin{matrix} S' = [\overline{-2\ -1\ 4\ -3}]_4, \\ S'^3 = [\overline{-1\ -4\ 2\ -3}]_9. \end{matrix}\right.$

$14\beta_1$) 2 . 600 = 1200 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen (vgl. § 32 2b), § 50 14 B)). Die Elemente des Haupttetraeders sind aus den in 14 B) § 50 angegebenen zu entnehmen: die beiden

imaginären Eckpunkte $\mathfrak{c}_0$ und Hauptkugeln γ_0 sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung $14\alpha_1$), die beiden reellen Eckpunkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ (die Projectionen der Punkte $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_k$) stehen von den Punkten $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{k}_l$ bez. um einen Achtelskreis ab und die beiden reellen Hauptkugeln π_i, π_k halbiren die 90^0 betragenden Neigungswinkel der Hauptkugeln β_i, $\varkappa_l$. S' und S'^5 bedeuten zwei zusammengehörige sechszählige Correlationen, S'^3 bedeutet die Polarcorrelation in Bezug auf eine Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$, während S'^2 und S'^4 die dreizähligen einfachen Drehungen um die Axe $c = |\,\mathfrak{p}_i\ \mathfrak{p}_k\,|$ darstellen.

Beispiel (vgl. Beispiel 2) zu $14B$) in § 50 und Beispiel 1) zu $14\alpha_1$).

$$\left\{\begin{array}{l} S' = [\overline{-4\ -3\ \ 2\ -1}]_{16} \\ S'^5 = [\overline{3\ -4\ \ 1^*\ \ 2}]_{52} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{Elemente des Haupttetraeders} \\ \text{u. s. w. wie im Beispiel 2) zu } 14B). \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S'^2 = [4\ -3\ \ 2\ -1^*]_{19} = c_{(-120^0)} \\ S'^4 = [-4\ -3\ \ 2\ \ 1^*]_{16} = c_{(120^0)} \end{array}\right\}$$

$$S'^3 = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ -4}]_1 \ \ldots\ \mathfrak{F}^{(2)} \ \ldots\ (\mathfrak{x}_1 \pm \mathfrak{x}_2)^2 + (\mathfrak{x}_3 \pm \mathfrak{x}_4)^2 + (\mathfrak{x}_5 \mp \mathfrak{x}_6)^2 = 0.$$

$14\beta_2$) 2 . 600 = 1200 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen der unter $14\beta_1$) sind. Es treten $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{p}'_k$ statt $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ auf, S'^3 bedeutet die inverse Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(2)}$, während S'^2, S'^4 dieselbe Bedeutung wie unter $14\beta_1$) haben.

$$\text{Beispiel:}\ \left\{\begin{array}{l} S' = [\overline{4\ \ 3\ -2\ \ 1}]_{16} \\ S'^5 = [\overline{-3\ 4\ -1^*\ -2}]_{52} \end{array}\right\} \quad S'^3 = [\overline{-1\ -2\ -3\ 4}]_1 .$$

$15\beta_1$) 4 . 360 = 1440 zehnzählige allgemeine uneigentliche Correlationen (vergl. § 32 2b), § 50 15 B)). Die Elemente des Haupttetraeders ergeben sich aus den in § 50 unter 15 B) aufgeführten: die beiden imaginären Eckpunkte $\mathfrak{g}_0$ und Hauptkugeln χ_0 stimmen mit denjenigen für die entsprechende Drehspiegelung $15\,\alpha_1$) überein, die beiden reellen Eckpunkte $\mathfrak{l}_k$, $\mathfrak{l}_m$ (die Projectionen der Punkte $\mathfrak{L}_k$, $\mathfrak{L}_m$) stehen von den Punkten $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{b}_l$ bezw. um einen Achtelskreis ab. S', S'^9; S'^3, S'^7 bedeuten vier zusammengehörige zehnzählige Correlationen, S'^5 bedeutet die Polarcorrelation in Bezug auf eine Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$, während S'^2, S'^8; S'^4, S'^6 die fünfzähligen einfachen Drehungen um die Axe $g = |\,\mathfrak{l}_k\ \mathfrak{l}_m\,|$ darstellen.

Beispiel (vgl. Beispiel 1) zu $15B$) in § 50 und Beispiel zu $15\alpha_1$)):

$$\left\{\begin{array}{l} S' = [\overline{-3\ -2\ \ 4\ -1}]_{18},\ S'^3 = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ -1}]_{16} \\ S'^9 = [\overline{-3\ \ 2\ \ 4\ \ 1^*}]_{19},\ S'^7 = [\overline{4\ \ 3\ \ 2\ -1}]_{17} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Elemente des Haupttetraeders u. s. w.} \\ \text{wie in dem Beispiel 1) zu } 15B). \end{array}$$

$$S'^5 = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ -4}]_1 \ \ldots\ \mathfrak{F}^{(2)} \ \ldots\ (\mathfrak{x}_1 \pm \mathfrak{x}_2)^2 + (\mathfrak{x}_3 \pm \mathfrak{x}_4)^2 + (\mathfrak{x}_5 \mp \mathfrak{x}_6)^2 = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} S'^2 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{17} = g_{(72^0)}\ ,\ S'^4 = [-3\ \ 2\ \ 4\ -1^*]_{19} = g_{(144^0)} \\ S'^8 = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]_{16} = g_{(-72^0)},\ S'^6 = [-3\ -2\ \ 4\ \ 1]_{18} = g_{(-144^0)} \end{array}\right\} .$$

$15\beta_2$) $4 \,.\, 360 = 1440$ zehnzählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen der unter $15\beta_1$) sind. Es treten $\mathfrak{l}'_k$, $\mathfrak{l}'_m$ statt $\mathfrak{l}_k$, $\mathfrak{l}_m$ auf, S'^5 bedeutet die inverse Polarcorrelation in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(2)}$, während die geraden Potenzen von S' dieselbe Bedeutung wie unter $15\beta_1$) haben.

Beispiel (vgl. $15\beta_1$):

$$\left.\begin{array}{ll} S' = [\overline{3 \;\; 2 \; -4 \;\; 1}]_{18}, & S'^3 = [\overline{-4 \; -3 \; -2 \;\; 1}]_{16} \\ S'^9 = \lfloor\overline{3 -2 -4 -1^*}]_{19}, & S'^7 = [\overline{-4 \; -3 \; -2 \;\; 1}]_{17} \end{array}\right\} \; S'^5 = [\overline{-1 \; -2 \; -3 \;\; 4}]_1 \,.$$

Damit sind schliesslich auch die 7200 uneigentlichen Correlationen, welche die regulären Gewebe G_4 und G'_4 in sich überführen, vollständig aufgestellt.

§ 54.
Uebertragung der in § 51 behandelten speciellen Figur eines Pentagons (Pentaeders) auf den dreidimensionalen sphärischen Raum S_3.

Die beiden regulären sphärischen Gewebe G_4 und G'_4, welche durch die in § 52 behandelte Uebertragung der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ auf S_3 sich ergaben, enthalten nun auch das sphärische Gewebe, welches durch Anwendung desselben Projectionsverfahrens aus der in § 51 genauer untersuchten speciellen Figur eines Pentagons (bez. Pentaeders) resultirt.

1) Den 10 ausgezeichneten Ebenen B, welche durch $\varrho_1 \ldots \varrho_{10}$ ((72δ) in § 51) bezeichnet wurden, entsprechen bei der Centralprojection 10 Hauptkugeln $\varrho_1^{(0)} \ldots \varrho_{10}^{(0)}$, welche sich

zu je 6 in 5 Punkten $\mathfrak{T}_0^{(0)}, \mathfrak{T}_1^{(0)}, \mathfrak{T}_2^{(0)}, \mathfrak{T}_3^{(0)}, \mathfrak{T}_4^{(0)}$ und deren Gegenpunkten $\mathfrak{T}_0^{(0)\prime}, \mathfrak{T}_1^{(0)\prime}, \mathfrak{T}_2^{(0)\prime}, \mathfrak{T}_3^{(0)\prime}, \mathfrak{T}_4^{(0)\prime}$,

und zu je 4 in 10 Punkten $\mathfrak{R}_1^{(0)} \ldots \mathfrak{R}_{10}^{(0)}$ und deren Gegenpunkten $\mathfrak{R}_1^{(0)\prime} \ldots \mathfrak{R}_{10}^{(0)\prime}$, nämlich den Projectionen der Punkte $\mathfrak{T}_0 \ldots \mathfrak{T}_4$ und $\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_{10}$ schneiden und welche zu je dreien durch die 10 Hauptkreise $K_1^{(0)} \ldots K_{10}^{(0)}$

und „ „ zweien „ „ 15 „ $l_1^{(0)} \ldots l_{15}^{(0)}$,

nämlich durch die Projectionen der Geraden $K_1 \ldots K_{10}$ (72η) und $l_1 \ldots l_{15}$ (72ϑ) hindurchgehen.

Die 10 Punkte $\mathfrak{r}_1^{(0)} \ldots \mathfrak{r}_{10}^{(0)}$ (nebst Gegenpunkten $\mathfrak{r}_1^{(0)\prime} \ldots \mathfrak{r}_{10}^{(0)\prime}$), welche als die Projectionen der 10 ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_{10}$ ((72δ) in § 51)

auftreten, sind die Pole (Gegenpole) zu den Hauptkugeln $\varrho_1^{(0)} \dots \varrho_{10}^{(0)}$, während die 5 Hauptkugeln $\tau_0^{(0)} \dots \tau_4^{(0)}$ und die 10 Hauptkugeln $P_1^{(0)} \dots P_{10}^{(0)}$, die Projectionen der 5 Ebenen $\tau_0 \dots \tau_4$ und der 10 Ebenen $P_1 \dots P_{10}$, bezw. die Polarkugeln zu den Punkten $\mathfrak{T}_0^{(0)} \dots \mathfrak{T}_4^{(0)}$ und den Punkten $\mathfrak{R}_1^{(0)} \dots \mathfrak{R}_{10}^{(0)}$ (nebst Gegenpunkten) darstellen. Die 10 Hauptkreise $K_1^{(0)\prime} \dots K_{10}^{(0)\prime}$ und die 15 Hauptkreise $l_1^{(0)\prime} \dots l_{15}^{(0)\prime}$, welche bezw. als die Projectionen der 10 Geraden $K'_1 \dots K'_{10}$ und der 15 Geraden $l'_1 \dots l'_{15}$ auftreten, sind die reciproken Polaren zu den 10 Hauptkreisen $K_1^{(0)} \dots K_{10}^{(0)}$ und bez. den 15 Hauptkreisen $l_1^{(0)} \dots l_{15}^{(0)}$.

Den in $(72\varkappa_1) \dots (72\varkappa_6)$ in § 51 betrachteten 6 Geradenpaaren

$$G_1 \dots G_6 \text{ und } G'_1 \dots G'_6$$

entsprechen als Projectionen 6 Hauptkreispaare $g_1^{(0)} \dots g_6^{(0)}$ und $g_1^{(0)\prime} \dots g_6^{(0)\prime}$, in welchen sich je 5 der 30 Hauptkugeln $\beta^{(0)}$ schneiden, welche den 30 in (72γ) bezeichneten Ebenen β entsprechen, und welche je 5 der 30 Punkte $\mathfrak{B}^{(0)}$ (nebst Gegenpunkten) enthalten, welche die Projectionen der 30 in (72γ) bezeichneten Punkte $\mathfrak{B}$ sind.

Die Anordnung und Gruppirung der auf jeder der Hauptkugeln

$$\varrho_1^{(0)} \dots \varrho_{10}^{(0)},\ \tau_0^{(0)} \dots \tau_4^{(0)},\ P_1^{(0)} \dots P_{10}^{(0)}$$

auftretenden Hauptkreise und Punkte ist derjenigen der Geraden und Punkte, welche in den Ebenen $\varrho_1 \dots \varrho_{10}$, $\tau_0 \dots \tau_4$, $P_1 \dots P_{10}$ auftreten, entsprechend (vgl. § 51 unter 1) am Ende).

2) Für den hier in Betracht kommenden Fall der Regelmässigkeit (vgl. § 52 unter 2)) werden die 5 sphärischen Polartetraeder $T^{(0)} \dots T^{(4)}$ (vgl. § 51 $(72\iota_1) \dots (72\iota_5)$) zu orthogonalen, die drei einer Hauptkugel $\varrho_1^{(0)} \dots \varrho_{10}^{(0)}$ angehörigen Hauptkreise $K^{(0)}$ bilden ein reguläres sphärisches Dreieck mit Eckpunkten $\mathfrak{T}^{(0)}$, dessen Seite 2ζ, dessen Winkel 2η beträgt (vgl. (83ζ) in § 52), während die drei Hauptkreise $l^{(0)}$ die Symmetrielinien des Dreiecks (wie auch der Neben-, Scheiteldreiecke und des Gegendreiecks) darstellen, so dass die drei Punkte $\mathfrak{R}^{(0)}$ (nebst Gegenpunkten) die Mitten der Seiten, der vierte Punkt $\mathfrak{R}^{(0)}$ den Mittelpunkt des regulären Dreiecks bildet. Vgl. Fig. 8, in welcher das reguläre Dreieck mit den Eckpunkten D_{20}, D_{17}, D_6, den Seitenmitten E_8, E_9, E_{23} und dem Mittelpunkte C_1 eine solche Figur auf der Hauptkugel $\varrho_5^{(0)}$ darstellt.

In Fig. **11** entsprechen

die Punkte $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ [1]) bezw. den Punkten D_{20}, D_{17}, D_6 der Fig. 8,

" " $\mathfrak{R}_6$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_1$ " " " E_8, E_9, E_{23} " " ,

der Punkt $\mathfrak{R}'_5$ entspricht dem Punkte C_1 der Fig. 8.

Die harmonische Polare $K_5^{(0)'}$ des Punktes $\mathfrak{R}'_5$ ist der Aequator desselben und enthält die Punkte $\mathfrak{r}_1^{(0)} = \mathfrak{B}_{36}$, $\mathfrak{r}_2^{(0)} = \mathfrak{B}_{34}$, $\mathfrak{r}_6^{(0)} = \mathfrak{B}_4$ (nebst Gegenpunkten), welche bezw. den Punkten B_{15}, B_{12}, B_{14} der Fig. 8 entsprechen.

Auf jedem der drei Symmetriehauptkreise $l^{(0)}$ treten je zwei Punkte $\mathfrak{B}^{(0)}$, die Durchstossungspunkte je zweier Kanten $g^{(0)}$ und $g^{(0)'}$ mit der Hauptkugel $\varrho^{(0)}$, und je ein Punkt $\mathfrak{L}^{(0)}$ auf, durch welchen zwei Hauptkreise $l^{(0)'}$ hindurchgehen. Der sphärische Abstand der beiden Punkte $\mathfrak{B}^{(0)}$ von dem Eckpunkte $\mathfrak{T}^{(0)}$ beträgt 45^0 und 135^0, der Halbirungspunkt $\mathfrak{L}^{(0)}$ des von ihnen eingeschlossenen Quadranten steht also von $\mathfrak{T}^{(0)}$ ebenfalls um einen Quadranten ab.

In Fig. **11** entsprechen für die Hauptkugel $\varrho_5^{(0)}$

die auf dem Hauptkreise $l_2^{(0)} = | \mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{R}_6 |$ liegenden Punkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{L}_2$

bez. den auf $| D_{20}\ C_1\ E_8 |$ liegenden Punkten B_3, B_7 und D_1,

die auf dem Hauptkreise $l_4^{(0)} = | \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{R}_2 |$ liegenden Punkte $\mathfrak{B}_{26}$, $\mathfrak{B}_{30}$ und $\mathfrak{L}_4$

bez. den auf $| D_{17}\ C_1\ E_9 |$ liegenden Punkten B_2, B_{11} und D_4,

die auf dem Hauptkreise $l_9^{(0)} = | \mathfrak{T}_2\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{R}_1 |$ liegenden Punkte $\mathfrak{B}_{28}$, $\mathfrak{B}_{32}$ und $\mathfrak{L}_9$

bez. den auf $| D_6\ C_1\ E_{23} |$ liegenden Punkten B_1, B_{13} und D_5 der Fig. 8.

Dabei sind die Punkte $\mathfrak{B}^{(0)}$ und $\mathfrak{L}^{(0)}$ die Schnittpunkte folgender Hauptkreise (vgl. § 51 (72ι) und (72$\varkappa$)):

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{B}_1^{(0)} = (l_2^{(0)},\ g_1^{(0)'},\ g_2^{(0)'}), & \mathfrak{B}_3^{(0)} = (l_2^{(0)},\ g_1^{(0)},\ g_2^{(0)}); & \mathfrak{L}_2^{(0)} = (l_2^{(0)},\ l_1^{(0)'},\ l_3^{(0)'}), \\ \mathfrak{B}_{26}^{(0)} = (l_4^{(0)},\ g_5^{(0)},\ g_4^{(0)'}), & \mathfrak{B}_{30}^{(0)} = (l_4^{(0)},\ g_5^{(0)'},\ g_4^{(0)}); & \mathfrak{L}_4^{(0)} = (l_4^{(0)},\ l_5^{(0)'},\ l_6^{(0)'}), \\ \mathfrak{B}_{28}^{(0)} = (l_9^{(0)},\ g_3^{(0)},\ g_6^{(0)'}), & \mathfrak{B}_{32}^{(0)} = (l_9^{(0)},\ g_3^{(0)'},\ g_6^{(0)}); & \mathfrak{L}_9^{(0)} = (l_9^{(0)},\ l_7^{(0)'},\ l_8^{(0)'}). \end{array}\right\} \quad (86)$$

Die Elemente eines der sechs rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, in welche das reguläre Dreieck $\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_2$ durch die Symmetriehauptkreise l zerlegt wird, sind z. B. für $\mathfrak{R}_1\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{R}'_5$:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{T}_1 = \zeta, & \mathfrak{T}_1\ \widehat{\mathfrak{R}'_5}\ \mathfrak{R}_1 = 60^0 \\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{R}'_5 = \varepsilon, & \mathfrak{R}'_5\ \widehat{\mathfrak{R}_1}\ \mathfrak{T}_1 = 90^0 \\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{R}_1 = \vartheta, & \mathfrak{R}_1\ \widehat{\mathfrak{T}_1}\ \mathfrak{R}'_5 = \eta \end{array}\right\} (86\alpha), \qquad \left.\begin{array}{c} \text{wobei } \cos 2\eta = -\frac{1}{3},\ \cos 2\zeta = -\frac{1}{4}, \\ \cos 2\varepsilon = -\frac{2}{3},\quad \cos\vartheta = \frac{2}{3} \\ \varepsilon = 45^0 + \psi,\ \vartheta = 90^0 - 2\psi, \\ 2\varepsilon + \vartheta = 180^0 \text{ ist.} \end{array}\right\} (86\beta)$$

[1]) In der Fig. **11** ist der Einfachheit wegen der obere Index (0) an den die Punkte bezeichnenden Buchstaben weggelassen.

Jedes Nebendreieck des regulären Dreiecks $\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_2$ zerfällt in zwei symmetrisch gleiche rechtwinklige Dreiecke, deren Elemente z. B. für $\mathfrak{R}_6\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}'_0$ sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{R}_6\ \mathfrak{T}_1 = \zeta, & \mathfrak{T}_1\ \widehat{\mathfrak{T}'_0}\ \mathfrak{R}_6 = \eta \\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}'_0 = 180^0-2\zeta, & \mathfrak{T}'_0\ \widehat{\mathfrak{R}_6}\ \mathfrak{T}_1 = 90^0 \\ \mathfrak{T}'_0\ \mathfrak{R}_6 = \varepsilon, & \mathfrak{R}_6\ \widehat{\mathfrak{T}_1}\ \mathfrak{T}'_0 = 180^0-2\eta \end{array}\right\} (86\gamma).$$

3) Die 10 Hauptkugeln $\varrho_1^{(0)} \ldots \varrho_{10}^{(0)}$ theilen den sphärischen Raum S_3 in 120 gleiche Elementartetraeder mit je zwei Eckpunkten $\mathfrak{T}^{(0)}$ und $\mathfrak{T}^{(0)'}$ und je zwei Eckpunkten $\mathfrak{R}^{(0)}$ und $\mathfrak{R}^{(0)'}$, so dass in jedem

der 5 Punkte $\mathfrak{T}^{(0)}$ $(\mathfrak{T}_0^{(0)'})$ je 24 solcher Elementartetraeder,
der 10 „ $\mathfrak{R}^{(0)}$ $(\mathfrak{R}^{(0)'})$ je 12 „ „

zusammenstossen.

Für den Fall der Regelmässigkeit sind die sphärischen Grenzflächen durch zwei der in (86α) und durch zwei der in (86γ) betrachteten rechtwinkligen sphärischen Dreiecke gebildet; sie werden durch die vier in Fig. **12** angegebenen Dreiecke dargestellt, welche gleichsam das Netz des Tetraeders constituiren.

Die Fig. **13** stellt eine schematische Zeichnung eines solchen Elementartetraeders $\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{T}'_3$ dar. Die rechtwinkligen Coordinaten der Eckpunkte, sowie diejenigen der Seitenflächen (Hauptkugeln) ϱ sind in (86δ) angegeben (vgl. (72ι₁), (72ι₄), (72ζ), (72δ) in § 51).

$$\left.\begin{array}{llllllllllll} \mathfrak{T}_0 \ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & , \beta_{36} = \varrho_1 \ldots [\mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{T}'_3] \ldots & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{1}{2} \\ \mathfrak{R}_1 \ldots & \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, & \beta_4 = \varrho_6 \ldots [\mathfrak{R}'_5\ \mathfrak{T}'_3\ \mathfrak{T}_0] \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathfrak{R}'_5 \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} & 0 & , \beta_{11} = \varrho_7 \ldots [\mathfrak{T}'_3\ \mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}_1] \ldots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \mathfrak{T}'_3 \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{2}} & 0 & , \beta_2 = \varrho_5 \ldots [\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}'_5] \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\} (86\delta).$$

Die Elemente des sphärischen Elementartetraeders sind:

Centriwinkel einer sphärischen Kante:	Hauptkreis:	Neigungswinkel der Hauptkugeln an dieser Kante:
$\overline{\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}_1} = \overline{\mathfrak{T}'_3\ \mathfrak{R}'_5} = \zeta$. . .	$K^{(0)}$	60^0
$\overline{\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}'_5} = \overline{\mathfrak{T}'_3\ \mathfrak{R}_1} = \varepsilon$. . .	$l^{(0)}$	90^0
$\overline{\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}'_3} = 180^0 - 2\zeta$	$K^{(0)}$	60^0
$\overline{\mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}'_5} = \vartheta$	$l^{(0)}$	90^0.

(86ε)

Die Neigungswinkel der Hauptkreise sind (vgl. (86α) und (86γ):

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}_1\ \widehat{\mathfrak{T}_0}\ \mathfrak{T}'_3 = \mathfrak{R}'_5\ \widehat{\mathfrak{T}'_3}\ \mathfrak{T}_0 = 180^0 - 2\eta \\ \mathfrak{T}'_3\ \widehat{\mathfrak{T}_0}\ \mathfrak{R}'_5 = \mathfrak{T}_0\ \widehat{\mathfrak{T}'_3}\ \mathfrak{R}_1 = \eta \\ \mathfrak{R}'_5\ \widehat{\mathfrak{T}_0}\ \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1\ \widehat{\mathfrak{T}'_3}\ \mathfrak{R}'_5 = \eta \end{array}\right| ,\quad \begin{array}{l} \mathfrak{T}'_3\ \widehat{\mathfrak{R}_1}\ \mathfrak{R}'_5 = \mathfrak{T}_0\ \widehat{\mathfrak{R}'_5}\ \mathfrak{R}_1 = 60^0 \\ \mathfrak{R}'_5\ \widehat{\mathfrak{R}_1}\ \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{R}_1\ \widehat{\mathfrak{R}'_5}\ \mathfrak{T}'_3 = 90^0 \\ \mathfrak{T}_0\ \widehat{\mathfrak{R}_1}\ \mathfrak{T}'_3 = \mathfrak{T}'_3\ \widehat{\mathfrak{R}'_5}\ \mathfrak{T}_0 = 90^0 \end{array}\right\} \quad (86\zeta).$$

Die Summe der 2 . 2 Grenzflächen eines Elementartetraeders beträgt 120^0 oder den 6ten Theil einer Hauptkugel, während die Summe der Umfänge der 2 . 2 Grenzdreiecke 720^0 oder zwei Hauptkreis-Peripherien ausmacht. Die Excesse der vier sphärischen Ecken betragen für

$$\left.\begin{array}{l} \text{die Ecken mit Scheitel } \mathfrak{T}_0 \text{ und } \mathfrak{T}'_3\text{: } 90^0+60^0+60^0-180^0 = 30^0 = \frac{1}{24} \text{ Kugel,} \\ \text{,, ,, ,, ,, } \mathfrak{R}_1 \text{ ,, } \mathfrak{R}'_5\text{: } 60^0+90^0+90^0-180^0 = 60^0 = \frac{1}{12} \text{ ,, ,} \end{array}\right| \quad (86\eta)$$

so dass als Summe der 4 Excesse 180^0 oder $\frac{1}{4}$ einer Hauptkugel resultirt. Für den Modulus des sphärischen Tetraeders ergiebt sich:

$$\frac{\delta}{d} = \frac{5}{6} = \sin^2\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86\vartheta)$$

4) Wenn je 24 in einem der 5 Punkte $\mathfrak{T}'$ (oder der 5 Punkte $\mathfrak{T}$) zusammenstossende Elementartetraeder zusammengefasst werden, so resultirt ein durch 5 reguläre sphärische Tetraeder gebildetes sphärisches Zellgewebe, welches als reguläres Gewebe G_1 (oder als das conjugirte reguläre Gewebe G'_1) oder als reguläres Pentatop-Gewebe bezeichnet werden soll. Die Eckpunkte sind die 5 Punkte $\mathfrak{T}$ (oder $\mathfrak{T}'$), die Kantenmittelpunkte die 10 Punkte $\mathfrak{R}$ (oder $\mathfrak{R}'$), die Flächenmittelpunkte die zehn Punkte $\mathfrak{R}'$ (oder $\mathfrak{R}$) und die Tetraedermittelpunkte die 5 Punkte $\mathfrak{T}'$ (oder $\mathfrak{T}$). Die sphärische Kante a_1, der Winkel A_1 zweier Hauptkreise und der Neigungswinkel $\mathfrak{A}_1$ betragen:

$$a_1 = 2\,\zeta,\ A_1 = 2\,\eta,\ \mathfrak{A}_1 = 120^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87a)$$

In der Fig. **11** stellt das sphärische Dreieck $\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_1\ \mathfrak{T}_2$ die Grenzfläche eines solchen regulären Tetraeders dar.

In jedem der 5 Eckpunkte des sphärischen Gewebes G_1 stossen vier Tetraeder, in jedem der 10 Hauptkreise $K^{(0)}$, durch welchen je 3 unter 120^0 gegeneinander geneigte Hauptkugeln ϱ hindurchgehen, drei Tetraeder zusammen; das Volumen eines regulären sphärischen Tetraeders beträgt $\frac{2\pi^2}{5}$.

Das diesem regulären Gewebe G_1 eingeschriebene Polytop ist das reguläre Fünfzell P_1 (Pentatop). Für die Abstände r_k der Kanten,

r_f der Dreiecke, r_p der tetraedrischen Grenzräume ergiebt sich für den Eckradius $r_e = 1$:

$$r_k = \cos\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\quad r_f = \cos\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{6}},\quad r_p = \cos(180^0 - 2\zeta) = \frac{1}{4}, \quad \ldots\ldots (87\beta)$$

während für die Länge $\mathfrak{K}_1$ einer der 10 Kanten, für den Inhalt $\mathfrak{F}_1$ eines der 10 Grenzdreiecke, sowie für den Inhalt $\mathfrak{R}_1$ eines der fünf Pentatope, welche durch Verbindung eines Grenztetraeders mit dem Mittelpunkte O entstehen, in den bezüglichen Maass-Einheiten die Werthe resultiren:

$$\mathfrak{K}_1 = 2\sin\zeta = \sqrt{\frac{5}{2}},\quad \mathfrak{F}_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}\cos\zeta = \frac{5\sqrt{3}}{8},\quad \mathfrak{P}_1 = \frac{5}{6\sqrt{2}}\sin\zeta = \frac{5\sqrt{5}}{24},$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{5\sin\zeta}{96\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{5}}{384}, \quad \ldots\ldots\ldots (87\gamma)$$

so dass „der Umfang“ (die Grenze) des Fünfzells $\frac{25}{24}\sqrt{5} = \frac{5}{6\sqrt{2}}\mathfrak{K}_1^3$, der Inhalt desselben $\frac{25}{384}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{96}\mathfrak{K}_1^4$ [1]) beträgt.

5) Das dem Gewebe $\boldsymbol{G}_1$ umgeschriebene Polytop $\boldsymbol{P}'_1$ ist ebenfalls ein reguläres Fünfzell, dessen fünf Eckpunkte die Pole der tetraedrischen Grenzräume des eingeschriebenen $\boldsymbol{P}_1$ in Bezug auf S_3 sind und dessen 10 Kanten, 10 Grenzflächen bezw. polar den 10 Grenzflächen, 10 Kanten von $\boldsymbol{P}_1$ entsprechen. Für die Abstände r'_e, r'_k, r'_f, r'_p und für die Grössen $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{F}'_1$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{R}'_1$ ergiebt sich (vgl. (87β), (87γ)):

$$r'_e = \frac{1}{r_p} = 4,\ r'_k = \frac{1}{r_f} = \sqrt{6},\ r'_f = \frac{1}{r_k} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ r'_p = \frac{1}{r_e} = 1 \quad \ldots\ldots (87\beta')$$

$$\mathfrak{K}'_1 = 8\sin\zeta = 2\sqrt{10},\ \mathfrak{F}'_1 = 10\sqrt{3},\ \mathfrak{P}'_1 = \frac{40}{3}\sqrt{5},\ \mathfrak{R}_1' = \frac{10}{3}\sqrt{5} \quad \ldots (87\gamma')$$

Durch die 5 Eckpunkte von $\boldsymbol{P}'_1$ ist auf dem mit S_3 concentrischen Raume S'_3 mit dem Radius $r'_e = 4$ ein reguläres sphärisches Gewebe $\boldsymbol{G}''_1$ bestimmt, welchem $\boldsymbol{P}'_1$ eingeschrieben ist. Dieses, dem Gewebe $\boldsymbol{G}_1$ vollständig ähnliche Gewebe wird durch die 10 Hauptkugeln $\varrho^{(1)}$ erzeugt, welche die Schnitte von S'_3 mit den 10 Euklid'schen Räumen sind, die S_3 in den 10 Hauptkugeln ϱ schneiden. Es ist also (vgl. (87α)):

$$\alpha'_1 = 2\zeta,\ A'_1 = 2\eta,\ \mathfrak{A}'_1 = 120^0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (87\alpha')$$

d. h. für die Neigungswinkel W'_{p_1}, W'_{f_1}, W'_{k_1} folgt:

$$W'_{p_1} = 180^0 - 2\zeta,\ W'_{f_1} = 180^0 - 2\eta,\ W'_{k_1} = 60^0 \quad \ldots\ldots\ldots (87\delta)$$

[1]) Vgl. R. Hoppe und E. Hess an den in § 52 unter 4) am Ende citirten Stellen.

Das dem Gewebe G''_1 umgeschriebene Polytop ist wiederum ein dem ersteren P'_1 concentrisches reguläres Fünfzell, für welches W_{p_1}, W_{f_1}, W_{k_1} bez. dieselben Werthe haben, wie W'_{p_1}, W'_{f_1}, W'_{k_1}.

Das dem Gewebe G_1'' concentrische und ähnliche, dem sphärischen Raume S_3 angehörige Gewebe G'_1, welches dem Gewebe G_1 congruent ist, stellt das zu G_1 conjugirte Gewebe dar, dessen Eckpunkte (Tetraeder-Mittelpunkte) die Mittelpunkte der Tetraeder (die Eckpunkte) von G_1, dessen Kanten- (Flächen-) Mittelpunkte die Flächen- (Kanten-) Mittelpunkte von G_1 sind.

6) Wenn je 12 um einen der 10 Punkte $\mathfrak{N}^{(0)\prime}$ (oder $\mathfrak{N}^{(0)}$) herumliegende Elementartetraeder zusammengefasst werden, so entsteht ein gleichzelliges Gewebe, welches sich aus 10 congruenten dreiseitigen sphärischen Doppelpyramiden zusammensetzt und dessen Eckpunkte die 5 Punkte $\mathfrak{T}^{(0)}$ und die 5 Punkte $\mathfrak{T}^{(0)\prime}$ sind. Die Basisfläche einer Doppelpyramide ist das reguläre sphärische Dreieck, welches die Grenzfläche der regulären Tetraeder des Gewebes G_1 bildet und welches je drei Punkte $\mathfrak{T}^{(0)}$ ($\mathfrak{T}^{(0)\prime}$) zu Eckpunkten und je drei Punkte $\mathfrak{N}^{(0)}$ ($\mathfrak{N}^{(0)\prime}$) zu Kantenmittelpunkten hat; die Spitzen sind je zwei Punkte $\mathfrak{N}^{(0)\prime}$ ($\mathfrak{N}^{(0)}$). Die Seitenfläche der Pyramide ist also das gleichschenklige Nebendreieck des regulären Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{T}^{(0)}$ ($\mathfrak{T}^{(0)\prime}$), z. B. ($\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}_2\ \mathfrak{T}'_1$ in Fig. **11**), mit der Basis 2ζ, dem Schenkel $180^0-2\zeta$, dem Basiswinkel $180^0-2\eta$ und dem Winkel 2η an der Spitze. In jeder Basis-, wie in jeder Seitenkante, welche den Hauptkreisen $K^{(0)}$ angehören, stossen drei Doppelpyramiden aneinander, so dass in jeder Spitze $\mathfrak{T}^{(0)\prime}$ ($\mathfrak{T}^{(0)}$) sich vier, in jedem Basispunkt $\mathfrak{T}^{(0)}$ ($\mathfrak{T}^{(0)\prime}$) sich 6 Doppelpyramiden vereinigen. Das Gewebe ist hiernach (vgl. (84ϑ) in § 52) als

festes (5_4+5_6)-eckiges 10_{2+3}-Zell (87ε)

zu bezeichnen. Ihm entspricht das feste zugeordnete gleicheckige Gewebe, dessen Eckpunkte die 10 Punkte $\mathfrak{N}^{(0)\prime}$ ($\mathfrak{N}^{(0)}$) sind, welches von 10 regulären Tetraedern (mit den Mittelpunkten $\mathfrak{T}^{(0)\prime}$ ($\mathfrak{T}^{(0)}$)) und von 10 regulären Oktaedern mit den Mittelpunkten $\mathfrak{T}^{(0)}$ ($\mathfrak{T}^{(0)\prime}$) begrenzt wird und bei welchem in jeder Ecke sich zwei Tetraeder und drei Oktaeder vereinigen. Dies Gewebe ist als

festes (5_4+5_6)-zelliges 10_{2+3}-Eck (87ε')

zu bezeichnen. Demselben ist ein festes gleicheckiges 10-Eck ein- und

ein festes gleichzelliges 10-Zell umgeschrieben, deren Beschaffenheit sich aus den entsprechenden Zellgeweben ($87\varepsilon'$) und (87ε) ergiebt. Dem Gewebe (87ε) lässt sich dagegen kein Polytop einschreiben, da die Eckpunkte der sphärischen Doppelpyramiden nicht auf einem Euklid'schen Raume liegen; ebenso wenig kann diesem Gewebe ein Polytop umgeschrieben werden.

7) Dem allgemeinen, durch die 10 Hauptkugeln $\varrho^{(0)}$ bestimmten Gewebe, welches als gleichzelliges

$$[(5+5)_{2\,.\,12}+(10+10)_{2\,.\,6}]\text{-eckiges } 120_{2+2}\text{-Zell} \quad \ldots\ldots \quad (88\alpha)$$

zu bezeichnen ist, entspricht als zugeordnetes gleicheckiges Gewebe ein

$$[(5+5)_{2\,.\,12}+(10+10)_{2\,.\,6}]\text{-zelliges } 120_{2+2}\text{-Eck} \quad \ldots\ldots \quad (88\alpha')$$

Dasselbe wird erhalten (vergl. § 52 unter 9)), wenn zu einem im Innern eines der 120 Elementartetraeder beliebig angenommenen Punkte $\mathfrak{P}$ die homologen Punkte für alle Tetraeder des gleichzelligen Gewebes construirt werden. Die Beschaffenheit des so erhaltenen gleicheckigen Gewebes ($88\alpha'$), die Beziehungen seiner Elemente zu denjenigen des gleichzelligen (88α), ferner die Eigenschaften des gleicheckigen Polytops, welches dem Gewebe ($88\alpha'$) ein- und des gleichzelligen Polytops, welches diesem Gewebe umgeschrieben ist, können alsdann ohne Schwierigkeit abgeleitet werden. Diese gleicheckigen Gewebe und die ihnen zugehörigen Polytope sind im Allgemeinen dreifach veränderlich; sie gehen in zweifach-, einfach-veränderliche und feste über, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ bez. in einer der vier Seitenflächen, auf einer der sechs Kanten des Elementartetraeders liegt oder endlich mit einem der vier Eckpunkte desselben zusammenfällt. Die Gesammtzahl der möglichen Fälle beträgt hier 9.

8) Bei der durch die 120 Elementartetraeder gebildeten sphärischen Figur kommen für die Transformationen noch folgende Punkte, Hauptkreise und Hauptkugeln in Betracht, welche Projectionen von bereits in § 51 berücksichtigten Punkten, Geraden und Ebenen sind.

Die Mittelpunkte der beiden Gegenkanten, welche den Hauptkreisen $l^{(0)}$ angehören und deren Centriwinkel ε ist, sind je ein Punkt $\mathfrak{B}^{(0)}$, welcher zu den 30 Punkten $\mathfrak{B}^{(0)}$ (nebst Gegenpunkten $\mathfrak{B}^{(0)\prime}$) (vgl. unter 1) dieses §) gehören. So ist z. B. (vgl. (86ε) unter 3) dieses §):

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{B}_1^{(0)} \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{der Halbirungspunkt von } \overline{\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{R}'_5}\,, \\ \mathfrak{B}_{47}^{(0)} \ldots & \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„}\ \overline{\mathfrak{T}'_3\ \mathfrak{R}_7} \end{array}\right\} \quad (88\beta)$$

(vgl. Fig. **11**).

Der Verbindungs-Hauptkreisbogen zweier solcher Mittelpunkte von Gegenkanten gehört einem der 12 Hauptkreise $g^{(0)}$ und $g^{(0)\prime}$ (vgl. $12\varkappa_1$)..($12\varkappa_6$) in § 51) an, wobei der Centriwinkel eines solchen Verbindungsbogens 36^0 beträgt (vgl. Fig. **13**α). Für das Beispiel (88β) ist dieser Hauptkreis

$$g_1^{(b)\prime} \ldots \operatorname{tg}\varphi \quad -i\operatorname{tg}\varphi \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -i \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (88\gamma)$$

Der Mittelpunkt einer Kante des Elementartetraeders, welche einem Hauptkreise $K^{(0)}$ angehört und deren Centriwinkel $180^0 - 2\zeta$ beträgt, ist einer der 10 Punkte $\mathfrak{r}^{(0)}$ (und der 10 Gegenpunkte $\mathfrak{r}^{(0)\prime}$), z. B. der Mittelpunkt von $\overline{\mathfrak{T}_0\ \mathfrak{T}'_3}$ ist (vgl. § 51 unter (72δ)) der Punkt

$$\mathfrak{r}_3^{(0)}\ (\mathfrak{B}_{56}^{(0)}) \ldots \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (88\delta),$$

während der Mittelpunkt der Gegenkante, welche einem Hauptkreise $l^{(0)}$ angehört und deren Centriwinkel ϑ ist, einer der Punkte $\mathfrak{L}^{(0)}$ ($\mathfrak{L}^{(0)\prime}$) (vergl. ($72\iota_1$) ... ($72\iota_5$) in § 51) ist; z. B. (vergl. Fig. **11**) der Mittelpunkt von $\overline{\mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}'_5}$ ist der Punkt

$$\mathfrak{L}_9^{(0)\prime} \ldots \frac{\operatorname{cotg}{}^2\varphi}{2\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{\operatorname{tg}{}^2\varphi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (88\varepsilon)$$

Der die Mittelpunkte dieser beiden Gegenkanten verbindende Hauptkreisbogen gehört einem der 15 Hauptkreise $l^{(0)\prime}$ an und beträgt einen Achtelskreis (vgl. Fig. **13**α). Ein solcher Achtelskreis bildet die Hälfte derjenigen Kante eines der 5 orthogonalen Polartetraeder (nebst deren Neben-, Scheitel- und Gegenfiguren), welche je zwei Eckpunkte $\mathfrak{L}^{(0)}$ (bez. $\mathfrak{L}^{(0)\prime}$) verbindet, so dass durch jeden der 10 Mittelpunkte $\mathfrak{r}^{(0)}$ (und $\mathfrak{r}^{(0)\prime}$) drei solcher Kanten, welche den Hauptkreisen $l^{(0)\prime}$ angehören, hindurchgehen.

Die Mittelpunkte derjenigen Kanten eines solchen Orthogonaltetraeders, welche den Eckpunkt $\mathfrak{T}^{(0)}$ ($\mathfrak{T}^{(0)\prime}$) mit je einem Punkte $\mathfrak{L}^{(0)}$ ($\mathfrak{L}^{(0)\prime}$) verbinden, sind je einer der 30 Punkte $\mathfrak{B}^{(0)}$ (und der Gegenpunkte $\mathfrak{B}^{(0)\prime}$); diese Kanten gehören den 15 Hauptkreisen $l^{(0)}$ an.

Die Lage dieser 5 Systeme von Orthogonaltetraedern, wobei jedes System ein sphärisches Gewebe G_2 (vgl. § 34) von je 16 Tetraedern darstellt, und ihrer Elemente $\mathfrak{L}^{(0)}$, $\mathfrak{T}^{(0)}$, $l^{(0)}$, $l^{(0)\prime}$, $\lambda^{(0)}$, $\tau^{(0)}$ zu einander und zu

der durch die 120 Elementartetraeder gebildeten Figur ist hieraus, sowie auch aus der in § 51 betrachteten, entsprechenden dreidimensionalen Raumfigur leicht zu entnehmen.

Die Projectionen der 20 Punkte $\mathfrak{P}$ (vgl. § 52 unter 10)), deren zwei auf jeder Kante K auftreten, sind die Halbirungspunkte der Quadranten $\mathfrak{r}^{(0)}$ $\mathfrak{R}^{(0)}$ auf den Hauptkreisen $K^{(0)}$, so dass die Bogenabstände je zweier aufeinanderfolgenden Punkte $\mathfrak{p}_i^{(0)}$ $\mathfrak{p}_0^{(k)}$ ebenfalls einen Quadranten betragen.

§ 55.
Transformationen des regulären Gewebes G_1 und der ihm zugehörigen Polytope in sich selbst.

Was schliesslich noch die Gesammtheit der Transformationen betrifft, durch welche das reguläre Gewebe G_1, das ihm zugehörige reguläre Polytop P_1 nebst der Gegenfigur P'_1, sowie die zum Theil regelmässigen Polytope nebst ihren Gegenfiguren in sich übergehen, so sind dieselben einmal unter den in § 53 aufgeführten Transformationen der beiden Gewebe G_4 und G'_4 als besondere Gruppe enthalten, andererseits können sie unter Anwendung des in § 27—33 erläuterten Processes der Uebertragung aus dem Raum R_3 in den sphärischen Raum S_3 aus den in § 51 unter 2 I) A), B) und 2 II) A), B) vollständig aufgeführten Substitutionen erhalten werden.

Es ergeben sich somit 120 eigentliche Bewegungen, 120 einfache und dreifache Spiegelungen und entsprechend 120 eigentliche, sowie 120 uneigentliche Correlationen. Im Folgenden sind die Resultate übersichtlich angegeben und durch einige Beispiele erläutert.

A[1]) 120 Bewegungen (zwei- und vierfache Spiegelungen), entsprechend den **eigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten (vgl. § 51 I_1 A) $-$ I_{60} A)).

$1\alpha_1$) Identische Transformation:
$S = [1\ 2\ 3\ 4]_1$ (vgl. § 28, (96 σ),

$1\alpha_2$) Inversion (Spiegelung am Mittelpunkt O):
$S = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ (vgl. § 28, (96a))

(vgl. § 51 I_1 A) unter (73α), β)).

$2\alpha_1$) 15 Umwendungen um je einen der 15 Hauptkreise $l^{(0)}$,
$2\alpha_2$) 15 „ „ „ „ „ „ „ $l^{(0)\prime}$
(vgl. § 28, (96τ), (96ω) und § 51 I_{2-16} A) unter (74a).

Beispiele zu $2\alpha_1$):

$S = [-3\ 4\ -1\ 2]_1$: Umwendung um $l_1^{(0)} \ldots\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ i\ \ 0$,

$S = [3\ -1\ -2\ 4]_9$: „ „ $l_9^{(0)} \ldots\ \mathrm{tg}\,\varphi\ \ i\,\mathrm{tg}\,\varphi\ \ -1\ \ i\,\mathrm{cotg}\,\varphi\ \ -i\,\mathrm{cotg}\,\varphi$.

Beispiele zu $2\alpha_2$):

$S = [3\ -4\ 1\ -2]_1$: Umwendung um $l_1^{(0)'} \ldots\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ -i\ \ 0$,

$S = [-3\ 1\ 2\ -4]_9$: „ „ $l_9^{(0)'} \ldots\ \mathrm{tg}\,\varphi\ \ -i\,\mathrm{tg}\,\varphi\ \ -1\ \ -i\ \mathrm{cotg}\,\varphi\ \ i\,\mathrm{cotg}\,\varphi$.

$3\alpha_1$) 2 . 10 = 20 dreizählige einfache Drehungen um je einen der 10 Hauptkreise $K^{(0)}$ (alle Punkte von $K^{(0)}$ — der Büschelaxe — und die unendlich fernen imaginären Punkte der reciproken Polaren $K^{(0)'}$ — der Reihenaxe — bleiben fest) (vgl. § 28 unter $c\alpha$) Formeln (96π), (96ϱ und § 51 I_{17-36} A) unter (75a)).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} S\ = [3\ -4\ -1\ 2]_2 = K_{1(120^0)}^{(0)} \\ S^2 = [4\ 3\ -2\ -1]_3 = K_{1(-120^0)}^{(0)} \end{array}\right\} K_1^{(0)} \ldots -1\ \ -i\ \ 1\ \ -i\ \ 1\ \ -i,$$

$$\left.\begin{array}{l} S = [3\ 1\ -2\ -4]_9 = K_{5(120^0)}^{(0)} \\ S^2 = [3\ -1^*\ 2\ -4]_{11} = K_{5(-120^0)}^{(0)} \end{array}\right\} K_5^{(0)} \ldots\ \mathrm{cotg}\,\varphi\ \ -i\,\mathrm{cotg}\,\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ -\mathrm{tg}\,\varphi\ \ -i\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

$3\alpha_2$) 2 . 10 = 20 besondere sechszählige Doppeldrehungen (Drehung nebst Umwendung), nämlich Drehung von 60° oder −60° um $K^{(0)}$ und Umwendung um $K^{(0)'}$ (vergl. § 28 unter $c\beta$) Formeln (96χ) und § 51 unter (75a)).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} S\ = [-3\ 4\ 1\ -2]_2 = K_{1(60^0)}^{(0)}\ \ K_{1(180^0)}^{(0)'} \\ S^5 = [-4\ -3\ 2\ 1]_3 = K_{1(-60^0)}^{(0)}\ \ K_{1(180^0)}^{(0)'} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} S = [-3\ -1\ 2\ 4]_9 = K_{5(60^0)}^{(0)}\ \ K_{5(180^0)}^{(0)'} \\ S^5 = [-3\ 1^*\ -2\ 4]_{11} = K_{5(-60^0)}^{(0)}\ \ K_{5(180^0)}^{(0)'} \end{array}\right. \end{array}\right\}$$

$K_1^{(0)}$ und $K_5^{(0)}$ wie in den Beispielen zu $3\alpha_1$); S^2 und S^4 sind die dreizähligen einfachen Drehungen, S^3 ist die Inversion.

$4\alpha_1$) und $4\alpha_2$) 8 . 6 = 48 zehnzählige Doppeldrehungen, deren Schraubenaxen je ein Hauptkreis $G^{(0)}$ und dessen reciproke Polare $G^{(0)'}$ sind (vgl. § 28 b), e) und § 51 I_{37-60} A) unter (76a)). Die Elemente des festbleibenden sphärischen Tetraeders mit 4 Eckpunkten $\mathfrak{g}_0$, vier Hauptkugeln χ_0, dessen Kanten ausser den reellen Schraubenaxen $G^{(0)}$, $G^{(0)'}$ zwei imaginäre Hauptkreispaare g_0 sind, können aus den früher § 47 unter A) aufgestellten Beziehungen entnommen werden.

Beispiel (vgl. $76a_2$) I_{41-44} A) und ($72\varkappa_2$) in § 51):

$$S = [-3\ \ -1\ \ 2\ \ 4]_{47} = G_{2(36^0)}^{(0)}\ G_{2(108^0)}^{(0)'}\,, \quad S^2 = [-4\ \ 3\ \ 2\ \ -1]_{24} = G_{2(72^0)}^{(0)}\ G_{2(-144^0)}^{(0)'}$$

$$S^3 = [4\ \ -3\ \ 2\ \ -1]_{33} = G_{2(108^0)}^{(0)}\ G_{2(-36^0)}^{(0)'}\,, \quad S^4 = [3\ \ -1^*\ \ 2\ \ -4]_{38} = G_{2(144^0)}^{(0)}\ G_{2(72^0)}^{(0)'}$$

$$S^7 = [4\ \ -3\ \ -2\ \ 1]_{24} = G_{2(-108^0)}^{(0)}\ G_{2(36^0)}^{(0)'}\,, \quad S^6 = [3\ \ 1\ \ -2\ \ -4]_{47} = G_{2(-144^0)}^{(0)}\ G_{2(-72^0)}^{(0)}$$

$$S^9 = [-3\ \ 1^*\ \ -2\ \ 4]_{38} = G_{2(-36^0)}^{(0)}\ G_{2(-108^0)}^{(0)'}, \quad S^8 = [-4\ \ 3\ \ -2\ \ 1]_{33} = G_{2(-72^0)}^{(0)}\ G_{2(144^0)}^{(0)'}\,;$$

$$S^5 = [-1\ \ -2\ \ -3\ \ -4]_1\,.$$

Die Elemente des sphärischen Haupttetraeders sind:

$$\left\{\begin{array}{llllll} \mathfrak{z}_1 \ldots & 0 & \cos\varphi & i & \sin\varphi & \ldots \zeta_4 \\ \mathfrak{z}_2 \ldots & i & \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & \ldots \zeta_3 \\ \mathfrak{z}_3 \ldots & -i & \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & \ldots \zeta_2 \\ \mathfrak{z}_4 \ldots & 0 & \cos\varphi & -i & \sin\varphi & \ldots \zeta_1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} K_{14}^{(0)} \ldots \operatorname{tg}\varphi\ \ i\operatorname{tg}\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ -i \ldots G_2^{(0)} \\ K_{23}^{(0)} \ldots \operatorname{tg}\varphi\ \ -i\operatorname{tg}\varphi\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ i \ldots G_2^{(0)'} \\ \left.\begin{array}{l} K_{12}^{(0)} \text{ und } K_{34}^{(0)} \ldots \cos\varphi\ \ 0\ \ \pm i\ \ 0\ \ \sin\varphi\ \ 0 \\ K_{13}^{(0)} \text{ und } K_{42}^{(0)} \ldots 0\ \ \cos\varphi\ \ 0\ \ \pm i\ \ 0\ \ \sin\varphi \end{array}\right\} g_0^{(0)}. \end{array}$$

A$^{(2)}$) 120 Ein- oder dreifache Spiegelungen, den **uneigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Collineationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 29 und § 51 II_1 A)—II_{60} A)).

$5\alpha_1$) 10 einfache Spiegelungen an je einer der 10 Hauptkugeln $\varrho_1^{(0)} \ldots \varrho_{10}^{(0)}$ (vgl. § 29 aα) und § 51 unter (78a) II_1 A)—II_{10} A).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{lll} S = [1\ \ -2\ \ 3\ \ 4]_1: & \text{Spiegelung an Hauptkugel } \varrho_5^{(0)} \ldots & 0\quad 1\quad 0\quad 0\ \ (\text{vgl. } II_5 \text{ A}) \\ S = [3\ \ 4\ \ -1\ \ 2]_2: & \text{„ \quad „ \quad „ } \varrho_7^{(0)} \ldots & \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ (\text{vgl. } II_7 \text{ A}) \\ S = [3\ \ 1\ \ -2\ \ 4]_9: & \text{„ \quad „ \quad „ } \varrho_1^{(0)} \ldots & -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ (\text{vgl. } II_1 \text{ A}) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{in} \\ (78\,\text{a}) \\ \S\ 51. \end{array}$$

$5\alpha_2$) 10 Inversionsspiegelungen (Spiegelungen an drei zu einander senkrechten Hauptkugeln durch je einen der 10 Punkte $\mathfrak{r}_1^{(0)} \ldots \mathfrak{r}_{10}^{(0)}$ und Gegenpunkte $\mathfrak{r}_1^{(0)'} \ldots \mathfrak{r}_{10}^{(0)'}$) vgl. § 29 a$\beta$).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{llll} S = [-1\ 2\ -3\ -4]_1: & \text{Inversions-spiegelung:} & \text{drei auf einander senkrechte Hauptkugeln} & \text{durch } \mathfrak{r}_5^{(0)} \ldots\ \ 0\quad 1\quad 0\quad 0 \\ S = [-3\ -4\ 1\ -2]_2: & \text{„} & \text{„} & \text{„ } \mathfrak{r}_7^{(0)} \ldots\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2} \\ S = [-3\ -1\ 2\ -4]_9: & \text{„} & \text{„} & \text{„ } \mathfrak{r}_1^{(0)} \ldots -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\ \ \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

(vgl. II_{1-10} A) in (78a) § 51).

$6\alpha_1$) 2.15 = 30 vierzählige Drehspiegelungen (dreifache Spiegelungen) (vgl. § 29 b) und § 51 ($79a_1$) .. ($79a_5$), II_{11} A)—II_{40} A). Von den beiden Punkten $\mathfrak{Q}^{(0)}$, $\mathfrak{T}^{(0)}$, welche auf einem Hauptkreise $l^{(0)}$, der Axe der $\pm 90^0$ betragenden Drehung liegen, bleibt $\mathfrak{Q}^{(0)}$ fest, $\mathfrak{T}^{(0)}$ geht in den Gegen-

punkt $\mathfrak{T}^{(0)\prime}$ über; die durch die reciproke Polare $l^{(0)\prime}$, deren imaginäre unendlich ferne Punkte fest bleiben, gehende Spiegelhauptkugel $\tau^{(0)}$ bleibt fest, während $\lambda^{(0)}$ die Innen- mit der Aussenseite vertauscht. Die Elemente des entsprechenden sphärischen Tetraeders mit den beiden reellen Eckpunkten $\mathfrak{L}^{(0)}$, $\mathfrak{T}^{(0)}$ (den reellen Hauptkugeln $\lambda^{(0)}$, $\tau^{(0)}$) und mit zwei imaginären Eckpunkten $\mathfrak{b}_0^{(0)}$, $\mathfrak{b}_0^{(0)\prime}$ (2 imaginären Hauptkugeln $\beta_0^{(0)\prime}$, $\beta_0^{(0)}$), mit einem reellen und zwei imaginären Kantenpaaren sind aus ($79a_1$) ... ($79a_5$), sowie aus (20a), (20b) in § 42 und aus (35b), (37b), (39b) in § 43 zu entnehmen. S^2 bedeutet die Umwendung um die Axe $l^{(0)}$.

Beispiele:

$$1)\ \begin{cases} S = [-4\ -3\ 2\ -1]_3 = l^{(0)}_{1(90^0)}\ \vert\ \tau_0^{(0)} \\ S^3 = [-2\ -1\ 4\ -3]_3 = l^{(0)}_{1(-90^0)}\ \vert\ \tau_0^{(0)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} S^2 = [-3\ 4\ -1\ 2]_1 = l^{(0)}_{1(180^0)}; \\ \mathfrak{L}_1^{(0)} \ldots\ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{bleibt fest,} \\ \mathfrak{T}_0^{(0)} \ldots\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \text{geht in}\ \mathfrak{T}_0^{(0)\prime}\ \text{über} \end{array}$$

(vgl. ($79a_1$) in § 51 II_{11-12} A).

$$2)\ \begin{cases} S = [4\ -3\ -2\ -1]_{24} = l^{(0)}_{4(90^0)}\ \vert\ \tau_1^{(0)} \\ S^3 = [-4\ 3\ -2\ -1^*]_{37} = l^{(0)}_{4(-90^0)}\ \vert\ \tau_1^{(0)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} S^2 = [3\ 1^*\ 2\ 4]_{11} = l^{(0)}_{4(180^0)}; \\ \mathfrak{L}_4^{(0)} \ldots\ -\frac{\operatorname{cotg} 2\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ 0\ \ -\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \text{bleibt fest,} \\ \mathfrak{T}_0^{(0)} \ldots\ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2\sqrt{2}}\ \ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\ \text{geht in}\ \mathfrak{T}_1^{(0)\prime}\ \text{über} \end{array}$$

(vgl. ($79a_2$) in § 51 II_{17-18} A).

$6\alpha_2$) 2 . 15 = 30 vierzählige Drehspiegelungen. Die beiden Punkte $\mathfrak{L}^{(0)}$, $\mathfrak{T}^{(0)}$ und die beiden Hauptkugeln $\tau^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ in $6\alpha_1$) vertauschen sich, so dass $\mathfrak{T}^{(0)}$ fest bleibt, $\mathfrak{L}^{(0)}$ in den Gegenpunkt $\mathfrak{L}^{(0)\prime}$ übergeht, $\lambda^{(0)}$ die spiegelnde Hauptkugel ist, während die Drehaxe $l^{(0)}$ dieselbe ist und S^2, wie in $6\alpha_1$), die Umwendung um diese Axe bedeutet.

Beispiele: 1) (vgl. 1) in $6\alpha_1$)

$$\begin{cases} S = [4\ 3\ -2\ 1]_3 = l^{(0)}_{1(-90^0)}\ \vert\ \lambda_1^{(0)} \\ S^3 = [2\ 1\ -4\ 3]_3 = l^{(0)}_{1(90^0)}\ \vert\ \lambda_1^{(0)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} S^2 = [-3\ 4\ -1\ 2]_1 = l^{(0)}_{1(180^0)}; \\ \mathfrak{T}_0^{(0)}\ \text{bleibt fest,}\ \mathfrak{L}_4^{(0)}\ \text{geht in}\ \mathfrak{L}_4^{(0)\prime}\ \text{über} \end{array}$$

2) (vgl 2) in $6\alpha_2$):

$$\begin{cases} S = [-4\ 4\ 2\ 1]_{24} = l^{(0)}_{4(-90^0)}\ \vert\ \lambda_4^{(0)} \\ S^3 = [4\ -3\ 2\ 1^*]_{37} = l^{(0)}_{4(90^0)}\ \vert\ \lambda_4^{(0)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} S^2 = [3\ 1^*\ 2\ 4]_{11} = l^{(0)}_{4(180^0)}; \\ \mathfrak{T}_1^{(0)}\ \text{bleibt fest,}\ \mathfrak{L}_4^{(0)}\ \text{geht in}\ \mathfrak{L}_4^{(0)\prime}\ \text{über.} \end{array}$$

$7\alpha_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige Drehspiegelungen (vgl. § 29b) und § 51 ($80a_1$) .. ($80a_4$), II_{41-60} A)). Von den beiden Punkten $\mathfrak{r}^{(0)}$, $\mathfrak{R}^{(0)}$, welche auf einem Hauptkreise $K^{(0)}$, der Axe der $\pm 120^0$ betragenden Drehung liegen,

bleibt $\mathfrak{R}^{(0)}$ fest, $\mathfrak{r}^{(0)}$ geht in den Gegenpunkt $\mathfrak{r}^{(0)'}$ über, die Spiegelhauptkugel $\varrho^{(0)}$ bleibt fest, während bei $P^{(0)}$ die Innen- mit der Aussenseite vertauscht wird. Die Elemente des entsprechenden sphärischen Tetraeders mit den beiden reellen Eckpunkten $\mathfrak{r}^{(0)}$, $\mathfrak{R}^{(0)}$ (den rellen Hauptkugeln $\varrho^{(0)}$, $P^{(0)}$) und mit zwei imaginären Eckpunkten $\mathfrak{c}_0^{(0)}$, $\mathfrak{c}_0^{(0)'}$ (zwei imaginären Hauptkugeln $\gamma_0^{(0)'}$, $\gamma_0^{(0)}$), mit dem reellen Kantenpaar $K^{(0)}$, $K^{(0)'}$, welches das Axenpaar der beiden, S^2 und S^4 entsprechenden, einfachen dreizähligen Drehungen ($3\alpha_1$) darstellt, und zwei imaginären Kantenpaaren sind aus ($80a_1$) . . ($80a_4$) in § 51, sowie aus (18a), (18b), (18c) in § 42 und aus (28a) b), (30a) b), (32a) b), (33a) b) in § 43 zu entnehmen. S^3 bedeutet die Spiegelung an der Hauptkugel $P^{(0)}$.

Beispiele:

1) $\left.\begin{array}{l} S = [3\ -1\ -2\ -4]_{35} = K^{(0)}_{1(120^0)}\ |\varrho_1^{(0)}| \\ S^5 = [3\ \ 1\ -2\ \ 4]_{47} = K^{(0)}_{1(-120^0)}\ |\varrho_1^{(0)}| \end{array}\right\} \begin{array}{r} S^2 = [4\ \ 3\ -2\ -1]_3 = K^{(0)}_{1(-120^0)} \\ S^4 = [3\ -4\ -1\ \ 2]_3 = K^{(0)}_{1(120^0)}, \\ S^3 = [3\ \ 1\ -2\ \ 4]_9 = |\varrho_1^{(0)}|; \end{array}$ (vgl. $80a_1$) in § 51 II_{41-42} A).

$\mathfrak{R}_1^{(0)}$ bleibt fest, $\mathfrak{r}_1^{(0)}$ geht in $\mathfrak{r}_1^{(0)'}$ über.

2) $\left.\begin{array}{l} S = [-4\ -3\ \ 2\ -1]_{16} = K^{(0)}_{6(120^0)}\ |\varrho_6^{(0)}| \\ S^5 = [-4\ -3\ \ 2\ \ 1]_{19} = K^{(0)}_{6(120^0)}\ |\varrho_6^{(0)}| \end{array}\right\} \begin{array}{r} S^2 = [4\ -3\ \ 2\ -1^*]_{19} = K^{(0)}_{6(-120^0)} \\ S^4 = [-4\ -3\ \ 2\ \ 1]_{16} = K^{(0)}_{6(120^0)}, \\ S^3 = [-1\ -2\ -3\ \ 4]_1 = |\varrho_1^{(0)}|; \end{array}$ vgl. ($80a_2$) in § 51 II_{51-52} A).

$\mathfrak{R}_6^{(0)}$ bleibt fest, $\mathfrak{r}_6^{(0)}$ geht in $\mathfrak{r}_6^{(0)'}$ über.

$7\alpha_2$) 2 . 10 = 20 sechszählige Drehspiegelungen. Die beiden Punkte $\mathfrak{r}^{(0)}$, $\mathfrak{R}^{(0)}$, sowie die beiden Hauptkugeln $P^{(0)}$, $\varrho^{(0)}$ in $7\alpha_1$) vertauschen sich, so dass $\mathfrak{r}^{(0)}$ fest bleibt, $\mathfrak{R}^{(0)}$ in $\mathfrak{R}^{(0)'}$ übergeht, $P^{(0)}$ die Spiegelhauptkugel ist, während die Drehaxe $K^{(0)}$ für die $\pm 60^0$ betragenden Drehungen dieselbe ist, S^2, S^4 wiederum die einfachen dreizähligen Umdrehungen um diese Axe bedeuten, S^3 dagegen die Inversionsspiegelung (vergl. ($5\alpha_2$)) $K^{(0)}_{(180^0)}\ |P^{(0)}|$ an drei auf einander senkrechten, durch $\mathfrak{r}^{(0)}$ gehenden Hauptkugeln darstellt.

Beispiele:

1) (vgl. Beispiel 1) in $7\alpha_1$):

$\left\{\begin{array}{l} S = [-3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]_{35} = K^{(0)}_{1(-60^0)}\ |P_1^{(0)}| \\ S^5 = [-3\ -1\ \ 2\ -4]_{47} = K^{(0)}_{1(60^0)}\ |P_1^{(0)}| \end{array}\right\} \begin{array}{l} S^2 \text{ und } S^4 \text{ wie in 1) zu } 7\alpha_1), \\ S^3 = [-3\ -1\ \ 2\ -4]_9 = K^{(0)}_{1(180^0)}\ |P_1^{(0)}|, \end{array}$

$\mathfrak{r}_1^{(0)}$ bleibt fest, $\mathfrak{R}_1^{(0)}$ geht in $\mathfrak{R}_1^{(0)'}$ über.

2) (vgl. Beispiel 2) in $7\alpha_2$):

$\left\{\begin{array}{l} S = [4\ \ 3\ -2\ \ 1]_{16} = K^{(0)}_{6(-60^0)}\ |P_6^{(0)}| \\ S^5 = [-4\ \ 3\ -2\ -1^*]_{19} = K^{(0)}_{6(60^0)}\ |P_6^{(0)}| \end{array}\right\} \begin{array}{l} S^2 \text{ und } S^4 \text{ wie in 2) zu } 7\alpha_1), \\ S^3 = [1\ \ 2\ \ 3\ -4]_1 = K^{(0)}_{6(180^0)}\ |P_6^{(0)}|. \end{array}$

$\mathfrak{r}_6^{(0)}$ bleibt fest, $\mathfrak{R}_6^{(0)}$ geht in $\mathfrak{R}_6^{(0)'}$ über.

$B^{(1)}$) 120 Correlationen, den **eigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 31 und § 51 unter I_{1-60} B)).

$1\beta_1$) Die Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$:

$$S' = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1;$$

$1\beta_2$) Die inverse Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$:

$$S' = [\overline{-1\ -2\ -3\ -4}]_1.$$

(vgl. (73α′) β′) in § 51 unt. I_1B)

$2\beta_1$) 15 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf je eine reelle Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$, welche eine Projection einer der 15 reellen Kernflächen $F^{(1)}$ (vgl. I_{2-16} B) in § 51) auf S_3 ist (vgl. § 31 2)).

Beispiele:

1) $S' = [\overline{1\ -2\ \ 3\ -4}]_1$: Polar-Correlation in Bezug auf:

$$\mathfrak{F}_3^{(1)} \ldots \mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 - \mathfrak{z}_4^2 = 0;$$

2) $S' = [\overline{3\ \ 1\ \ 2\ \ 4}]_{26}$: Polar-Correlation in Bezug auf:

$$\mathfrak{F}_m^{(1)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\mathfrak{z}_1^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{z}_2^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2}\mathfrak{z}_3^2 \\ +\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_4\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 \\ -\operatorname{tg}\varphi\,\mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4 \quad + \operatorname{cotg}\varphi\cdot\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_4 \end{array} \right\} = 0$$

(vgl. (74b) in § 51).

$2\beta_2$) 15 **inverse** eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf dieselben sphärischen Flächen wie unter $2\beta_1$).

Beispiele:

1) $S' = [\overline{-1\ \ 2\ -3\ \ 4}]_1$: Inverse Polar-Correlation in Bezug auf $\mathfrak{F}_3^{(1)}$,

2) $S' = [\overline{-3\ -1\ -2\ -4}]_{26}$: " " " " " " $\mathfrak{F}_m^{(1)}$.

$3\beta_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine Correlationen (vgl. § 31 4a) und § 51 unter I_{17-36}B), deren Haupttetraeder vier Eckpunkte $\mathfrak{c}_0^{(0)}$, vier Hauptkugeln $\gamma_0^{(0)}$, ein reelles Hauptkreispaar $K^{(0)}$, $K^{(0)\prime}$ und zwei imaginäre Hauptkreispaare $c_0^{(0)}$ zu Kanten hat. S'^2 und S'^4 bedeuten die einfachen dreizähligen Drehungen ($3\alpha_1$) um einen Hauptkreis $K^{(0)}$, S'^3 bedeutet die Polar-Reciprocität ($1\beta_1$) in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$. Die Elemente dieses Tetraeders können aus den in § 51 unter I_{17-36}B) angegebenen entnommen werden.

Beispiele (vgl. (75b) in § 51 unter $I_{21-22}B$):

1) $\left\{ \begin{array}{l} S' = [\overline{3\ \ 4\ -1\ -2}]_2 \\ S'^5 = [\overline{2\ -1\ -4\ \ 3}]_3 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} S'^2 = [2\ -1\ -4\ \ 3]_3 = K^{(0)}_{3(-120^0)} \,. \\ S'^4 = [3\ \ 4\ -1\ -2]_2 = K^{(0)}_{3(120^0)}; \end{array} \right.$

$$S'^3 = [\overline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}]_1.$$

2) $\left\{\begin{array}{l} S' = [-4\ -3\ 2\ 1]_{16} \\ S'^5 = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{19} \end{array}\right\}$ vgl. Beispiel 1) unter $4\beta_1$ in § 53.

$$\left\{\begin{array}{l} S'^2 = [4\ -3\ 2\ -1^*]_{19} = K^{(0)}_{6(-120^0)} \\ S'^4 = [-4\ -3\ 2\ 1]_{16} = K^{(0)}_{6(120^0)}; \end{array}\right.$$

$$S'^3 = [1\ 2\ 3\ 4]_1.$$

$3\beta_2$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine Correlationen, deren Haupttetraeder bez. dasselbe, wie unter $3\beta_1$) ist. S'^2 und S'^4 bedeuten wiederum die einfachen dreizähligen Drehungen um $K^{(0)}$, S'^3 dagegen bedeutet die inverse Polar-Reciprocität ($1\beta_2$).

Beispiele:

1) $\left\{\begin{array}{l} S' = [-3\ -4\ 1\ 2]_2 \\ S'^5 = [-2\ 1\ 4\ -3]_3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} S'^2 \text{ und } S'^4 \text{ wie im} \\ \text{Beispiel 1) zu } 3\beta_1) \end{array}\right.$, $S'^3 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$,

2) $\left\{\begin{array}{l} S' = [4\ 3\ -2\ -1]_{16} \\ S'^5 = [-4\ 3\ -2\ 1^*]_{19} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} S'^2 \text{ und } S'^4 \text{ wie im} \\ \text{Beispiel 2) zu } 3\beta_1) \end{array}\right.$, $S'^3 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$.

$4\beta_1$) und $4\beta_2$) 8 . 6 = 48 zwanzigzählige allgemeine Correlationen (vergl. § 31 6 bβ) und § 51 unter $I_{37-60}B$), deren Haupttetraeder bez. dasselbe ist, wie für die zehnzähligen Doppeldrehungen $4\alpha_1$) und $4\alpha_2$), deren Schraubenaxen $G^{(0)}$, $G^{(0)'}$ sind und welche durch die Potenzen

$$S'^2,\ S'^{18};\ S'^4,\ S'^{16};\ S'^6,\ S'^{14};\ S'^8,\ S'^{12}$$

dargestellt sind. S'^{15} bedeutet die Polar-Reciprocität $1\beta_1$), S'^5 die inverse Polar-Reciprocität $1\beta_2$) in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$; S'^{10} stellt die Inversion dar.

Beispiel:

$\left\{\begin{array}{l} S' = [-3\ -1\ 2\ 4]_{47} \\ S'^{19} = [-3\ 1^*\ -2\ 4]_{38} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} S'^3 = [-4\ 3\ 2\ -1]_{24} \\ S'^{17} = [-4\ 3\ -2\ 1]_{33} \end{array}\right.$ $S'^5 = [-1\ -2\ -3\ -4]_1$ Vgl. $I_{41-44}\ B$)

$\left\{\begin{array}{l} S'^7 = [4\ -3\ 2\ -1]_{33} \\ S'^{13} = [4\ -3\ -2\ 1]_{24} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} S'^9 = [3\ -1^*\ 2\ -4]_{38} \\ S'^{11} = [3\ 1\ -2\ -4]_{47} \end{array}\right.$ $S'^{15} = [1\ 2\ 3\ 4]_1$ in § 51.

$\left\{\begin{array}{l} S'^2 = [-3\ 1^*\ -2\ 4]_{38} = G^{(0)}_{2(-36)}\ \ G^{(0)'}_{2(-108)} \\ S'^{18} = [-3\ -1\ 2\ 4]_{47} = G^{(0)}_{2(36)}\ \ G^{(0)'}_{2(108)} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} S'^4 = [-4\ 3\ -2\ 1]_{33} = G^{(0)}_{2(-72)}\ \ G^{(0)'}_{2(144)} \\ S'^{16} = [-4\ 3\ 2\ -1]_{24} = G^{(0)}_{2(72)}\ \ G^{(0)'}_{2(-144)} \end{array}\right.$ vgl. das

$\left\{\begin{array}{l} S'^6 = [4\ -3\ -2\ 1]_{24} = G^{(0)}_{2(-108)}\ \ G^{(0)'}_{2(36)} \\ S'^{14} = [4\ -3\ 2\ -1]_{33} = G^{(0)}_{2(108)}\ \ G^{(0)'}_{2(-36)} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} S'^8 = [3\ 1\ -2\ -4]_{47} = G^{(0)}_{2(-144)}\ \ G^{(0)'}_{2(-72)} \\ S'^{12} = [3\ -1^*\ 2\ -4]_{38} = G^{(0)}_{2(144)}\ \ G^{(0)'}_{2(72)} \end{array}\right.$ Beispiel zu $4\alpha_1$), α_2).

$$S'^{10} = [-1\ -2\ -3\ -4]_1.$$

$B^{(2)}$) 120 Correlationen, den **uneigentlich** orthogonalen quaternären Substitutionen, welche Correlationen bedeuten, entsprechend (vgl. § 32 und § 51 $II_{1-60}B$)).

$5\beta_1$) 10 uneigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf die 10 reellen Flächen $\mathfrak{F}^{(2)}$, die Projectionen der Flächen $F^{(2)}$ (vergl. § 45 II); dieselben sind Kleinkugeln nebst Gegenkugeln (vgl. § 32 1) und § 51 $II_{1-10}B$).

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ S' = [\overline{3\ \ 1\ \ {-2}\ \ 4}]_9 \ldots \mathfrak{F}^{(2)} \ldots \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_{22} - \mathfrak{x}_3\,\mathfrak{x}_{30} - \mathfrak{x}_5\,\mathfrak{x}_{14} \equiv \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_{19} + \mathfrak{x}_4\,\mathfrak{x}_{27} + \mathfrak{x}_6\,\mathfrak{x}_{11} = 0, \\ 2)\ S' = [\overline{3\ \ 4\ \ {-1}\ \ 2}]_2 \ldots \mathfrak{F}^{(2)} \ldots \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_6 - \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_4\,\mathfrak{x}_5 = 0 \end{array}\right\} \text{vgl. (78b) in § 51.}$$

$5\beta_2$) 10 inverse uneigentliche Polarcorrelationen. Flächen wie unter $5\beta_1$).

Beispiele: 1) $S' = [\overline{-3\ \ {-1}\ \ 2\ \ {-4}}]_9$,

2) $S' = [\overline{-3\ \ {-4}\ \ 1\ \ {-2}}]_2$.

$6\beta_1$) 2 . 15 = 30 vierzählige Axencorrelation zweiter Art (vergl. § 32 2a) und § 51 $II_{11-40}B$)) mit reellem Axenpaar $l^{(0)}$, $l^{(0)\prime}$. Die Mittelpunkte und die Hauptkugeln der festbleibenden sphärischen Strahlbüschel sind ein Punktpaar $\mathfrak{B}_i^{(0)}$, $\mathfrak{B}_k^{(0)}$, welche von den Punkten $\mathfrak{T}^{(0)}$, $\mathfrak{L}^{(0)}$ um einen Achtelskreis abstehen, und ein Hauptkugelpaar $\beta_i^{(0)}$, $\beta_k^{(0)}$, welche bezw. unter 45° gegen die beiden auf einander senkrechten Hauptkugeln $\lambda^{(0)}$, $\tau^{(0)}$ geneigt sind. S'^2 bedeutet die Umwendung um $l^{(0)} = |\,\mathfrak{B}_i^{(0)}, \mathfrak{B}_k^{(0)}\,|$.

Beispiele:

$$1)\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l} S' = [\overline{-4\ {-3}\ 2\ {-1}}]_3 \\ S'^3 = [\overline{-2\ {-1}\ 4\ {-3}}]_3 \end{array} \left|\begin{array}{l} \mathfrak{B}_5^{(0)} \ldots \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2} \ldots \beta_5^{(0)} \\ \mathfrak{B}_7^{(0)} \ldots \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \ldots \beta_7^{(0)} \end{array}\right\} l_1^{(0)} \ldots\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ i\ \ 0 \\ \qquad S'^2 = [\overline{-3\ 4\ {-1}\ 2}]_1 = l^{(0)}_{1(180^\circ)} \\ \qquad (\text{vgl. } II_{11-12}B) \text{ in § 51 unter (79b)}). \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l} S' = [\overline{4\ {-3}\ {-2}\ {-1}}]_{24} \\ S'^3 = [\overline{-4\ 3\ {-2}\ {-1}^*}]_{37} \end{array} \left|\begin{array}{l} \mathfrak{B}_{26}^{(0)} \ldots -\frac{1}{2}\ \ 0\ \ \frac{\text{tg}\,\varphi}{2}\ \ \frac{\text{cotg}\,\varphi}{2} \ldots \beta_{26}^{(0)} \\ \mathfrak{B}_{30}^{(0)} \ldots \frac{\text{cotg}\,\varphi}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{\text{tg}\,\varphi}{2} \ldots \beta_{30}^{(0)} \end{array}\right\} l_4^{(0)} \ldots\ \text{tg}\,\varphi\ \ i\,\text{tg}\,\varphi\ \ 1\ \ -i\ \ \text{cotg}\,\varphi\ \ -i\,\text{cotg}\,\varphi \\ \qquad S'^2 = [\overline{3\ 1^*\ 2\ 4}]_{11} = l^{(0)}_{4(180^\circ)} \\ \qquad (\text{vgl. } II_{17-18}B) \text{ in § 51 unter (79b)}). \end{array}\right.$$

$6\beta_2$) 2 . 15 = 30 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art, welche die inversen der unter $6\beta_1$) sind, insofern die Gegenpunkte $\mathfrak{B}_i^{(0)\prime}$, $\mathfrak{B}_k^{(0)\prime}$ und die entgegengesetzten Seiten der Hauptkugeln $\beta_i^{(0)}$, $\beta_k^{(0)}$ auftreten.

Beispiele: 1) $\begin{cases} S' = [\overline{4\ 3\ {}^{-}2\ 1}]_3 \\ S'^3 = [\overline{2\ 1\ {}^{-}4\ 3}]_3 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} S' = [\overline{{}^{-}4\ 3\ 2\ 1}]_{24} \\ S'^3 = [\overline{4\ {}^{-}3\ 2\ 1^*}]_{37} \end{cases}$.

$7\beta_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen (vgl. § 32 2b), § 51 II_{41-60} B)). Die Elemente des Haupttetraeders sind aus den in § 51 II_{41-60} B) und § 50 unter 14 B) angegebenen Relationen zu entnehmen: die beiden imaginären Eckpunkte $\mathfrak{c}_0^{(0)}$ und Hauptkugeln $\gamma_0^{(0)}$ sind dieselben, wie für die entsprechende Drehspiegelung $7\,\alpha_1$), die beiden reellen Eckpunkte $\mathfrak{p}_i^{(0)}$, $\mathfrak{p}_k^{(0)}$ (die Projectionen der Punkte $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_k$) sind die Halbirungspunkte der Quadranten $\mathfrak{r}^{(0)}\ \mathfrak{R}^{(0)}$ (vergl. $7\alpha_1$) und § 54 unter 8) am Ende), die beiden reellen Hauptkugeln $\pi_i^{(0)}$, $\pi_k^{(0)}$ halbiren die rechten Winkel der Hauptkugeln $\varrho^{(0)}$, $P^{(0)}$. S'^3 bedeutet die Polar-Correlation in Bezug auf eine Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$, während S'^2 und S'^4 die dreizähligen einfachen Drehungen um die Axe $K^{(0)} = |\ \mathfrak{p}_i^{(0)}\ \mathfrak{p}_k^{(0)}\ |$ darstellen.

Beispiel (vgl. das Beispiel unter $14\beta_1$) in § 53 und § 50 und $14\,B_2$) in § 50):

$$\begin{cases} S' = [\overline{{}^{-}4\ {}^{-}3\ 2\ {}^{-}1}]_{16} \\ S'^5 = [\overline{3\ {}^{-}4\ 1^*\ 2}]_{52} \\ S'^3 = [\overline{1\ 2\ 3\ {}^{-}4}]_1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} K_6^{(0)} \ldots & \cos\psi & i\cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi & i\sin\psi = |\ \mathfrak{p}_i^{(0)}\ \mathfrak{p}_k^{(0)}\ | \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{p}_i^{(0)} \ldots & \dfrac{\sin\psi}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \ldots\ \pi_i^{(0)} \\ \mathfrak{p}_k^{(0)} \ldots & \dfrac{\sin\psi}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\cos\psi}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \ldots\ \pi_k^{(0)}. \end{cases}$$

$7\beta_2$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen, welche die inversen der unter $7\,\beta_1$) sind. Es treten $\mathfrak{p}_i^{(0)\prime}$, $\mathfrak{p}_k^{(0)\prime}$ statt $\mathfrak{p}_i^{(0)}$, $\mathfrak{p}_k^{(0)}$ auf; S'^3 bedeutet die inverse Polar-Correlation in $\mathfrak{F}_2$, während S'^2, S'^4 dieselbe Bedeutung wie unter $7\,\beta_1$) haben.

Beispiel (vgl. das Beispiel unter $14\beta_2$) in § 53):

$$\begin{cases} S' = [\overline{4\ 3\ {}^{-}2\ 1}]_{16} \\ S'^5 = [\overline{{}^{-}3\ 4\ {}^{-}1^*\ {}^{-}2}]_{52} \end{cases} \qquad S'^3 = [\overline{{}^{-}1\ {}^{-}2\ {}^{-}3\ 4}]_1 .$$

Damit sind auch die sämmtlichen Transformationen, welche das reguläre Gewebe G_1 und die ihm zugehörigen Polytope in sich überführen, vollständig aufgestellt. Diese Transformationen können endlich auch durch die Substitutionen in Beziehung auf die fünf orthogonalen Polartetraeder dargestellt werden, was mit Benutzung der in § 51 3) in ($82\mathrm{a}_1$) . . ($82\mathrm{a}_5$) vollständig aufgeführten Substitutionen ohne Schwierigkeit sich ausführen lässt.

Die aufgeführten je 120 eigentlichen Bewegungen $\mathrm{A}^{(1)}$, ein- und dreifachen Spiegelungen $\mathrm{A}^{(2)}$, eigentlichen und uneigentlichen Correlationen $\mathrm{B}^{(1)}$

und $B^{(2)}$ gelten, wie erwähnt, für das reguläre Polytope P_1 und die theilweise regelmässigen Polytope dieser Gruppe, insofern zugleich deren Gegenfiguren mit in Betracht gezogen werden. Für das Polytop P_1 selbst und die übrigen Polytope dieser Gruppe beträgt die Zahl der eigentlichen und uneigentlichen Collineationen und Correlationen nur je 60.

Dieselben sind in übersichtlicher Zusammenstellung die folgenden:

$A^{(1)}$. .[1])
- $1\alpha_1$) die identische Transformation,
- $2\alpha_1$) 15 Umwendungen um je einen Hauptkreis $l^{(0)}$,
- $3\alpha_1$) 2 . 10 = 20 dreizählige einfache Drehungen um je einen Hauptkreis $K^{(0)}$,
- $4\alpha_1$) 4 . 6 = 24 fünfzählige Doppeldrehungen um je zwei Hauptkreise $G^{(0)}$, $G^{(0)\prime}$, welche den geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 unter $4\alpha_1$), $4\alpha_2$) dieses § entsprechen.

$A^{(2)}$. . .
- $5\alpha_1$) 10 einfache Spiegelungen an je einer Hauptkugel $\varrho^{(0)}$,
- $6\alpha_1$) 2 . 15 = 30 vierzählige Drehspiegelungen $l^{(0)}_{(+90^0)} \mid \tau^{(0)} \mid$,
- $7\alpha_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige Drehspiegelungen $K^{(0)}_{(+120)} \mid \varrho^{(0)} \mid$.

$B^{(1)}$. .
- $1\beta_1$) die Polar-Reciprocität in Bezug auf $\mathfrak{K}_\infty$,
- $2\beta_1$) 15 eigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf eine Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$.
- $3\beta_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine Correlationen,
- $4\beta_1$) 4 . 6 = 24 zehnzählige allgemeine Correlationen, welche den ungeraden Potenzen S', S'^3, S'^7, S'^9 unter $4\beta_1$), $4\beta_2$) dieses § entsprechen.

$B^{(2)}$. .
- $5\beta_1$) 10 uneigentliche Polar-Correlationen in Bezug auf eine Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$,
- $6\beta_1$) 2 . 15 = 30 vierzählige Axencorrelationen zweiter Art,
- $7\beta_1$) 2 . 10 = 20 sechszählige allgemeine uneigentliche Correlationen.

Für den Verein der Polytope P_1 u. s. w. und ihrer Gegenfiguren treten hinzu:

für $A^{(1)}$: die unter $1\alpha_2$), $2\alpha_2$), $3\alpha_2$) angegebenen Bewegungen, sowie die 4 . 6 = 24 zehnzähligen Doppeldrehungen, welche den ungeraden Potenzen S, S^3, S^7, S^9 unter $4\alpha_1$), $4\alpha_2$) entsprechen;

[1]) Vgl. van Oss l. c. S. 15.

für $A^{(2)}$: die unter $5\alpha_2$), $6\alpha_2$), $7\alpha_2$) aufgeführten Spiegelungen;

für $B^{(1)}$: die unter $1\beta_2$), $2\beta_2$), $3\beta_2$) angegebenen Spiegelungen, sowie die $4 . 6 = 24$ zwanzigzähligen allgemeinen Correlationen, welche den ungeraden Potenzen S'^{11}, S'^{13}, S'^{17}, S'^{19} unter $4\alpha_1$), $4\alpha_2$) entsprechen;

für $B^{(2)}$: die unter $5\beta_2$), $6\beta_2$), $7\beta_2$) aufgeführten uneigentlichen Correlationen.

(Ende des zweiten Haupttheils.)

Inhalt.

Seite

Einleitung . 3

I. Erster Haupttheil.

Die linearen Transformationen der Klein'schen Cf. (60_{15}, 30_6) nach ihrer geometrischen Bedeutung nebst Anwendung auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

§ 1. Recapitulation einiger Haupteigenschaften der Klein'schen Cf. (60_{15}, 30_6) . . 7

§ 2. Erzeugende der Fundamentalflächen und Schnittpunkte (Verbindungsebenen) dieser Erzeugenden . 10

§ 3. Zusammenstellung der Coordinatenwerthe für die bisher erhaltenen Geraden, Punkte und Ebenen . 19

§ 4. Ferner in Betracht kommende Verbindungsgerade (Schnittlinien), Schnittpunkte und Verbindungsebenen 24

§ 5. Lineare Complexe, Flächen zweiten Grades und Complexe zweiten Grades, welche bei den Transformationen auftreten 35

§ 6. A) Lineare Complexe . 36

§ 7. B) Flächen zweiten Grades . 39

§ 8. C) Complexe zweiten Grades 52

I. Tetraedrale (Reye'sche) Complexe 52

II. Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades ist 60

III. Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche durch zwei Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Vierseit gemein haben, gebildet wird . 65

§ 9. Specielle und allgemeine hier in Betracht kommende Collineationen und Correlationen . 74

I A) Specielle Collineationen 74

I B) Allgemeine Collineationen 77

Seite

II A) Specielle Correlationen 84

II B) Allgemeine Correlationen 92

§ 10. Uebersicht der linearen Transformationen der Cf. $(60_{15}, 30_6)$ 99

I. Substitutionen, welche den positiven Permutationen der x_i entsprechen.

§ 11. Collineationen und Correlationen, welche der Grundpermutation (x_{i_1}) entsprechen 104

§ 12. Collineationen und Correlationen, welche aus den 45 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})$ resultiren . 106

§ 13. Collineationen und Correlationen, welche aus den 45 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\, (x_{i_3}\, x_{i_4})$ resultiren 111

§ 14. Collineationen und Correlationen, welche aus den 40 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})\, (x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$ resultiren 118

§ 15. Collineationen und Correlationen, welche aus den 90 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\, (x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$ resultiren 120

§ 16. Collineationen und Correlationen, welche aus den 144 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5})$ hervorgehen 127

II. Substitutionen, welche den negativen Permutationen der x_i entsprechen.

§ 17. Collineationen und Correlationen, welche aus den 15 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})$ hervorgehen . 129

§ 18. Collineationen und Correlationen, welche aus den 15 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2})\, (x_{i_3}\, x_{i_4})\, (x_{i_5}\, x_{i_6})$ hervorgehen 135

§ 19. Collineationen und Correlationen, welche aus den 90 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4})$ hervorgehen . 140

§ 20. Collineationen und Correlationen, welche aus den 120 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3})\, (x_{i_4}\, x_{i_5})$ hervorgehen 145

§ 21. Collineationen und Correlationen, welche aus den 120 Permutationen $(x_{i_1}\, x_{i_2}\, x_{i_3}\, x_{i_4}\, x_{i_5}\, x_{i_6})$ hervorgehen 150

§ 22. Recapitulation und Zusammenstellung der Resultate 153

§ 23. Ueber einige der wichtigsten Transformationsgruppen, welche als Untergruppen in der Hauptgruppe enthalten sind 158

§ 24. Uebertragung einer Raumfigur auf den dreidimensionalen sphärischen Raum (die Hypersphäre) . 169

§ 25. Uebertragung einer ebenen Figur auf eine Kugel durch Centralprojection. Collineationen und Correlationen der regulären Oktaeder-Hexaeder-Gruppe . . 171

§ 26. Uebertragung einer Figur des dreidimensionalen ebenen Raumes R_3 auf den dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 180

§ 27. Uebertragung der Transformationsformeln auf den sphärischen Raum S_3 . . . 190

§ 28. I A) Eigentlich orthogonale quaternäre Substitutionen (Collineationen) . . . 191

§ 29. I B) Uneigentlich orthogonale quaternäre Substitutionen 203

Seite

§ 30. II) Orthogonale quaternäre Substitutionen, welche Correlationen bedeuten . . 207

§ 31. II A) Eigentliche Correlationen des S_3 209

§ 32. II B) Uneigentliche Correlationen des S_3 214

§ 33. Anwendung auf regelmässige Gebilde des vierdimensionalen Raumes 217

§ 34. Sphärische Zellgewebe des regulären Sechszehnzells und des regulären Achtzells. Conjugirte Zellgewebe 219

§ 35. Vollständige Figur der beiden regulären Gewebe G_2 und G'_2 223

§ 36. Transformationen der beiden regulären Gewebe G_2 und G'_2 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst 229

§ 37. Sphärisches Zellgewebe G_3 des regulären Vierundzwanzigzells und das ihm conjugirte G'_3 . 239

§ 38. Vollständige Figur der beiden regulären Gewebe G_3 und G'_3 241

§ 39. I. Transformationen der beiden regulären Gewebe G_3 und G'_3 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst 248

§ 40. II. Transformationen, durch welche der Verein der beiden conjugirten Gewebe G_3 und G'_3 in sich übergeht 262

II. Zweiter Haupttheil.

Die Configuration Cf. $(60_{15}, 72_5)$ und die zugehörige Gruppe von 14400 Collineationen und ebensovielen Correlationen. Uebertragung auf den sphärischen Raum S_3 und hierdurch bestimmte regelmässige, linear begrenzte Gebilde des vierdimensionalen Raumes.

Seite

§ 41. Herleitung der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ 273

§ 42. Eintheilungen der Fundamentalfläche $F_1^{(1)}$ durch die Geraden der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ 286

§ 43. Ferner in Betracht kommende Verbindungsgerade von Punkten (Schnittlinien von Ebenen), Schnittpunkte und Verbindungsebenen 299

§ 44. Lineare Complexe, welche bei den Transformationen auftreten 315

§ 45. Flächen zweiten Grades . 324

§ 46. Uebersicht der linearen Transformationen der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ 335

§ 47. Die hierhergehörigen 3600 eigentlichen Collineationen und 3600 eigentlichen Correlationen . 338

§ 48. Uebersichtliche Zusammenstellung der eigentlichen Collineationen und Correlationen, sowie ihrer Vertheilung auf die 75 Tetraeder $T_1 \ldots T_{75}$ 373

§ 49. Die hierhergehörigen 3600 uneigentlichen Collineationen und 3600 uneigentlichen Correlationen . 375

§ 50. Untersuchung und Darstellung der vier Arten uneigentlicher Collineationen und Correlationen . 378

Seite

§ 51. Eine besondere Untergruppe der Hauptgruppe G_{14400} 398

§ 52. Uebertragung der Cf. $(60_{15}, 72_5)$ auf einen dreidimensionalen sphärischen Raum 428

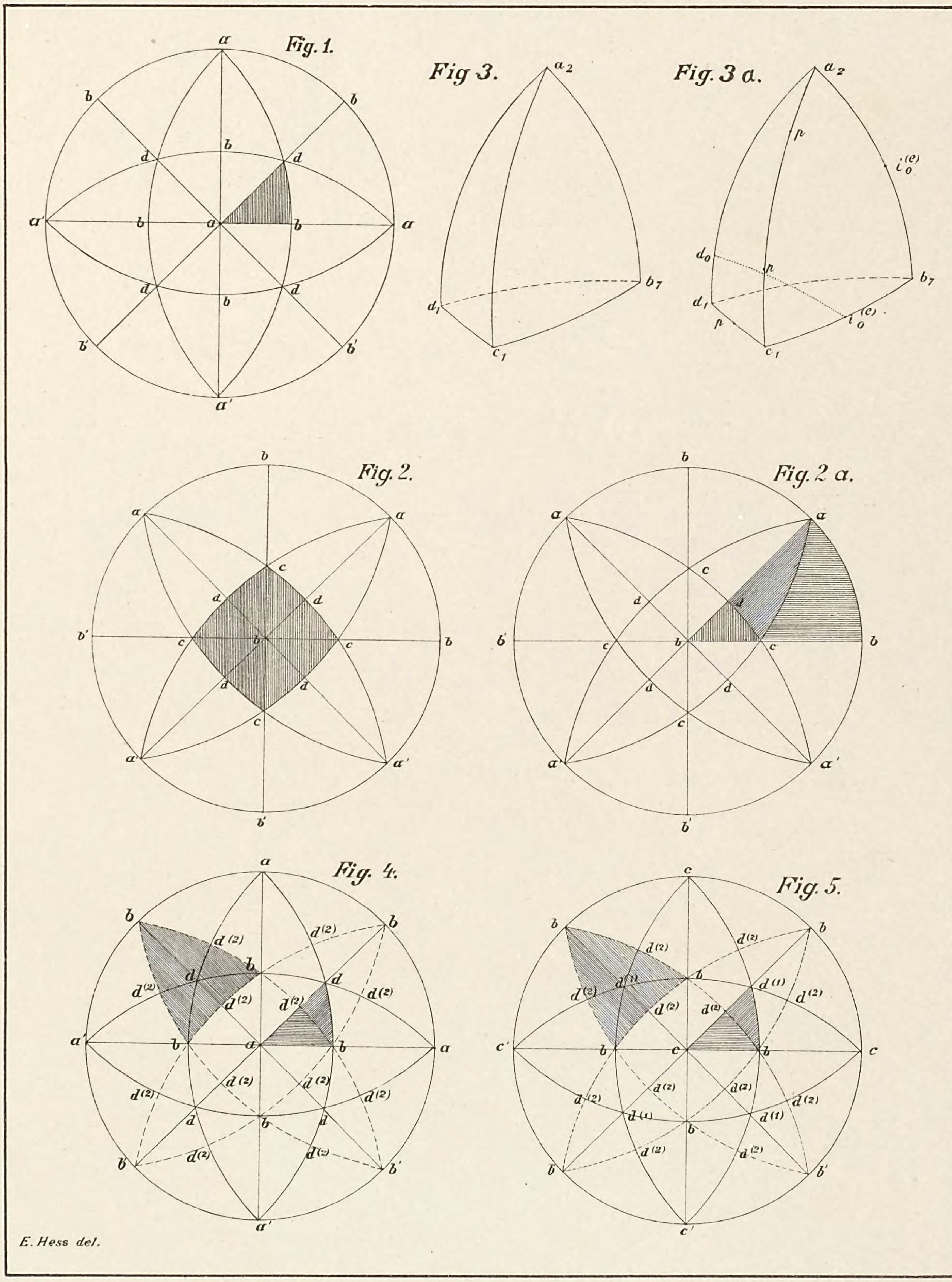
§ 53. Transformation der beiden regulären Gewebe G_4 und G'_4 und der ihnen zugehörigen Polytope in sich selbst . . , ... 439

§ 54. Uebertragung der in § 51 behandelten speciellen Figur eines Pentagons (Pentaeders) auf den dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 459

§ 55. Transformationen des regulären Gewebes G_1 und der ihm zugehörigen Polytope in sich selbst . 468

Verbesserungen.

Seite	Zeile		
Seite 3	Zeile 1 v. u.	lies Ann. statt Anm.	
„ 4	„ 1 „	lies Ann. statt Anm.	
„ 7	„ 6 u. 7 „	lies Ann. statt Anm.	
„ 8	„ 2 „	lies Ann. statt Anm.	
„ 36	„ 12 „	lies (14β)	statt (18β).
„ 41	vor Formeln (18α)—(18ε)	lies $F_1^{(2)}$	statt $F_1^{(1)}$.
„ 180	Zeile 14 v. o.	ergänze vor „Raumes“: ebenen.	
„ 230	„ 16 v. u.	lies 2a_1)	statt 2α_1).
	„ 11 „	„ 2a_2)	„ 2α_2).
	„ 7 „	„ 2a_1)	„ 2α_1).
„ 234	„ 14 v. o.	„ 7a_1)	„ 7α_1).
„ 235	„ 4 „	„ 7a_2)	„ 7α_2).
„ 236	„ 8 „	„ 2a'_1)	„ 2α_1').
	„ 12 „	„ 2a_1)	„ 2α_1).
	„ 16 „	„ 2a'_2)	„ 2α'_1).
	„ 17 „	„ 2a'_1)	„ 2α'_1).
„ 238	„ 12 v. u.	„ 7a'_1)	„ 7α'_1).
	„ 9 „	„ 7a_1)	„ 7α_1).
„ 239	„ 2 v. o.	„ 7a'_2)	„ 7α'_2).
	„ 3 u. 5 „	„ 7a'_1)	„ 7α'_1).
„ 295	„ 3 v. u.	„ $g_0^{(c)}$	„ $g_0^{(\mathrm{c})}$.
		„ $c_0^{(g)}$	„ $c_0^{(\mathrm{g})}$.
„ 297	„ 4—7 „	„ (23c)	„ (22c).
„ 299	„ 2 v. o.	„ (24b)	„ (24β).
	„ 7 v. u.	„ Ferner	„ Fernere.
„ 335	„ 5 v. o.	„ § 46	„ § 43.
„ 368	„ 1 „	„ (24a)	„ (24b).



E. Hess: Configurationen. Taf. I.

Fig. 6.

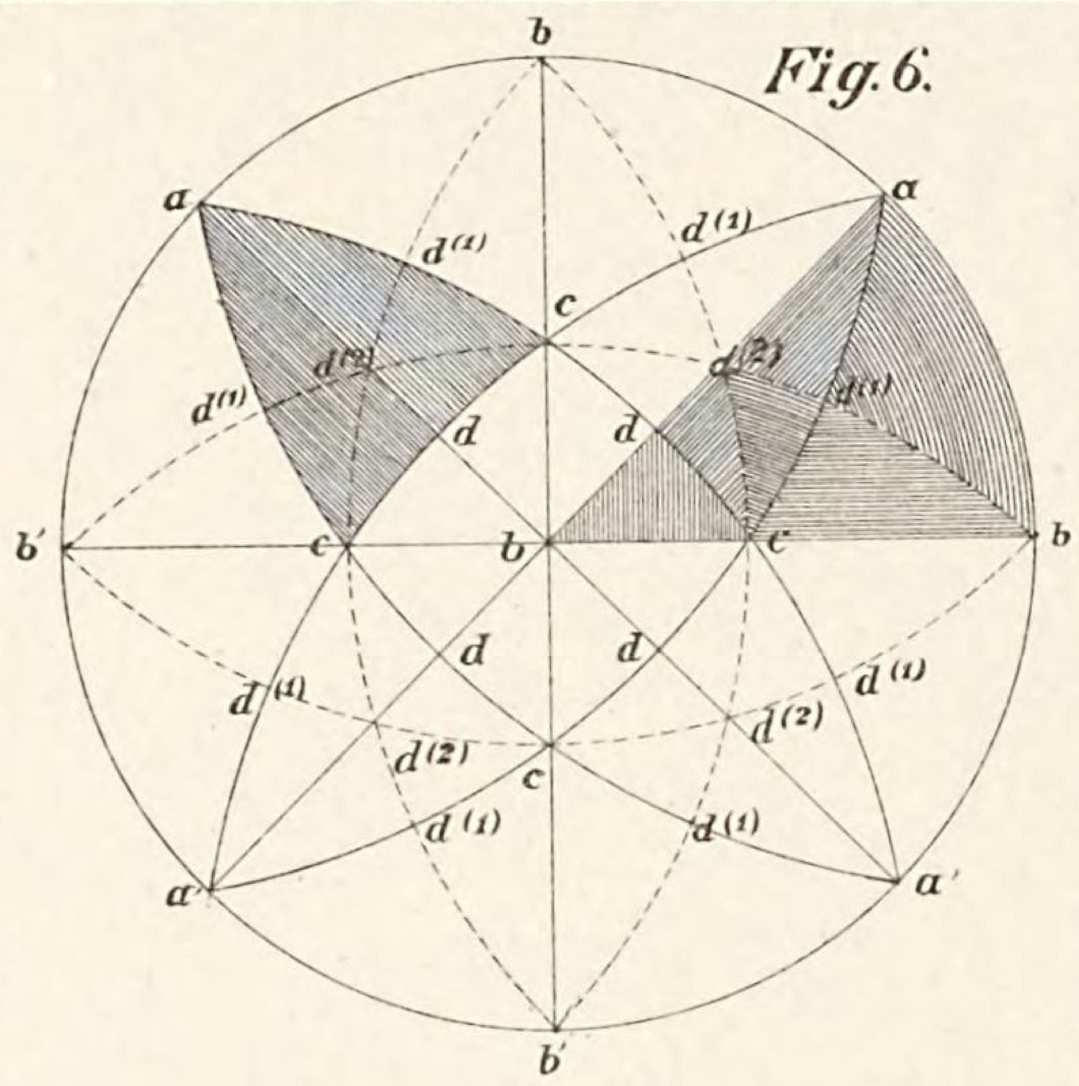


Fig. 7.

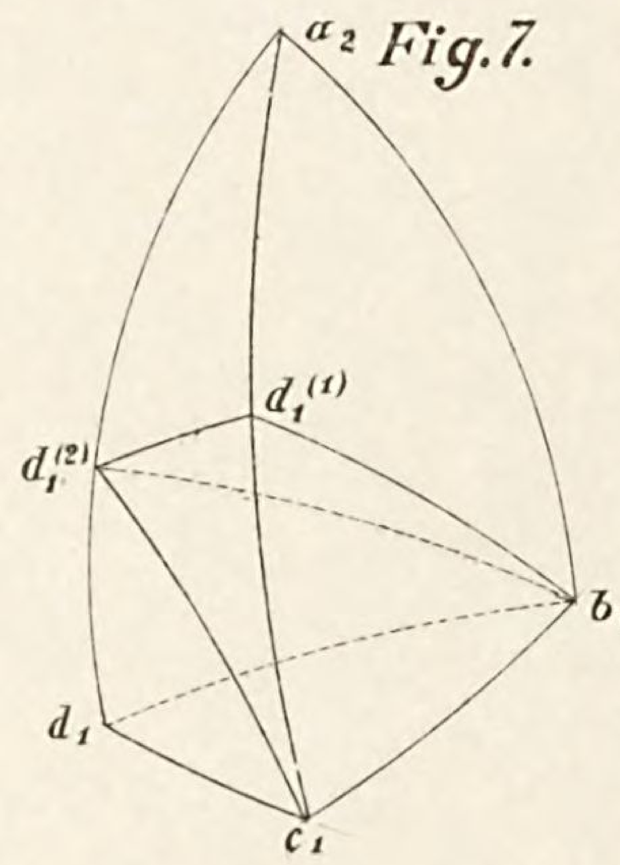


Fig. 7 a.

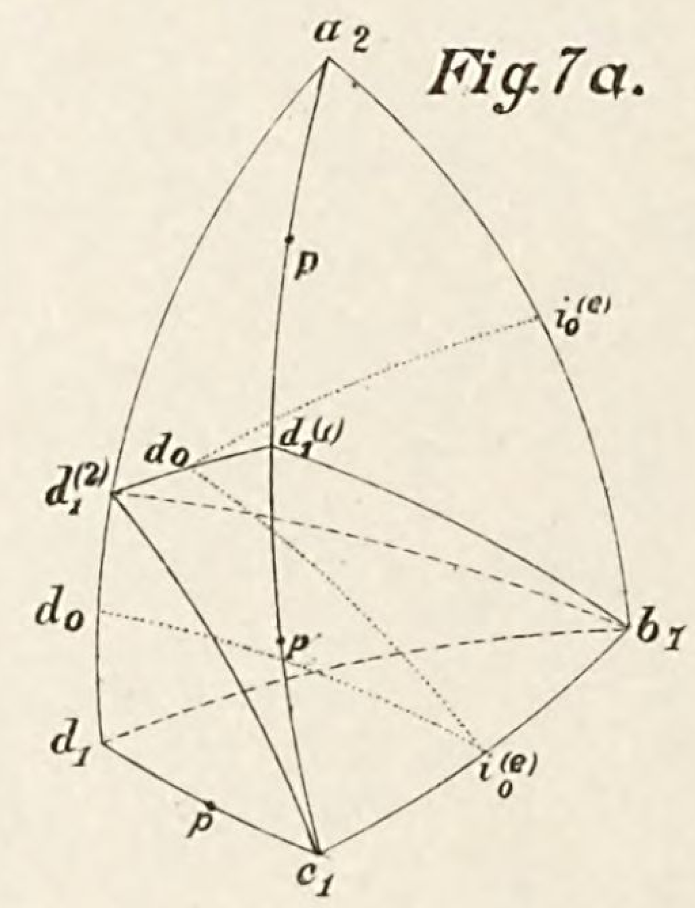


Fig. 9.

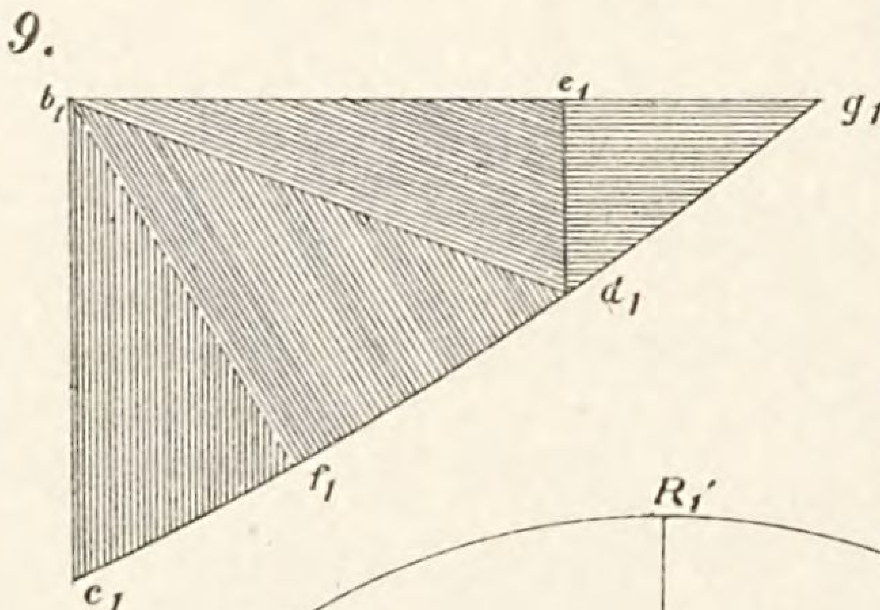


Fig. 10.

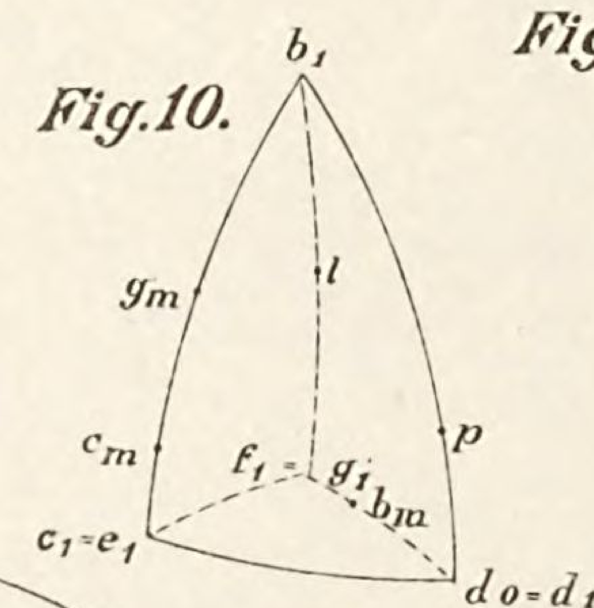


Fig. 9 a.

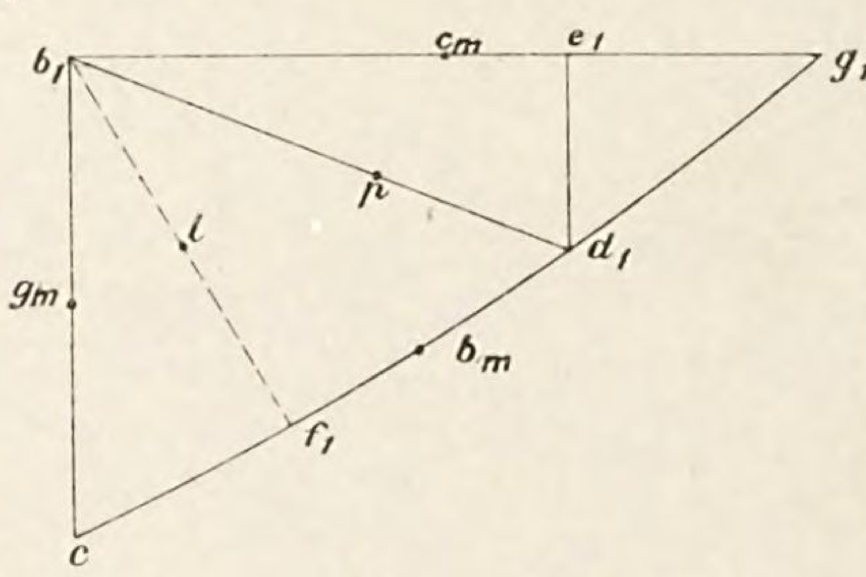


Fig. 11.

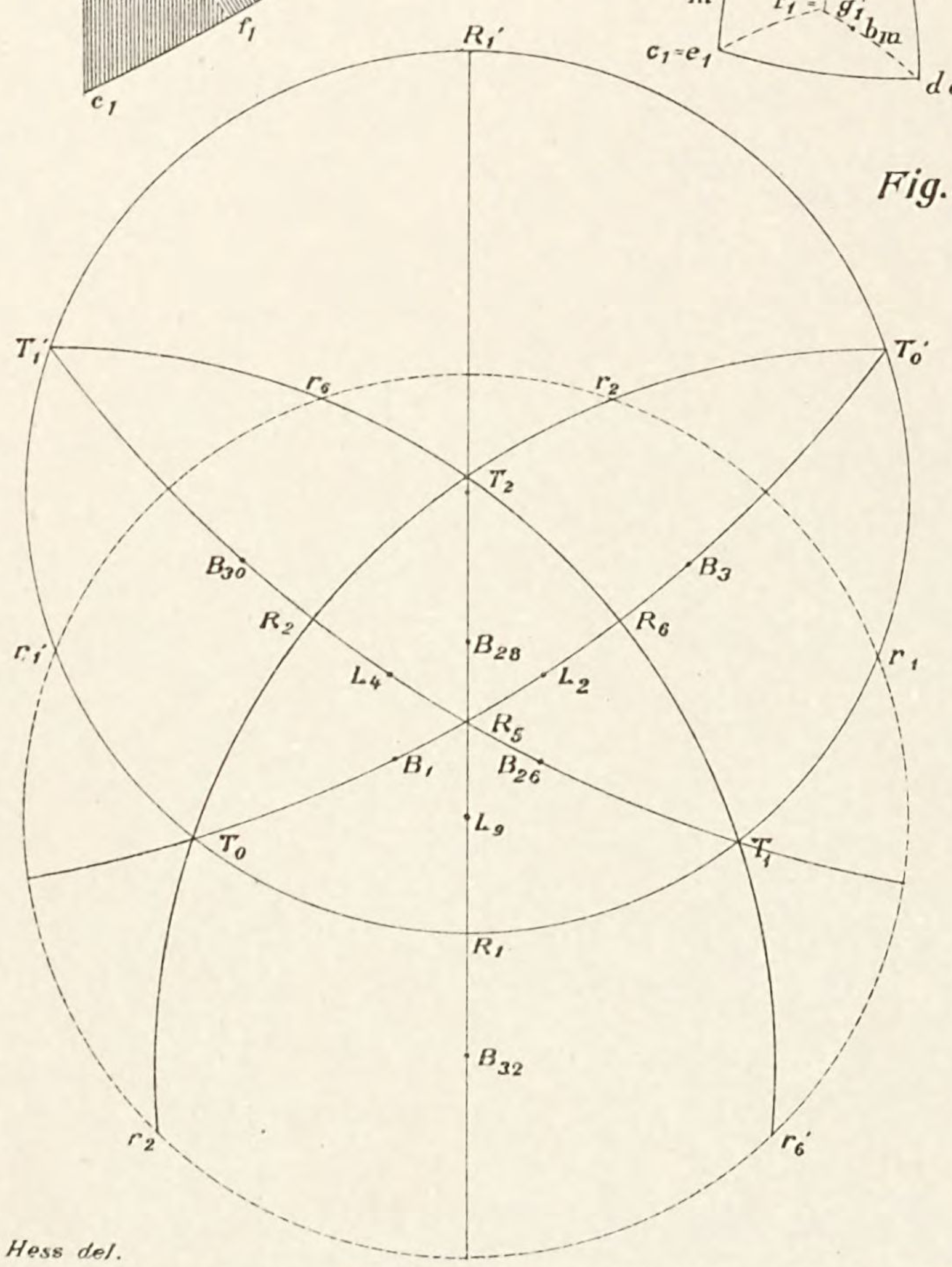
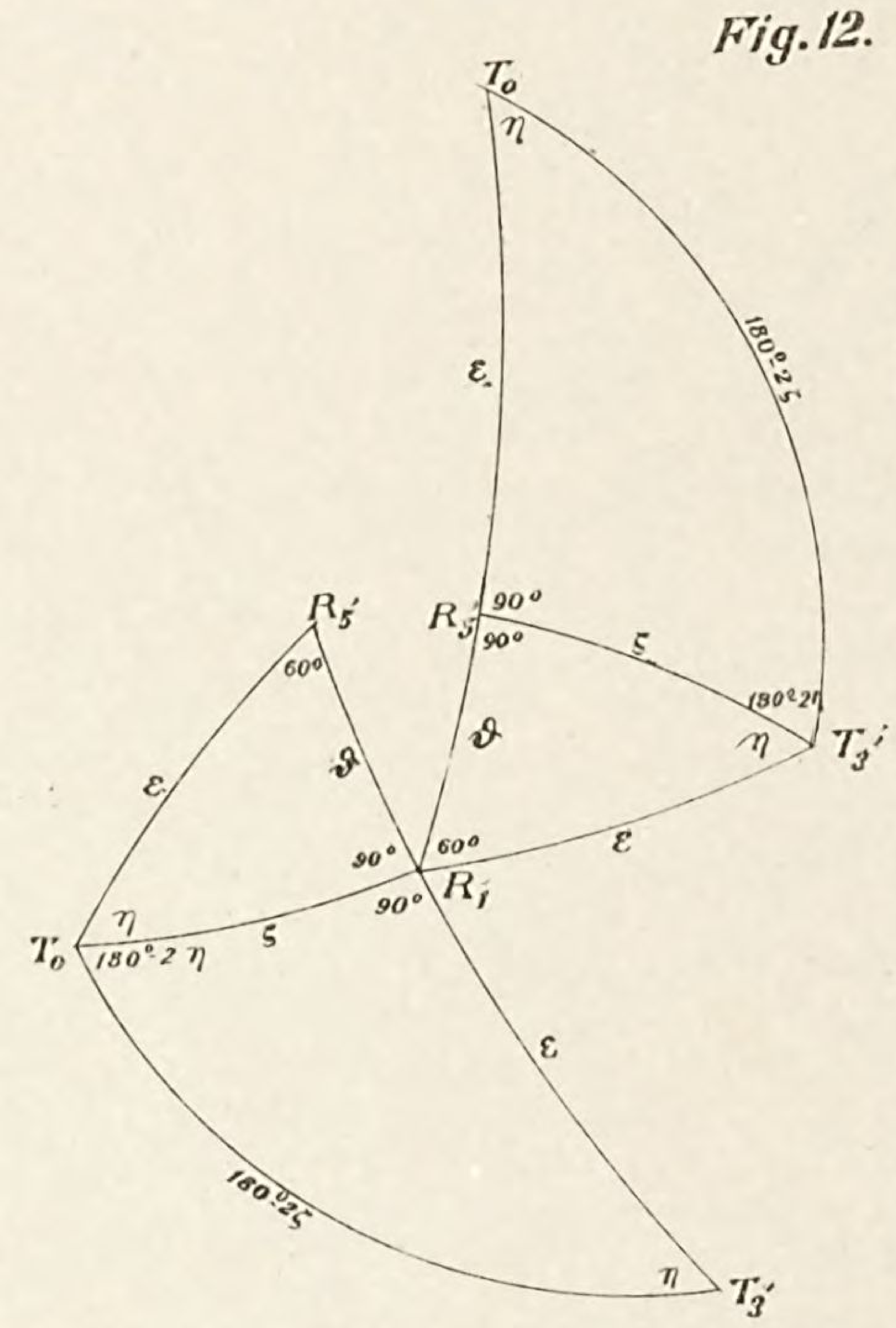
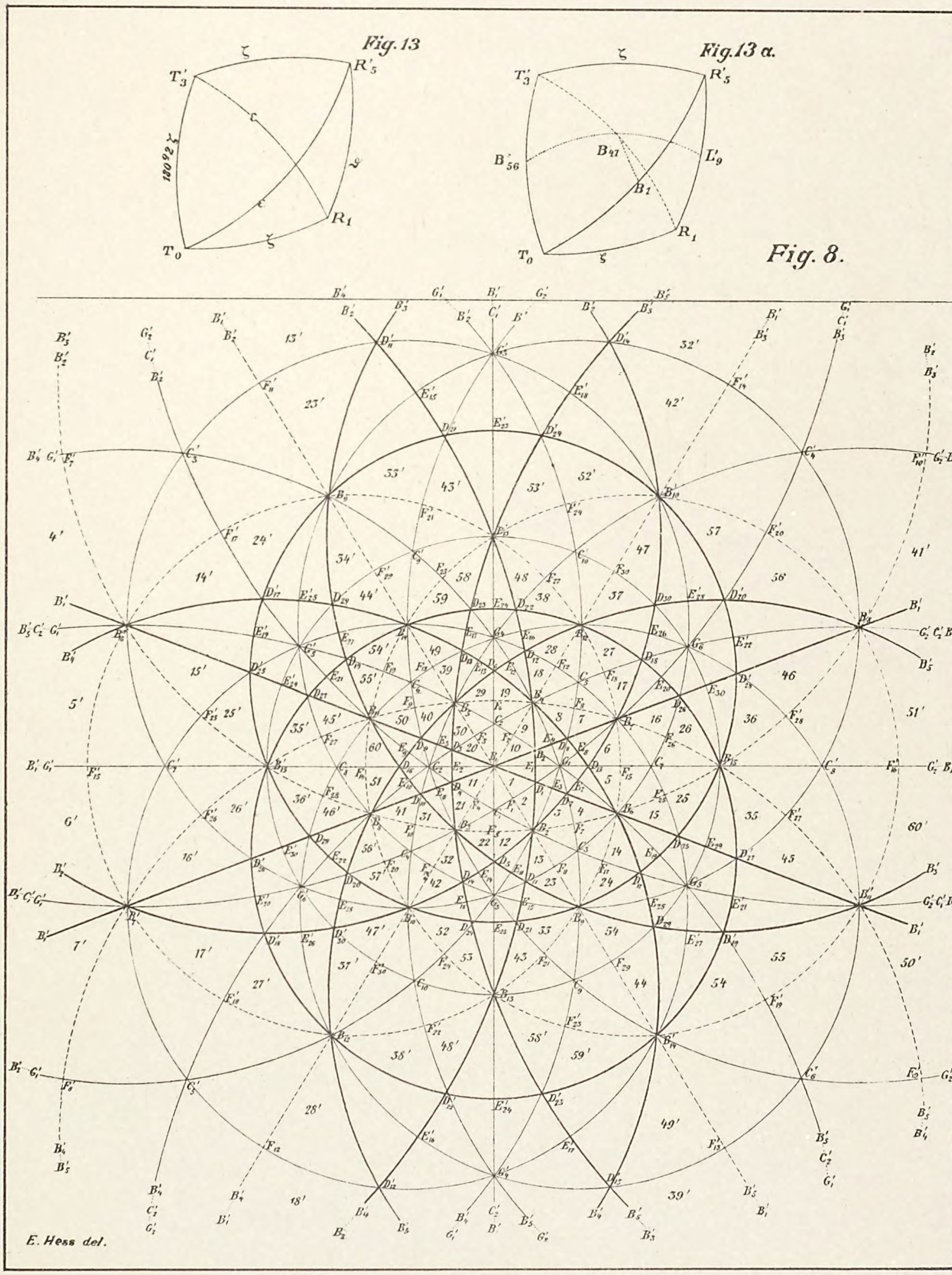


Fig. 12.



E. Hess del.



E. Hess: Configurationen. Taf. III.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Folgende von der Akademie herausgegebene Bände der NOVA ACTA sind durch die Buchhandlung von Wilh. Engelmann in Leipzig zu beziehen:

Band	LXXIV				Halle	1899.	4⁰.
„	LXXII				„	1899.	„
„	LXXI				„	1898.	„
„	LXX				„	1898.	„
„	LXIX				„	1898.	„
„	LXVIII				„	1897.	„
„	LXVII				„	1896.	„
„	LXVI				„	1896.	„
„	LXV				„	1896.	„
„	LXIV				„	1895.	„
„	LXIII				„	1895.	„
„	LXII				„	1894.	„
„	LXI				„	1894.	„
„	LX				„	1894.	„
„	LIX				„	1893.	„
„	LVIII				„	1893.	„
„	LVII				„	1892.	„
„	LVI				„	1891.	„
„	LV				„	1891.	„
„	LIV				„	1890.	„
„	LIII				„	1889.	„
„	LII				„	1888.	„
„	LI				„	1887.	„
„	L				„	1887.	„
„	XLIX				„	1887.	„
„	XLVIII				„	1886.	„
„	XLVII				„	1885.	„
„	XLVI				„	1884.	„
„	XLV				„	1884.	„
„	XLIV				„	1883.	„
„	XLIII				„	1882.	„
„	XLII				„	1881.	„
„	XLI P. II				„	1880.	„
„	XLI P. I				„	1879.	„
„	XL				„	1878.	„
„	XXXIX				Dresden	1877.	„
„	XXXVIII				„	1876.	„
„	XXXVII				„	1875.	„
„	XXXVI				„	1873.	„
„	XXXV				„	1870.	„
„	XXXIV				„	1868.	„
„	XXXIII		(= N. F. Bd. XXV)		„	1867.	„
„	XXXII	P. II	(= „ „ „ XXIV	Abth. 2)	„	1867.	„
„	XXXII	P. I	(= „ „ „ XXIV	Abth. 1)	„	1865.	„
„	XXXI		(= „ „ „ XXIII)		„	1864.	„
„	XXX		(= „ „ „ XXII)		„	1864.	„
„	XXIX		(= „ „ „ XXI)		Jena	1862.	„
„	XXVIII		(= „ „ „ XX)		„	1861.	„
„	XXVII		(= „ „ „ XIX)		„	1860.	„
„	XXVI	P. II	(= „ „ „ XVIII	Abth. 2)	Breslau und Bonn	1858.	„
„	XXVI	P. I	(= „ „ „ XVIII	Abth. 1)	„ „ „	1857.	„
„	XXV	P. II	(= „ „ „ XVII	Abth. 2)	„ „ „	1856.	„
„	XXV	P. I	(= „ „ „ XVII	Abth. 1)	„ „ „	1855.	„
„	XXIV	Spl.	(= „ „ „ XVI	Spl.)	„ „ „	1854.	„
„	XXIV	P. II	(= „ „ „ XVI	Abth. 2)	„ „ „	1854.	„
„	XXIV	P. I	(= „ „ „ XVI	Abth. 1)	„ „ „	1854.	„
„	XXIII	Spl.	(= „ „ „ XV	Spl.)	„ „ „	1856.	„
„	XXIII	P. II	(= „ „ „ XV	Abth. 2)	„ „ „	1852.	„
„	XXIII	P. I	(= „ „ „ XV	Abth. 1)	„ „ „	1851.	„
„	XXII	Spl.	(= „ „ „ XIV	Spl.)	„ „ „	1852.	„
„	XXII	P. II	(= „ „ „ XIV	Abth. 2)	„ „ „	1850.	„
„	XXII	P. I	(= „ „ „ XIV	Abth. 1)	„ „ „	1847.	„
„	XXI	Spl.	(= „ „ „ XIII	Spl.)	„ „ „	1846.	„
„	XXI	P. II	(= „ „ „ XIII	Abth. 2)	„ „ „	1845.	„
„	XXI	P. I	(= „ „ „ XIII	Abth. 1)	„ „ „	1845.	„
„	XX	P. II	(= „ „ „ XII	Abth. 2)	„ „ „	1844.	„
„	XX	P. I	(= „ „ „ XII	Abth. 1)	„ „ „	1843.	„
„	XIX	Spl. II	(= „ „ „ XI	Spl. 2)	„ „ „	1841.	„
„	XIX	Spl. I	(= „ „ „ XI	Spl. 1)	„ „ „	1843.	„
„	XIX	P. II	(= „ „ „ XI	Abth. 2)	„ „ „	1842.	„
„	XIX	P. I	(= „ „ „ XI	Abth. 1)	„ „ „	1839.	„

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Nova acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum

Bd.: 75. 1899

Halle, S. 1899

Res/4 Acad. 5,B-75
urn:nbn:de:bvb:12-bsb12039656-6